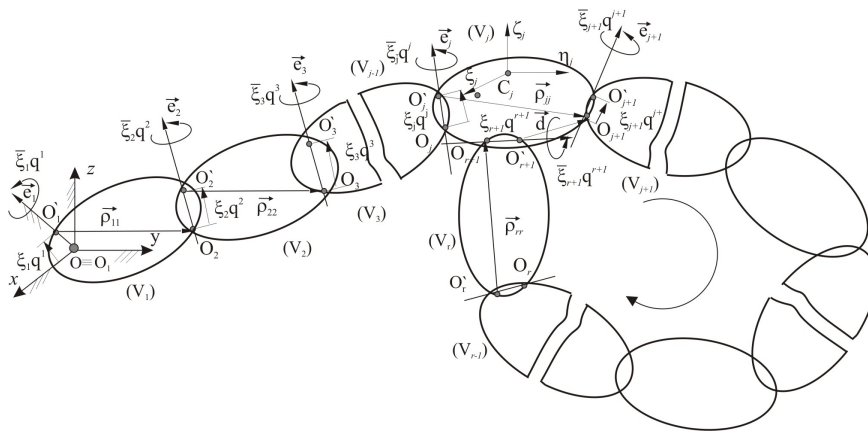


11. Robotski sistem u obliku zatvorenog kinematičkog lanca i lanca sa grananjem

11.1 Zatvoreni kinematički lanac

Razmotrimo zatvoreni kinematički lanac (sl.11.1) sa r krutih segmenata, [29-34]. Relativno kretanje segmenta (V_α) u odnosu na segment ($V_{\alpha-1}$) određeno je koordinatom q^α čija je pozitivna orijentacija definisana vektorom \bar{e}_α (vidi [41]). Izuzetak od ovog pravila u redosledu odnosi se na segment (V_j) - taj segment vrši relativno kretanje i u odnosu na segment (V_r). Osa u odnosu na koju segment (V_j) vrši translatorno (obrotno) kretanje u odnosu na (V_r) orijentisana je vektorom \bar{e}_{r+1} . Deo mehaničkog sistema koji se nalazi povezan u zatvoreni kinematički lanac orijentisan je kružnom strelicom (vidi sl.11.1) koja označava u odnosu na koje kruto telo posmatrano telo vrši relativno kretanje: U tom delu mehaničkog sistema prenosno kretanje vrši prvo telo na koje se nailazi pri kretanju od posmatranog tela u smeru suprotnom od smera pomenute kružne strelice.

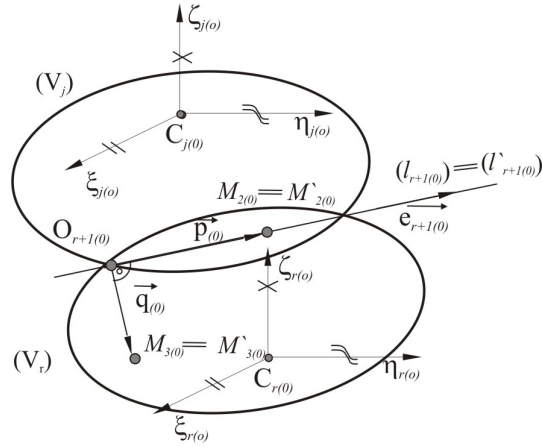


Slika. 11.1

Neka se posmatrani kinematički lanac nalazi u referentnoj konfiguraciji. Uočimo na telu (V_r) tri tačke M_1, M_2 i M_3 a na telu (V_j) takođe tri tačke M'_1, M'_2 i M'_3 , pri čemu važi (oznaka (0) odnosi se na referentnu konfiguraciju)

$$M_{\alpha(0)} = M'_{\alpha(0)}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

i osim toga (vidi sl. 11.2)



