

# Izmenljiv materijalni sistem. - Mehanički model

izmenljivog materijalnog sistema u klasičnoj mehanici predstavlja sistem materijalnih tačaka ili tela u kome se, kao spoljašnje i unutrašnje veze, pojavljuju opruge.

Neka je veza između tačaka  $M_i$  i  $M_e$  linearna opruga krutosti  $c$  i nenapregnute dužine  $L$ . U nekom trenutku  $t$  dužina opruge je  $l$ . Neka je sila u opruzi koja deluje u tačku  $M_i$ , sila  $\vec{F}_{el}$ , a sila u opruzi koja deluje u tački  $M_e$ , sila  $\vec{F}'_{el} = -\vec{F}_{el}$ . EVR sila

$\vec{F}_{el}$  i  $\vec{F}'_{el}$  je:

$$\delta A(\vec{F}_{el}, \vec{F}'_{el}) = \vec{F}_{el} \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{F}'_{el} \cdot \delta \vec{r}_e = \vec{F}_{el} \cdot (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_e) \neq 0 \quad (136)$$

gde je:

$$\vec{F}_{el} = c \Delta l \vec{u}_0 \quad (137)$$

i  $\Delta l = l - L$  - deformacija opruge

$\vec{u}_0$  - jedinični vektor pravca  $M_i M_e$

tako da važi:

$$\delta A(\vec{F}_{el}, \vec{F}'_{el}) = c \Delta l \vec{u}_0 \cdot (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_e) \neq 0 \quad (137)$$

Dalje je:

$$\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_e = \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_e) = \delta \vec{M}_e \vec{M}_i = -\delta \vec{M}_i \vec{M}_e, \quad (138)$$

gde je:

$$\vec{M}_i \vec{M}_e = \vec{u}_0 \vec{M}_i \vec{M}_e = \vec{u}_0 l$$

$$\delta \vec{M}_i \vec{M}_e = \delta(\vec{u}_0 l) = \delta \vec{u}_0 l + \vec{u}_0 \delta l \quad (139)$$

U izrazu (139)  $\delta \vec{u}_0$  je vektor upravan na  $\vec{u}_0$ , tj.:

$$\delta \vec{u}_0 \perp \vec{u}_0 \quad (\text{zato što je } d\vec{u}_0 \perp \vec{u}_0 \text{ i } d\vec{u}_0 \in \{\delta \vec{u}_0\}); \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{u}_0 = 0 \quad (140)$$

$$\delta l = \delta(l - L) = \delta(\Delta l) \quad (\delta L = 0, L = \text{const}),$$

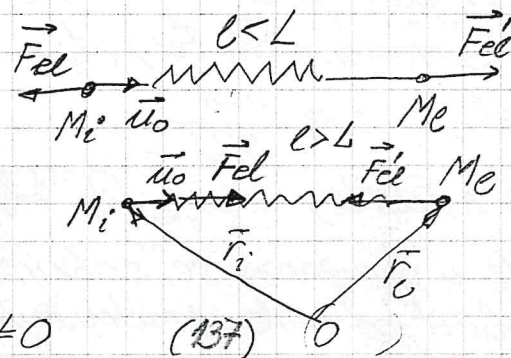
pa je

$$\delta \vec{M}_i \vec{M}_e = \delta \vec{u}_0 l + \vec{u}_0 \delta(\Delta l) \quad (141)$$

Zamenom (141) u (138) i (137), a s obzirom na (140) dobija se

$$\delta A(\vec{F}_{el}, \vec{F}'_{el}) = c \Delta l \vec{u}_0 \cdot (\delta \vec{u}_0 l + \vec{u}_0 \delta(\Delta l)),$$

$$\delta A(\vec{F}_{el}, \vec{F}'_{el}) = -c \Delta l \cdot \delta(\Delta l) = -\delta\left(\frac{c(\Delta l)^2}{2}\right) \quad (142)$$



Deformacija opruge  $\Delta l$  je funkcija generalisanih koordinata  $q_j$ :

$$\Delta l = \Delta l(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n), \quad (143)$$

pa je:

$$\delta(\Delta l) = \frac{\partial(\Delta l)}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial(\Delta l)}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \frac{\partial(\Delta l)}{\partial q_n} \delta q_n,$$

tj.:

$$\delta(\Delta l) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\Delta l)}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (144)$$

Zamenom (144) u (142) dobija se:

$$\delta'A(\vec{F}_el, \vec{F}_el') = -c\Delta l \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\Delta l)}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left( -c\Delta l \frac{\partial(\Delta l)}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (145)$$

Ako se ima u vidu da je EVR sila određen preko generalisanih sila i veličina  $\delta q_j$ , onda veličine u zagradama u sumi (145) predstavljaju generalisane, elastične sile  $Q_j^{el}$ , tj. generalisane sile sistema  $(\vec{F}_el, \vec{F}_el')$ , tj.:

$$Q_j^{el} = -c\Delta l \frac{\partial(\Delta l)}{\partial q_j}, \quad (146)$$

$$\delta'A(\vec{F}_el, \vec{F}_el') = \sum_{j=1}^n Q_j^{el} \delta q_j.$$

Sile u oprugama se, s obzirom na činjenicu da je njihov EVR različit od nule, pridružuju aktivnim silama koje deluju na M. t

### Generalisane potencijalne sile. - Aktivne sile $\vec{F}_{ri}^a$

$i=1, 2, \dots, N$  koje deluju na MS mogu se razložiti na nepotencijalne sile  $\vec{F}_{ri}^{n.p}$  i potencijalne sile  $\vec{F}_{ri}^p$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , gde je sa:

$\vec{F}_{ri}^{n.p}$  označena rezultanta nepotencijalnih sila koje deluju na tačku  $M_i$  materijalnog sistema,

a sa  $\vec{F}_{ri}^p$  rezultanta potencijalnih (konzervativnih) sila u tački  $M_i$ .