Slika. 11.2

$$\begin{aligned} M_{1(0)} &= O_{r+1(0)}, \\ M_{1(0)}, M_{2(0)} &\in (l_{r+1})_{(0)}, \\ M'_{1(0)}, M'_{2(0)} &\in (l'_{r+1})_{(0)}, \end{aligned} \quad (11.1)$$

gde je (l_{r+1}) osa zgloba koji povezuje (V_j) i (V_r) , pri čemu je očigledno da važi

$$(l_{r+1})_{(0)} \equiv (l'_{r+1})_{(0)}. \quad (11.2)$$

Neka, osim toga, važi i

$$\overline{M_{1(0)}M_{3(0)}} \perp \overline{M_{1(0)}M_{2(0)}}. \quad (11.3)$$

Za „otvoren” lanac (konfiguracija u odsustvu zgloba $r+1$) uvodimo vektore

$$\begin{aligned} \overline{M_1M_2} &= \vec{p}, & \overline{M'_1M'_2} &= \vec{p}', \\ \overline{M_1M_3} &= \vec{q}, & \overline{M'_1M'_3} &= \vec{q}', \end{aligned} \quad (11.4)$$

pri čemu je

$$|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{p}'| = |\vec{q}'| = 1, \quad \vec{p} = \vec{e}_{r+1}. \quad (11.5)$$

U toj konfiguraciji biće očigledno ispunjeni uslovi (u prvoj fazi razmatranja pretpostavićemo da segmenti (V_j) i (V_r) mogu da zauzmu položaj kao da zgloba $r+1$ nema, pa se, u drugoj fazi, postavljaju uslovi kojima praktično ponovo “zatvaramo” lanac – ovi uslovi biće iskazani jednačinama veza):

$$\bar{p} \perp \bar{q}, \quad \bar{p}' \perp \bar{q}' \quad (11.6)$$

Takođe važi ($\bar{r}'_\alpha = \overline{OM'_\alpha}$, $\bar{r}_\alpha = \overline{OM_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$):

$$\bar{r}'_\alpha = \bar{r}'_\alpha(q^1, \dots, q^j), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (11.7)$$

$$\bar{r}_\alpha = \bar{r}_\alpha(q^1, \dots, q^r), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (11.8)$$

11.1.1 Slučaj kada segmente (V_r) i (V_j) povezuje prizmatični zglob

Razmotrimo slučaj kada segmente (V_r) i (V_j) povezuje prizmatični zglob. Iz uslova koje nameće pravolinijsko translatorno kretanje segmenta (V_j) u odnosu na segment (V_r) (dakle, lanac se ponovo “zatvara”)

$$\bar{r}_\alpha + \bar{e}_{r+1} q^{r+1} = \bar{r}'_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (11.9)$$

sledi

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \bar{r}'_2 - \bar{r}'_1 \Rightarrow \bar{p} = \bar{p}', \quad (11.10)$$

$$\bar{r}_3 - \bar{r}_1 = \bar{r}'_3 - \bar{r}'_1 \Rightarrow \bar{q} = \bar{q}'. \quad (11.11)$$

Imajući u vidu da je

$$\bar{r}_1 = \bar{r}'_1 + \bar{d} + \sum_{k=j+1}^r \bar{\rho}_{kk} + \xi_k \bar{e}_k q^k, \quad (11.12)$$

ili, prema prvoj relaciji u (11.9),

$$\bar{d} + \bar{e}_{r+1} q^{r+1} + \sum_{k=j+1}^r \bar{\rho}_{kk} + \xi_k \bar{e}_k q^k = 0, \quad (11.13)$$

umesto (11.9) moguće je napisati sledeći skup relacija

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \bar{p}', \\ \bar{q} &= \bar{q}', \end{aligned} \quad (11.14)$$

$$\sum_{k=j+1}^r \bar{\rho}_{kk} + \xi_k \bar{e}_k q^k + \bar{d} + \bar{e}_{r+1} q^{r+1} = 0,$$

koje predstavljaju jednačine veza (uslova zatvaranja kinematičkog lanca) u vektorskom obliku. Prve dve relacije u (11.14) povlače za sobom i ovu očiglednu posledicu

$$\bar{r} = \bar{r}', \quad (11.15)$$

gde je

$$\bar{r} = \bar{p} \times \bar{q}, \quad \bar{r}' = \bar{p}' \times \bar{q}'. \quad (11.16)$$