Kako je, dakle,

$$\vec{F}_{ri}^a = \vec{F}_{ri}^p + \vec{F}_{ri}^{n.p}, \quad (148)$$

to je EVR aktivnih sila (108)

$$\delta'A^a = \delta'A^p + \delta'A^{n.p}, \quad (149)$$

gde je:

$$\delta'A^p = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ri}^p \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j^p \delta q_j \quad (150)$$

EVR potencijalnih sila koje deluju na MS

$$\delta A^{n.p} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ri}^{n.p} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j^{n.p} \delta z_j, \quad (151)$$

EVR nepotencijalnih sila koje deluju na MS

Kombinujući (108), (149), (150) i (151) dobija se da su generalisane aktivne sile  $Q_j^a$ :

$$Q_j^a = Q_j^{n.p} + Q_j^p, \quad (152)$$

gde su:

$$Q_j^{n.p} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ri}^{n.p} \cdot \vec{e}_{j(12)} - \text{generalisane nepotencijalne sile} \quad (153)$$

$$Q_j^p = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ri}^p \cdot \vec{e}_{j(12)} - \text{generalisane potencijalne sile} \quad (154)$$

Međutim, generalisane potencijalne sile  $Q_j^p$  mogu se odrediti i pomoću potencijalne energije sistema. Kao što je poznato za potencijalne sile  $\vec{F}_{ri}^p$  koje deluju u tačkama  $M_i$  materijalnog sistema moguće definisati funkciju potencijalne energije sistema u stacionarnom polju sila:

$$E_p = E_p(x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_N, y_N, z_N), \quad (E_p = \Pi) \quad (155)$$

gde su  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i=1..N$  Dekartove koordinate tačaka  $M_i$  MS u odnosu na DKS  $Oxyz$ . Sile  $\vec{F}_i^p$  u DKS  $Oxyz$  određene su tada izrazima:

$$\vec{F}_{ri}^p = -\text{grad}_i E_p, \text{ tj. } \vec{F}_{ri}^p = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x_i}\right) \vec{i} + \left(-\frac{\partial E_p}{\partial y_i}\right) \vec{j} + \left(-\frac{\partial E_p}{\partial z_i}\right) \vec{k}, \quad (156)$$

dok elementarni rad tih sila na ESP materijalnog sistema:

$$\delta A^p = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ri}^p \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \text{grad}_i E_p \cdot d\vec{r}_i \Rightarrow \delta A^p = -dE_p \quad (157)$$

Kako su, pak, Dekartove koordinate  $x_i, y_i, z_i$ ,  $i=1..N$ , prema (49) funkcija generalisanih koordinata, to se potencijalna energija sistema u stacionarnom polju sila (155) može dati u funkciji gen. koordinata  $z_j$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ :

$$E_p^* = E_p^*(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (158)$$

gde je:

$$E_p^*(z_1, z_2, \dots, z_n) = E_p(x_i(z_j), y_i(z_j), z_i(z_j)) \quad (159)$$

$$\frac{\partial E_p^*}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial E_p}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial z_j} + \frac{\partial E_p}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial z_j} + \frac{\partial E_p}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial z_j}$$

$$\text{tj. } \left[ \frac{\partial E_p^*}{\partial z_j} \right] = \sum_{i=1}^N \text{grad}_i E_p \cdot \vec{e}_{j(12)} = - \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ri}^p \cdot \vec{e}_{j(12)} \quad (160)$$

Imajući u vidu (154), iz (160) se dobijaju generalisane

potencijalne sile  $Q_j^p$ , u obliku:

$$Q_j^p = - \frac{\partial E_p^*}{\partial z_j} \quad (161)$$

Lako je sada pokazati da je EVR potencijalnih sila,  $\delta'A^p$ , određen elementarnom virtuelnom promenom funkcije potencijalne energije,  $\delta E_p^*$ , na posmatranom proizvoljnom EVP materijalnog sistema iz proizvoljnog položaja tog MS-a u konfiguracionom prostoru:

$$\delta'A^p = \sum_{j=1}^n Q_j^p \delta z_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial E_p^*}{\partial z_j} \delta z_j \Rightarrow \begin{cases} \delta'A^p = -\delta E_p^* \\ \delta'A_p = -(dE_p^*)_{\delta z_j \rightarrow \delta z_j} \end{cases} \quad (162)$$

Primer potencijalnih sila predstavljaju sile u oprugama. U primeru razmatranom u prethodnom delu određen je EVR unutrašnjih sila  $(\vec{F}_{el}, \vec{F}'_{el})$  formulom (142):

$$\delta'A(\vec{F}_{el}, \vec{F}'_{el}) = -\delta \left( \frac{c(4l)^2}{2} \right),$$

pa je, s obzirom na (162), potencijalna energija sistema sila  $(\vec{F}_{el}, \vec{F}'_{el})$ :

$$E_p^*(\vec{F}_{el}, \vec{F}'_{el}) = \frac{1}{2} c(4l)^2, \quad (163)$$

gde je deformacija opruge  $4l = 4l(z_j)$ , tako da je i

$$E_p^*(\vec{F}_{el}, \vec{F}'_{el}) = E_p^*(z_j). \quad (164)$$

Generalizovane potencijalne elastične sile sistema  $(\vec{F}_{el}, \vec{F}'_{el})$ , su prema (161), (163):

$$Q_j^p = Q_j^{el} = - \frac{\partial E_p^*}{\partial z_j}, \quad (165)$$

$$Q_j^{el} = - \frac{\partial}{\partial z_j} \left( \frac{1}{2} c(4l)^2 \right) = -c \cdot 4l \cdot \frac{\partial(4l)}{\partial z_j} \quad (166)$$

Opšta jednačina statike. Lagranžev princip virtuelnih pomeranja

teorema. - Za ravnotežu mehaničkog sistema sa idealnim, geometrijskim, stacionarnim, zadržavajućim vezama, potrebno je i dovoljno da elementarni virtuelni rad aktivnih sila sistema bude jednak nuli, a pod uslovom da su brzine tačaka sistema u početnom trenutku jednake nuli.

Dokaz. - Posmatra se VMS sa idealnim GSŽ vezama (46), koji se pod dejstvom aktivnih sila,  $\vec{F}_i^a$ ,  $i=1, \dots, N$  nalazi u stanju ravnoteže. Primenom principa oslobađanja od veza, dejstvo veza

se zamenjuje dejstvom odgovarajućih reakcija veza, tako da u ravnotežnom položaju MS-a, u kome su brzine  $\vec{v}_i$  tačaka  $M_i$  jednake nuli,  $\vec{v}_i(t_0) = \vec{v}_i(t) = 0$ , rezultanta aktivnih sila  $\vec{F}_i^a$  koja deluje na bilo koju tačku  $M_i$  mora biti uravnotežena rezultantom idealnih reakcija veza u njoj:  $\vec{R}_i = \vec{N}_i$ . Na osnovu toga sledi da moraju biti zadovoljene jednačine ravnoteže:

$$\vec{F}_i^a + \vec{N}_i = 0, \quad \vec{v}_i(t) = \vec{v}_i(t_0) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (164)$$

Neka MS u okolini položaja ravnoteže koji je u prostoru gen. koordinata  $q_j, j=1, \dots, n$  određen vrednostima  $q_j = 0$ , izvrši proizvoljno

$$EVP: \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \delta q_j \vec{e}_j(r_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (165)$$

gde su  $\delta q_j$  proizvoljni elementarni virtuelni priraštaji vrednosti gen. koordinata  $q_j$  materijalnog sistema u ravnotežnom položaju.

Skalarnim množenjem leve i desne strane svake od jednačina (164) sa odgovarajućim vektorom EVP,  $\delta \vec{r}_i$ , i njihovim sabiranjem, dobija se:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^a + \vec{N}_i) \cdot \delta \vec{r}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{N}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (166)$$

gde je prema (119):  $\delta A^{R.V} = \sum_{i=1}^N \vec{N}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ , tako da iz (166)

$$\text{sledi jednačina: } \boxed{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i = 0}. \quad (167)$$

Jed. (167) predstavlja opštu jednačinu statike i njome je iskazan stav da je elementarni virtuelni rad aktivnih sila na EVP materijalnog sistema, čije je kretanje ograničeno idealnim GSŽ-vezama, u položaju ravnoteže, jednak nuli. (Napomena: Opšta jed. statike (167) važi, generalno, za svaki MS sa idealnim, zadržavajućim vezama bilo koje vrste).

S druge strane, kako je:  $\delta A^a = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j^a \delta q_j$ , to se jednačina

(167) u prostoru gen. koordinata  $q_j$  materijalnog sistema sa idealnim GSŽ-vezama, može napisati u obliku:

$$\boxed{\sum_{j=1}^n Q_j^a \delta q_j = 0} \Leftrightarrow Q_1^a \delta q_1 + Q_2^a \delta q_2 + \dots + Q_j^a \delta q_j + \dots + Q_n^a \delta q_n = 0 \quad (168)$$

Kako su veličine  $\delta q_j, j=1, 2, \dots, n$  u (168) međusobno nezavisne, to će (168) biti, prema ( ), zadovoljena ako i samo ako su sve generalisane sile  $Q_j^a, j=1, \dots, n$ , jednake nuli, tj.:

$$\boxed{Q_j^a = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n} \quad (169)$$

Dakle, u položaju ravnoteže materijalnog sistema na idealnim GSŽ-vezama (46) sve generalisane aktivne sile u prostoru generalisanih koordinata  $q_j, j=1, \dots, n$  tog materijalnog sistema, su jednake nuli.

Na ovaj način dokazana je potrebnost uslova (164) da bi važila, opšta jednačina statike (167) i njene posledice (169) za materijalni sistem na idealnim GSŽ-vezama.