Mehanika robota

Relacije (11.14) daju 9 skalarnih jednačina koje ne predstavljaju skup nezavisnih jednačina. Iz prve relacije (11.14) sledi

$$[A_{j,r}]\{\bar{p}^{(r)}\} = \{\bar{p}^{(j)}\}, \quad (11.17)$$

odakle, uzimajući u obzir da važi

$$\{\bar{p}^{(r)}\} = \{\bar{p}^{(j)}\} = \{\bar{p}_{(0)}\}, \quad (11.18)$$

dobijamo

$$[A_{j,r}]\{\bar{p}_{(0)}\} = \{\bar{p}_{(0)}\}. \quad (11.19)$$

Potpuno analogno, iz druge jednačine u (11.14) i (11.15) sledi, respektivno,

$$\begin{aligned} [A_{j,r}]\{\bar{q}_{(0)}\} &= \{\bar{q}_{(0)}\}, \\ [A_{j,r}]\{\bar{r}_{(0)}\} &= \{\bar{r}_{(0)}\}. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Prema (11.5) sledi

$$\{\bar{p}_{(0)}\} = \{\bar{e}_{r+1}^{(r+1)}\}, \quad (11.21)$$

a iz (11.19):

$$\begin{aligned} (\bar{p}_{(0)})[A_{j,r}]\{\bar{p}_{(0)}\} &= 1, \\ (\bar{q}_{(0)})[A_{j,r}]\{\bar{p}_{(0)}\} &= 0, \\ (\bar{r}_{(0)})[A_{j,r}]\{\bar{p}_{(0)}\} &= 0, \end{aligned} \quad (11.22)$$

gde je (vidi (11.16))

$$\bar{r}_{(0)} = \bar{p}_{(0)} \times \bar{q}_{(0)}. \quad (11.23)$$

Na potpuno analogan način iz (11.20) dobijamo i

$$\begin{aligned} (\bar{p}_{(0)})[A_{j,r}]\{\bar{q}_{(0)}\} &= 1, \\ (\bar{q}_{(0)})[A_{j,r}]\{\bar{q}_{(0)}\} &= 0, \\ (\bar{r}_{(0)})[A_{j,r}]\{\bar{q}_{(0)}\} &= 0, \end{aligned} \quad (11.24)$$

i

$$\begin{aligned} (\bar{p}_{(0)})[A_{j,r}]\{\bar{r}_{(0)}\} &= 1, \\ (\bar{q}_{(0)})[A_{j,r}]\{\bar{r}_{(0)}\} &= 0, \\ (\bar{r}_{(0)})[A_{j,r}]\{\bar{r}_{(0)}\} &= 0, \end{aligned} \quad (11.25)$$

Izrazi (11.22), (11.24) i (11.25) mogu da se napišu i u obliku

$$\begin{bmatrix} (\vec{p}_{(0)}) \\ (\vec{q}_{(0)}) \\ (\vec{r}_{(0)}) \end{bmatrix} [A_{j,r}] [\{\vec{p}_{(0)}\} : \{\vec{q}_{(0)}\} : \{\vec{r}_{(0)}\}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11.26)$$

ili

$$[\gamma] [A_{j,r}] [\gamma]^T = [I], \quad (11.27)$$

gde je

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} (\vec{p}_{(0)}) \\ (\vec{q}_{(0)}) \\ (\vec{r}_{(0)}) \end{bmatrix}, \quad [\gamma]^T = [\gamma]^{-1}, \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.28)$$