Dokaz dovoljnosti uslova teoreme za slučaj kada je kretanje MS-a ograničeno idealnim GSŽ-vezama zasniva se na dokazu sledećeg stava: Ako je  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i = 0$  i ako su  $t_0 = 0$  brzine tačaka M materijalnog sistema jednake nuli,  $\vec{v}_i(t_0) = 0$ , tada će brzine  $\vec{v}_i$  tačaka tog sistema biti jednake nuli, počev od trenutka  $t_0 = 0$ , na neograničeno vreme.

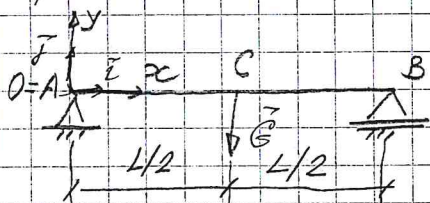
(Dokaz ovog stava videti u preporučenim udžbenicima)

Ako su aktivne sile koje deluju na posmatrani VMS u položaju ravnoteže, potencijalne, jednačine ravnoteže (169) dobijaju oblik:

$$\frac{\partial E_p}{\partial z_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (170)$$

Sistemi jednačina (169) i (170) predstavljaju uslove koje moraju da zadovolje aktivne sile koje deluju na posmatrani VMS u položaju ravnoteže, a koji ima slobodu kretanja i čiji je broj stepeni slobode  $n$ . Isti sistemi jednačina mogu poslužiti za određivanje reakcija idealnih GSŽ veza u položaju ravnoteže VMS-a koji nema slobodu kretanja ( $n=0$ ). U tom slučaju VMS treba osloboditi veza, reakcije idealnih GSŽ-veza dodati sistemu aktivnih sila, uvesti EVP materijalnog sistema, tada, oslobođenog veza, u okolini položaja ravnoteže tog materijalnog sistema, odrediti EVR svih aktivnih sila i reakcija veza na ovom EVP materijalnog sistema i formirati opštu jednačinu statike (167), odnosno sistem jednačina (169).

Primer. Homogena greda težine  $G$  i dužine  $L$  vezana je, u vertikalnoj ravni, krajem A nepokretnim cilindričnim zglobovom, a krajem B pokretnim cilindričnim zglobovom. Odrediti reakcije veza.



U vertikalnoj ravni, u tački A uveden je KS  $Oxy$ . Telo AB je materijalni sistem čije je kretanje ograničeno vezama, tako što je ograničeno kretanje njegovih

tačaka A, B koje su u kontaktu sa vezama.

Jednačine zgloba u tački A, a u KS  $Oxy$  su 2 jednačine:

$$O_A = 0 \quad i \quad Y_A = 0, \quad (171)$$

a jednačina pokretnog, u pravcu ose  $Ox$ , zgloba B, jedna

jednaciina :  $Y_B = 0$  (172)

Kada se uklone veze, zglobovi A i B, štap AB postaje slobodan i kao slobodan on ima 3 stepena slobode, s obzirom na činjenicu da on tada može da vrši ravno kretanje u ravni Oxy. Broj stepeni slobode vezanog štapa AB je  $n=0$ , tj. on nema slobodu kretanja, s obzirom na činjenicu da je njegovo kretanje ograničeno sa 3 veze (171) i (172), kao i da je:

$$n = 3 - l, \quad (n = 3 - 3 = 0)$$

Za generalisane koordinate štapa oslobođenog veza biće usvojene, kao i uvek kada telo vrši ravno kretanje, veličine:

$$Q_1 = x_A, \quad Q_2 = y_A, \quad Q_3 = \varphi.$$

EVP tela AB kao slobodnog u odnosu na položaj ravnotežic odredeno je <sup>(proizvoljnim)</sup> elementarnim virtuelnim priraštajima gen.

koordinata:

$$\delta Q_1 = \delta x_A, \quad \delta Q_2 = \delta y_A \quad \text{ i } \quad \delta Q_3 = \delta \varphi,$$

gde  $\delta \varphi$  određuje elementarnu virtuelnu rotaciju tela oko ose Az i gde je  $\delta \vec{\varphi} = \delta \varphi \vec{k}$  vektor te elementarne virtuelne rotacije.

Pošto je štap AB oslobođen veza u tačkama A i B uvedene su reakcije zglobova A i B:  $\vec{R}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}$  i  $\vec{R}_B = Y_B \vec{j}$ ,

tako da na telo <sup>(kada)</sup> deluje sistem sila  $(\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{G})$ . EVR ovog sistema sila prema opštoj jednačini statike je jednak nula, tj. važi:

$$\delta A(\vec{G}) + \delta A(\vec{R}_A) + \delta A(\vec{R}_B) = 0,$$

odnosno

$$\vec{G} \cdot \delta \vec{r}_G + \vec{R}_A \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{R}_B \cdot \delta \vec{r}_B = 0, \quad (173)$$

gde su:  $\delta \vec{r}_A, \delta \vec{r}_B$  i  $\delta \vec{r}_G$  EVP napadnih tačaka A, B i C sila  $\vec{R}_A, \vec{R}_B$  i  $\vec{G}$ .

EVP tačke A izračeno preko velicina  $\delta Q_j, j=1,2,3$  je:

$$\delta \vec{r}_A = \delta x_A \vec{i} + \delta y_A \vec{j}, \quad (174)$$

EVP tačka B tela čije je virtualno kretanje ravno kretanje biće određeno relacijom:

$$\delta \vec{r}_B = \delta \vec{r}_A + \delta \vec{r}_B^A, \quad (175)$$

gde je:  $\delta \vec{r}_B^A = \delta \vec{\varphi} \times \vec{AB} = \delta \varphi \vec{L} \vec{j}$ , EVP tačka B usled rotacije tela oko ose Ax, pa je:

$$\delta \vec{r}_B = \delta x_A \vec{i} + \delta y_A \vec{j} + \delta \varphi \vec{L} \vec{j} \Rightarrow \boxed{\delta \vec{r}_B = \delta x_A \vec{i} + (\delta y_A + \delta \varphi L) \vec{j}} \quad (176)$$

Analogno ovome određuje se EVP tačka C:

$$\delta \vec{r}_C = \delta \vec{r}_A + \delta \vec{r}_C^A, \quad \delta \vec{r}_C^A = \delta \vec{\varphi} \times \vec{AC} = \delta \varphi \frac{L}{2} \vec{j}, \quad (176')$$

odnosno:

$$\delta \vec{r}_C = \delta x_A \vec{i} + \delta y_A \vec{j} + \frac{\delta \varphi L}{2} \vec{j} \Rightarrow \boxed{\delta \vec{r}_C = \delta x_A \vec{i} + (\delta y_A + \frac{\delta \varphi L}{2}) \vec{j}} \quad (178)$$

Zamenom izraza za sile:  $\vec{R}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}$ ,  $\vec{R}_B = Y_B \vec{j}$  i  $\vec{G} = -G \vec{j}$ , kao i izraza (174), (175) i (176) za EVP tačke A, B, C u opštu jednačinu statike (173) dobija se:

$$(-G \vec{j}) \cdot [\delta x_A \vec{i} + (\delta y_A + \frac{\delta \varphi L}{2}) \vec{j}] + (X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}) \cdot (\delta x_A \vec{i} + \delta y_A \vec{j}) + (Y_B \vec{j}) \cdot [\delta x_A \vec{i} + (\delta y_A + \delta \varphi L) \vec{j}] = 0$$

$$G: -G(\delta y_A + \frac{\delta \varphi L}{2}) + X_A \delta x_A + Y_A \delta y_A + Y_B(\delta y_A + \delta \varphi L) = 0$$

odnosno

$$\boxed{X_A \delta x_A + (-G + Y_A) \delta y_A + (-\frac{GL}{2} + Y_B L) \delta \varphi = 0} \quad (177)$$

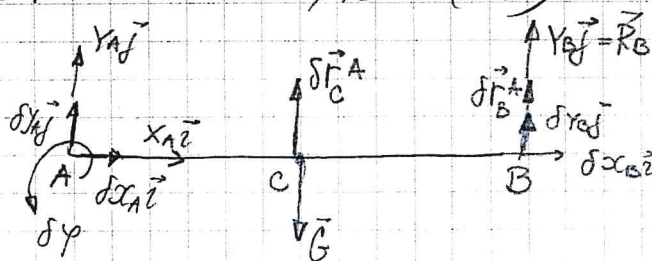
Kako su veličine  $\delta x_A$ ,  $\delta y_A$  i  $\delta \varphi$  nezavisne, to će (177)

biti zadovoljeno ako je:

$$Q_1 = X_A = 0 \quad (178)$$

$$Q_2 = -G + Y_A = 0 \quad (179)$$

$$Q_3 = -\frac{GL}{2} + Y_B L = 0 \quad (180)$$



Jednačine (178), (179) i (180) predstavljaju uslove ravnoteže proizvoljnog ravnog sistema sila ( $\sum X_i = 0$ ,  $\sum Y_i = 0$ ,  $\sum M_{O_i} = 0$ ) i iz njih slede tražene reakcije veza:  $X_A = 0$ ,  $Y_A = G$  i  $Y_B = \frac{G}{2}$ .

Napomena. - Izrazi  $\delta \vec{r}_B$  i  $\delta \vec{r}_C$ , (175) i (176) po strukturi su analogni izrazima za elementarna stvarna pomeranja tačke B i C,  $d\vec{r}_B$  i  $d\vec{r}_C$ , na nekom proizvoljnom intervalu vremena beskonačno male dužine  $dt$ .

Naime, tako je, npr., brzina tačke B u nekom trenut-

ku  $t$ :  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A$ , tj:  $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_B^A}{dt}$ ,

to će ESP tačke B u trenutku  $t$  a na intervalu vremena dužine  $dt$  biti:

$$d\vec{r}_B = d\vec{r}_A + d\vec{r}_B^A, \quad (181)$$

gde je:

$$d\vec{r}_B^A = \vec{v}_B^A dt = ((\dot{\varphi} \vec{k}) \times \vec{AB}) dt = (d\varphi \vec{k}) \times \vec{AB},$$

$$\text{tj. } d\vec{r}_B^A = d\varphi \times \vec{AB} \quad (181')$$

i  $\dot{\varphi} \vec{k} = \vec{\omega}$  - vektor ugaone brzine usled rotacije oko ose Až.

Upoređivanjem izraza (175) i (175') sa (181) i (181') vidi se

ovi poslednji dobijaju tako što se u (181) i (181') operator diferenciranja „ $d$ “ zameni operatorom sinhronog variranja „ $\delta$ “.