Iz (11.27) neposredno sledi

$$[A_{j,r}] = [I] \Rightarrow [\alpha_{\alpha\beta}^{j,r}] = [I], \quad (11.29)$$

ili

$$\alpha_{\alpha\beta}^{j,r} (q^{j+1}, q^{j+2}, \dots, q^r) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (11.30)$$

gde su $\alpha_{\alpha\beta}^{j,r}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) - elementi matrice $[A_{j,r}]$, a $\delta_{\alpha\beta}$ - Kronekerovi simboli za koje važi: $\delta_{\alpha\beta} = 1 \forall \alpha = \beta$; $\delta_{\alpha\beta} = 0 \forall \alpha \neq \beta$. Prema osobini matrice ortogonalnih transformacija sledi

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^3 (\alpha_{\beta\alpha}^{j,r})^2 &\equiv 1, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ \sum_{\beta=1}^3 \alpha_{\beta 1}^{j,r} \alpha_{\beta 2}^{j,r} &\equiv 0, \quad \sum_{\beta=1}^3 \alpha_{\beta 1}^{j,r} \alpha_{\beta 3}^{j,r} \equiv 0, \quad \sum_{\beta=1}^3 \alpha_{\beta 2}^{j,r} \alpha_{\beta 3}^{j,r} \equiv 0, \end{aligned} \quad (11.31)$$

odakle se zaključuje da je iz (11.30) moguće dobiti najviše tri nezavisne jednačine veza.

Drugi skup jednačina veza dobijamo iz poslednjeg izraza u (11.14), nakon eliminacije koordinate q^{r+1} :

$$\begin{aligned} (\vec{q}_{(0)}) \sum_{k=j+1}^r [A_{j,r}] \{ \vec{\rho}_{kk} + \xi_k q^k \vec{e}_k \} + (\vec{q}_{(0)}) \{ \vec{d} \} &= 0, \\ (\vec{r}_{(0)}) \sum_{k=j+1}^r [A_{j,r}] \{ \vec{\rho}_{kk} + \xi_k q^k \vec{e}_k \} + (\vec{r}_{(0)}) \{ \vec{d} \} &= 0. \end{aligned} \quad (11.32)$$

Nezavisne veze nalaze se, dakle, u relacijama (11.30) i (11.32) i ima ih **najviše pet.**

Kinematički oblik jednačina veza dobićemo diferenciranjem po vremenu izraza (11.14). Iz prve dve relacije u (11.14) na taj način dobijamo

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_r \times \bar{p} &= \bar{\omega}_j \times \bar{p}', \\ \bar{\omega}_r \times \bar{q} &= \bar{\omega}_j \times \bar{q}'\end{aligned}\quad (11.33)$$

ili

$$\begin{aligned}(\bar{\omega}_r - \bar{\omega}_j) \times \bar{p} &= 0, \\ (\bar{\omega}_r - \bar{\omega}_j) \times \bar{q} &= 0.\end{aligned}\quad (11.34)$$

Poslednje relacije dovode do očiglednog rezultata (koji se dobija direktno kada se uzme u obzir da segmente (V_r) i (V_j) povezuje prizmatični zglob):

$$(\bar{\omega}_r - \bar{\omega}_j) = 0, \quad (11.35)$$

ili

$$\sum_{k=j+1}^r \bar{e}_k \dot{q}^k = 0, \quad (11.36)$$

što se može napisati u matricnoj obliku

$$\sum_{k=j+1}^r [A_{j,k}] \{\bar{e}_k^{(k)}\} \dot{q}^k = 0, \quad (11.37)$$

ili

$$\begin{aligned}\sum_{k=j+1}^r (\alpha_{11}^{j,k} e_{k1} + \alpha_{12}^{j,k} e_{k2} + \alpha_{13}^{j,k} e_{k3}) \dot{q}^k &= 0, \\ \sum_{k=j+1}^r (\alpha_{21}^{j,k} e_{k1} + \alpha_{22}^{j,k} e_{k2} + \alpha_{23}^{j,k} e_{k3}) \dot{q}^k &= 0, \\ \sum_{k=j+1}^r (\alpha_{31}^{j,k} e_{k1} + \alpha_{32}^{j,k} e_{k2} + \alpha_{33}^{j,k} e_{k3}) \dot{q}^k &= 0,\end{aligned}\quad (11.38)$$