Ovo je potpuno legalno, s obzirom na činjenicu da je za

VMS čije je kretanje ograničeno GSI-vezano, jedno od elementarnih virtuelnih pomeranja elementarno stvarno pomeranje tog sistema u trenutku  $t$ .

Generalisane sile inercije.- Sistem sila inercije materijalnog sistema tačaka  $M_i, i=1, 2, \dots, N$ , čine sile inercije tih tačaka:

$$\vec{F}_i^{\text{in}} = -m_i \vec{a}_i, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (182)$$

gde su  $\vec{a}_i = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$  ubrzanja tačaka MS-a. Da bismo došli do izraza generalisane sile inercije (generalisane inercijalne sile)  $Q_j^{\text{in}}, j=1, 2, \dots, n$ , podsetimo se da su u konfiguracionom prostoru konačne jednočine kretanja MS-a dade sa (63):  $q_j = q_j(t), j=1, 2, \dots, n$ , a da je njegov položaj u odnosu na pol  $O$ , u svakom trenutku  $t$  određen tada vektorima (51):

$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_j, \dots, q_n), i=1, 2, \dots, N$ . Brzine  $\vec{v}_i$  tačaka  $M_i$  materijalnog sistema, takođe, su tada određene izrazima (69):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \vec{C}_{j(i)}(q_k) = \dot{q}_1 \vec{C}_{1(i)} + \dot{q}_2 \vec{C}_{2(i)} + \dots + \dot{q}_j \vec{C}_{j(i)} + \dots + \dot{q}_n \vec{C}_{n(i)}$$

gde su prema (66) i (67):  $\vec{C}_{j(i)} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$  i  $\vec{C}_{j(i)} = \vec{C}_{j(i)}(q_k)$ . Kao što se vidi iz (69) brzine  $\vec{v}_i$  tačaka MS-a, su funkcija  $2n$  međusobno nezavisnih parametara:  $n$  generalisanih koordinata i  $n$  generalisanih brzina  $\dot{q}_j = dq_j/dt$ . Kako brzine  $\vec{v}_i$  tačaka MS-a zavise od generalisanih brzina  $\dot{q}_j, j=1, 2, \dots, n$  na linearan način, to iz (69) sledi sledeća relacija:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \vec{C}_{j(i)} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}} \quad (183)$$

Takođe iz izraza (69) je:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \vec{C}_{j(i)} \right) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial \vec{C}_{j(i)}}{\partial q_k}, \quad (184)$$

gde je:

$$\frac{\partial \vec{C}_{j(i)}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \Rightarrow \frac{\partial \vec{C}_{j(i)}}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{C}_{k(i)}}{\partial q_j} \quad (185)$$

pravilo komutacije parcijalnih izvoda  
neprekidnih funkcija

$$i \quad \frac{d \vec{C}_{k(i)}}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{C}_{k(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (186)$$

Vodeći računa o (185) i (186), izraz (184) postaje:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial \vec{C}_{k(i)}}{\partial q_j} = \frac{d \vec{C}_{k(i)}}{dt}, \text{ tj. } \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right),$$

i zamenom oznake indeksa  $k$  sa  $j$  radi saobražnosti sa (183), konačno

dobija oblik:

$$\left[ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right]. \quad (187)$$

Izrazima (183) i (187) određeni su parcijalni izvodi brzina  $\vec{v}_i = \vec{v}_i(q_j, \dot{q}_j)$  po nezavisnim promenljivim  $q_j$  i  $\dot{q}_j$  preko odgovarajućih izvoda vektora položaja  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j)$ .

Pređimo sada na određivanje generalisanih sila inercije.

Kao i u svim do sada razmatranim slučajevima generalisane sile inercije  $Q_j^{in}$ , mogu se odrediti iz EVR sila inercije  $\vec{F}_i^{in}$  na proizvoljnom EVP materijalnog sistema u bilo kom trenutku  $t$ :

$$\delta A^{in} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{in} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (-m_i \cdot \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i \quad (188)$$

Vodeći računa da je:

$$\sum_{i=1}^N (-m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$$

koriste se  
pravila  
na str. 23  
za dvostruke  
sume!!!

$$\text{tj. } \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = - \sum_{j=1}^n \delta \dot{q}_j \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \Rightarrow \left[ - \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = - \sum_{j=1}^n \delta \dot{q}_j \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \quad (189)$$

i zamenom (189) u (188) dobije se EVR sila inercije u obliku.

$$\delta A^{in} = - \sum_{j=1}^n \delta \dot{q}_j \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (190)$$

Kako je EVR odgovarajućih sila, generalno, rad generalisanih sila tog sistema sila na elementarnim virtuelnim promenama,  $\delta q_j$ , generalisanih koordinata  $q_j$  materijalnog sistema u trenutku  $t$ , to i za sistem inercijalnih sila,  $\vec{F}_i^{in}$  važi:

$$\delta A^{in} = \sum_{j=1}^n Q_j^{in} \delta q_j, \quad Q_j^{in} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{in} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (191)$$

Poređenjem (190) i (191) sledi da su generalisane sile inercije određene izrazima:

$$\left[ Q_j^{in} = - \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \quad j=1, 2, \dots, n \quad (192)$$