gde je $\alpha_{\alpha\beta}^{j,k}$ - element matrice $[A_{j,k}]$, $e_{k\alpha}$ - element matrice $\{\bar{e}_k^{(k)}\}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Očigledno je da su jednačine veza (11.38) nezavisne ako je

$$\text{rank}[\{\bar{e}_{j+1}^{(j)}\}; \{\bar{e}_{j+2}^{(j)}\}; \dots; \{\bar{e}_r^{(j)}\}] = 3, \quad (11.39)$$

a to će biti ispunjeno ako su tri bilo koja vektora \bar{e}_k ($k = j+1, \dots, r$) nekomplanarna.

Diferenciranjem po vremenu poslednjeg izraza u (11.14) dobijamo

$$\sum_{\alpha=j+1}^r \left[\bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \times \left(\sum_{k=\alpha}^r \bar{\rho}_{kk} + \bar{\xi}_k \bar{e}_k q^k \right) + \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \right] \dot{q}^\alpha + \bar{e}_{r+1} \dot{q}^{r+1} = 0, \quad (11.40)$$

što se, uvodeći vektore (vidi(4.114))

$$\bar{\mathfrak{S}}_{\alpha(r)} = \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \times \left(\sum_{k=\alpha}^r \bar{\rho}_{kk} + \bar{\xi}_k \bar{e}_k q^k \right) + \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha, \quad (11.41)$$

može napisati u obliku

$$\sum_{\alpha=j+1}^r \bar{\mathfrak{S}}_{\alpha(r)} \dot{q}^\alpha + \bar{e}_{r+1} \dot{q}^{r+1} = 0. \quad (11.42)$$

Eliminacijom brzine \dot{q}^{r+1} iz (11.42) dobijamo dve skalarne jednačine

$$\begin{aligned} (\bar{q}_{(0)}) \sum_{\alpha=j+1}^r \{ \bar{\mathfrak{S}}_{\alpha(r)}^{(j)} \} \dot{q}^\alpha &= 0, \\ (\bar{r}_{(0)}) \sum_{\alpha=j+1}^r \{ \bar{\mathfrak{S}}_{\alpha(r)}^{(j)} \} \dot{q}^\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (11.43)$$

Nezavisne veze u kinematičkom obliku nalaze se, dakle, u relacijama (11.38) i (11.43) i ima ih **najviše pet.**

Napomena. Do relacije (11.30) može da se dođe i sledećim razmatranjem. Odaberimo tačku M_3 tako da važi $M_3 \notin (l_{r+1})$. Uzećemo da i dalje važi $M_{3(0)} \equiv M'_{3(0)}$. I u ovom slučaju je $\overline{M_1 M_3} = \bar{q}$, pri čemu je intenzitet vektora \bar{q} proizvoljan. Takođe, i u ovom slučaju važi

$$[A_{j,r}] \{ \bar{q}^{(r)} \} = \{ \bar{q}'^{(j)} \}. \quad (11.44)$$

Uzimajući u obzir da koordinata q^{r+1} određuje kretanje segmenta (V_j) u odnosu na segment (V_r) sledi

$$\{ \bar{q}^{(r)} \} = [A_{r+1}] \{ \bar{q}'^{(j)} \}, \quad (11.45)$$

ili, s obzirom na vrstu zgloba $r+1$:

$$\{ \bar{q}^{(r)} \} = [I] \{ \bar{q}'^{(j)} \}, \quad (11.46)$$

konačno sledi

$$[A_{j,r}] \{ \bar{q}^{(r)} \} = \{ \bar{q}'^{(j)} \}. \quad (11.47)$$

što, s obzirom na proizvoljnost izbora vektora \bar{q} ponovo dovodi do (11.31).

11.1.2 Slučaj kada segmente (V_r) i (V_j) povezuje cilindrični zglob

Razmotrimo slučaj kada kruta tela (V_r) i (V_j) povezuje cilindrični zglob. Iz uslova koje nameće obrtanje krutog tela (V_j) u odnosu na kruto telo (V_r) dobijamo

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= \bar{r}'_1, \\ \bar{r}_2 &= \bar{r}'_2, \\ \bar{r}_3 + \Delta\bar{r}_3 &= \bar{r}'_3,\end{aligned}\tag{11.48}$$

gde je

$$\Delta\bar{r}_3 = \bar{e}_{r+1} \times (\bar{e}_{r+1} \times \bar{q})(1 - \cos q^{r+1}) + \bar{e}_{r+1} \times \bar{q} \sin q^{r+1}.\tag{11.49}$$

Iz (11.48) sledi

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= \bar{r}'_1, \\ \bar{r}_2 - \bar{r}_1 &= \bar{r}'_2 - \bar{r}'_1, \\ \bar{r}_3 - \bar{r}_1 + \Delta\bar{r}_3 &= \bar{r}'_3 - \bar{r}'_1,\end{aligned}\tag{11.50}$$

ili (vidi sl. 11.1)

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \bar{p}', \\ \bar{q} + \bar{e}_{r+1} \times (\bar{e}_{r+1} \times \bar{q})(1 - \cos q^{r+1}) + \bar{e}_{r+1} \times \bar{q} \sin q^{r+1} &= \bar{q}'.\end{aligned}\tag{11.51}$$

Imajući u vidu da je

$$\bar{r}_1 + \bar{d} + \sum_{k=j+1}^r \bar{\rho}_{kk} + \xi_k \bar{e}_k q^k = \bar{r}'_1,\tag{11.52}$$

prema prvoj relaciji u (11.50) dobija se

$$\bar{d} + \sum_{k=j+1}^r \bar{\rho}_{kk} + \xi_k \bar{e}_k q^k = 0.\tag{11.53}$$

Drugi izraz u (11.51), s obzirom na prvi izraz u (11.51) dobija oblik

$$\bar{p} \times \left[\bar{q} + \bar{e}_{r+1} \times (\bar{e}_{r+1} \times \bar{q})(1 - \cos q^{r+1}) + \bar{e}_{r+1} \times \bar{q} \sin q^{r+1} \right] = \bar{p}' \times \bar{q}',\tag{11.54}$$

ili

$$\bar{r} + \bar{e}_{r+1} \times (\bar{e}_{r+1} \times \bar{r})(1 - \cos q^{r+1}) + \bar{e}_{r+1} \times \bar{r} \sin q^{r+1} = \bar{r}',\tag{11.55}$$

pri čemu treba imati u vidu da je $\bar{e}_{r+1} = \bar{p}$. S obzirom na ovu relaciju i relacije (11.51) i (11.52), sledi

$$\begin{aligned}
 \bar{p} &= \bar{p}', \\
 \bar{q} + \bar{p} \times (\bar{p} \times \bar{q})(1 - \cos q^{r+1}) + \bar{p} \times \bar{q} \sin q^{r+1} &= \bar{q}', \\
 \bar{r} + \bar{p} \times (\bar{p} \times \bar{r})(1 - \cos q^{r+1}) + \bar{p} \times \bar{r} \sin q^{r+1} &= \bar{r}', \\
 \sum_{k=j+1}^r \bar{\rho}_{kk} + \xi_k \bar{e}_k q^k + \bar{d} &= 0.
 \end{aligned} \tag{11.56}$$