Dalja transformacija izraza (192) za  $Q_j^{in}$  sledi iz činjenice da se opšti član sume u (192):

$$\begin{aligned}
 m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{d}{dt} \left( m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad \begin{matrix} (183) \\ (187) \end{matrix} \\
 &= \frac{d}{dt} \left( m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \begin{matrix} \text{korisćeno} \\ \frac{d\vec{a} \cdot \vec{b}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \\ \vec{a} = \vec{v}_i, \vec{b} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \end{matrix} \\
 &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \quad \begin{matrix} \text{korisćeno:} \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (v_i^2) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = 2 \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (v_i^2) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = 2 \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

tj. da je:

$$\left[ m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial E_{ki}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_{ki}}{\partial \dot{q}_j} \right] \quad (193)$$

gde je:  $E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$  - kinetička energija tačke  $M_i$  materijalnog sistema ( $E_{ki}$  ili  $T_i$ )

Zamenom (193) u (192) dobija se:

$$Q_j^m = - \sum_{i=1}^N \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial E_{ki}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_{ki}}{\partial \dot{q}_j} \right) = - \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{i=1}^N E_{ki} \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N E_{ki} \right],$$

odnosno:

$$\left[ Q_j^m = - \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right] \right], \quad (194)$$

gde je:

$$E_k = \sum_{i=1}^N E_{ki} \quad \text{kinetička energija materijalnog sistema} \quad (E_k \rightarrow T) \quad (195)$$

## Opšta jednačina dinamike - Lagranž-Dalamberov princip virtuelnih pomeranja

Teorema. - Kretanje materijalnog sistema po idealnim, održavajućim vezama zadovoljava jednačinu.

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^{in}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (196)$$

Dokaz.

Kretanje tačka  $M_i$  vezanog materijalnog sistema opisano je drugim Njutnovim zakonom:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^a + \vec{N}_i, \quad i=1..N \quad (197)$$

odnosno jednačinama Dalamberovog principa:

$$\vec{F}_i^a + \vec{N}_i + \vec{F}_i^{in} = 0, \quad i=1..N \quad (198)$$

gde su kao i do sada  $\vec{N}_i$  rezultant<sup>(reakcija)</sup> idealnih, zadržavajućih, spoljašnjih i unutrašnjih, veza. Skalarnim množenjem levik i desnik strana jednačina (198) odgovarajućim vektorom virtuelnog pomeraња  $\delta \vec{r}_i$  i njihovim sabiranjem, dobija se do jednačine:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_{ri}^a + \vec{N}_i + \vec{F}_{i1}^m) \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

odnosno:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_{ri}^a + \vec{F}_{i1}^m) \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{N}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (199)$$

U slučaju idealnih, zadržavajućih veza, kako je to pokazano na primeru idealnih, geometrijskih, stacionarnih, zadržavajućih veza, EVR reakcija takvih veza,  $\vec{R}_i = \vec{N}_i$ , na proizvoljnom EVP materijalnog sistema u bilo kom trenutku  $t$ , jednak je nuli, tj. važi (119), pa jednačina (199) dobija oblik (196)

$$\boxed{\sum_{i=1}^N (\vec{F}_{ri}^a + \vec{F}_{i1}^m) \cdot \delta \vec{r}_i = 0} \quad (196)$$

Jednačina (196) naziva se opšta jednačina dinamike. Ova jednačina izražava činjenicu da je pri proizvoljnom EVP materijalnog sistema po ~~isto~~ idealnim, zadržavajućim vezama (dakle i po idealnim geometrijskim stacionarnim, zadržavajućim vezama), zbir EVR svih aktivnih sila i njima pridodatih sila inercije na tom EVP materijalnog sistema, jednak nuli.

U slučaju kada veze nisu idealne, a materijalni sistem nije neizmennyj (sadrži opruge kao veze), EVR sila trenja i sila u oprugama na uočnom EVP materijalnog sistema po vezama pridobija se EVR-u aktivnih sila.

S druge strane, kako je prema ( ) i ( ) :

$$\delta' A^a = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ri}^a \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j^a \cdot \delta \vec{r}_j; \quad \delta' A^m = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i1}^m \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j^m \cdot \delta \vec{r}_j$$

to se opšta jednačina dinamike (196) može dati u obliku:

$$\boxed{\sum_{j=1}^n (Q_j^a + Q_j^m) \cdot \delta \vec{r}_j = 0} \quad (200)$$

U slučaju kada je kretanje MS-a ograničeno geometrijskim zadržavajućim vezama, a  $\delta \dot{q}_j, j=1..n$  predstavljaju varijacije generalisanih koordinata  $q_j, j=1,2..n$  materijalnog sistema, dakle, međusobno nezavisne veličine, jednačina (200) biće prema (1) zadovoljena samo ako je koeficijent uz svako  $\delta \dot{q}_j$  u njoj, jednak nuli, tj. ako važi:

$$\boxed{Q_j^a + Q_j^{in} = 0} \quad j=1,2..n \quad (201)$$

Sistem od  $n$  jednačina (201) je ekvivalentan opštoj jednačini dinamike (196), odnosno, opštoj jednačini dinamike u generalisanim koordinatama (200), a za MS čije je kretanje ograničeno geometrijskim zadržavajućim vezama. Ovakav oblik jednačina pogodan je za određivanje kretanja navedenih materijalnih sistema, tj. funkcija  $q_j = q_j(t), j=1,2..n$ , za poznate početne uslove:  $q_{j0} = q_j(t_0)$  i  $\dot{q}_{j0} = \dot{q}_j(t_0)$ , a u slučaju kada su geometrijske zadržavajuće veze idealne. Ovo zbog toga što jednačine (201) tada ne sadrže generalisane reakcije veza.

### Lagranževe jednačine druge vrste

Za materijalni sistem čije je kretanje ograničeno geometrijskim zadržavajućim vezama, u prostoru generalisanih koordinata  $q_j, j=1..n$ , tog materijalnog sistema, važe jednačine (201), u kojima su generalisane sile inercije date izrazima (194):

$$Q_j^{in} = - \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} \right].$$

Zamenom (194) u (201) dobija se sistem jednačina:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j^a} \quad j=1..n \quad (202)$$

Jednačine (202) nazivaju se Lagranževe jednačine druge vrste, za MS čije kretanje ograničeno geometrijskim zadržavajućim vezama.

Potrebno je još jednom naglasiti da je kretanje posmatrane klase materijalnih sistema opisano sa  $n$  Lagranževih jednačina druge vrste (202), gde je  $n$  broj stepeni slobode posmatranog materijalnog sistema, kao i da u jednačinama (202) ne figurišu generalisane reakcije veza, ako su veze idealne. U slučaju da je materijalni sistem izmenljiv, kao i da se kreće po realnim vezama, generalisane sile u oprugama i generalisane sile trenja potrebno je pridružiti generalisanim aktivnim silama.

Prednost jednačina (202) u odnosu na druge metode i jednačine kretanja materijalnih sistema, ogleda se i u tome što broj ovih jednačina ne zavisi od broja materijalnih tačaka, odnosno tela posmatranog materijalnog sistema, već isključivo o broju stepeni slobode MS.

Specijalno, u slučaju MS-a koji su ovde razmatrani, tj. materijalni sistemi čije je kretanje ograničeno geometrijskim, stacionarnim, zadržavajućim vezama, brzine tačaka  $M_i$  tog sistema su date sa (69):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i(\dot{q}_j, \dot{q}_k) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \vec{C}_j(i),$$

tj. ne zavise eksplicitno od vremena, s obzirom da ni vektori položaja tih tačaka ne zavise eksplicitno od vremena:  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j)$ .

Ovo ima za posledicu da kinetička energija ovih materijalnih sistema:

$$E_k = \sum_{i=1}^N E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i,$$

predstavlja kvadratnu formu generalisanih generalisanih brzina

$$\dot{q}_j, j=1 \dots n.$$

Naravno, kinetička energija sistema je:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \vec{C}_j(i) \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \vec{C}_k(i) \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_i \vec{C}_j(i) \cdot \vec{C}_k(i) \dot{q}_j \dot{q}_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{C}_j(i) \cdot \vec{C}_k(i)}_{\vec{v}_i} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \dot{q}_j \dot{q}_k \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{C}_j(i) \cdot \vec{C}_k(i) \right) \quad (203)$$

i' uvođenjem koeficijenta inercije: u (203):

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{c}_{j(i)} \cdot \vec{c}_{k(i)} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (204)$$

može se napisati u obliku:

$$\boxed{E_k(q_r, \dot{q}_r) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k} \quad a_{jk}, r = 1, 2, \dots, n \quad (205)$$

Kako su koeficijenti inercije funkcija generalisanih koordinata  $q_j, j=1, n$ , to je prema (205) i kinetička energija MS čije je kretanje ograničeno GSZ-vezama funkcija i generalisanih koordinata i generalisanih brzina na kvadratni način.

Za  $n=2$  izraz za  $E_k$  prema (205) glasi:

$$E_k(q_j, \dot{q}_j) = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_1 + a_{22} \dot{q}_2^2)$$

Takođe, koeficijenti inercije  $a_{jk}$ , kao koeficijenti kvadratne forme kinetičke energije materijalnog sistema, su simetrični u odnosu na svoje indekse:  $a_{jk} = a_{kj}$ . Priroda ovih koeficijenata zavisi od prirode generalisanih koordinata  $q_j$  i  $q_k$ , tj. generalisanih brzina  $\dot{q}_j$  i  $\dot{q}_k$  koje množe koeficijent inercije  $a_{jk}$ .

Npr., ako gen. koordinate  $q_j$  i  $q_k$  predstavljaju linearno pomeranje, veličina  $a_{jk}$  ima dimenziju mase; ako su  $q_j$  i  $q_k$  ugaone koordinate, veličina  $a_{jk}$  ima dimenziju momenta inercije; ako je jedna koordinata ugaona, a druga linearno pomeranje, veličina  $a_{jk}$  ima dimenziju linearnog statičkog momenta mase.

U slučaju MS-a čije je kretanje ograničeno geometrijskim nestacionarnim zadržavajućim vezama kinetička energija ima oblik:

$$E_k = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k}_{E_{K2}} + \underbrace{\sum_{j=1}^n b_j \dot{q}_j}_{E_{K1}} + \underbrace{\frac{1}{2} b_0}_{E_{K0}}.$$

$$E_k = E_k(t, q_j, \dot{q}_j) \quad (202)$$

Dogrančene jednačine druge vrste važe i za sisteme krutih tela na GSZ-vezama, pri čemu je kinetička energija takvih sistema određena kao zbir kinetičkih energija krutih tela i pri čemu važe sve napomene i stavovi o određivanju generalisanih sila, tako aktivnih sila, tako i reakcija veza.