Prva tri izraza u (11.56) u matricnoj formi glase

$$\begin{aligned}
 [A_{j,r}] \{\bar{p}^{(r)}\} &= \{\bar{p}^{(j)}\}, \\
 \{\bar{q}^{(r)}\} &= [A_{j,r}] \{\bar{q}^{(j)}\}, \\
 \{\bar{r}^{(r)}\} &= [A_{j,r}] \{\bar{r}^{(j)}\},
 \end{aligned} \tag{11.57}$$

gde je uzeto u obzir da važi

$$\begin{aligned}
 \{\bar{q}^{(r)}\} &= \{\bar{q}^{(j)}\}, \\
 \{\bar{r}^{(r)}\} &= \{\bar{r}^{(j)}\},
 \end{aligned} \tag{11.58}$$

i gde je

$$[A_{r+1}] = [I] + [p_{(0)}^d]^2 - [p_{(0)}^d] \cos q^{r+1} + [p_{(0)}^d] \sin q^{r+1}. \tag{11.59}$$

Uzimajući u obzir da važi

$$\begin{aligned}
 \{\bar{p}^{(r)}\} &= \{\bar{p}^{(j)}\} = \{\bar{p}_{(0)}\}, \\
 \{\bar{q}^{(j)}\} &= [A_{j,r}] \{\bar{q}^{(r)}\}, \{\bar{q}^{(j)}\} = \{\bar{q}_{(0)}\}, \\
 \{\bar{r}^{(j)}\} &= [A_{j,r}] \{\bar{r}^{(r)}\}, \{\bar{r}^{(j)}\} = \{\bar{r}_{(0)}\}
 \end{aligned} \tag{11.60}$$

sledi da prva tri izraza u (11.56) možemo da dovedemo na oblik

$$\begin{aligned}
 [A_{j,r}] \{\bar{p}_{(0)}\} &= \{\bar{p}_{(0)}\}, \\
 [A_{j,r+1}] \{\bar{q}_{(0)}\} &= \{\bar{q}_{(0)}\}, \\
 [A_{j,r+1}] \{\bar{r}_{(0)}\} &= \{\bar{r}_{(0)}\},
 \end{aligned} \tag{11.61}$$

ili

$$\begin{aligned}
 [A_{j,r}]^T \{\bar{p}_{(0)}\} &= \{\bar{p}_{(0)}\}, \\
 [A_{j,r}]^T \{\bar{q}_{(0)}\} &= [A_{r+1}] \{\bar{q}_{(0)}\}, \\
 [A_{j,r}]^T \{\bar{r}_{(0)}\} &= [A_{r+1}] \{\bar{r}_{(0)}\}.
 \end{aligned} \tag{11.62}$$

Uzimajući u obzir da važi

$$[A_{r+1}]\{\bar{p}_{(0)}\} = \{\bar{p}_{(0)}\}, \quad (11.63)$$

relacije (11.62) mogu da se napišu u obliku

$$[A_{j,r}]^T [\{\bar{p}_{(0)}\}; \{\bar{q}_{(0)}\}; \{\bar{r}_{(0)}\}] = [A_{r+1}] [\{\bar{p}_{(0)}\}; \{\bar{q}_{(0)}\}; \{\bar{r}_{(0)}\}], \quad (11.64)$$

ili (vidi (11.29))

$$[A_{j,r}]^T [\gamma]^T = [A_{r+1}][\gamma]^T, \quad (11.65)$$

odakle se, uzimajući u obzir da $[\gamma]$ predstavlja matricu ortogonalnih transformacija, lako dobija relacija

$$[A_{j,r+1}] = [I], \quad (11.66)$$

gde je

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.67)$$

Otuda, dolazimo do zaključka da u skupu od devet veza (11.66) najviše tri su nezavisne. Lako se pokazuje da bar u jednoj od te tri veze figuriše koordinata q^{r+1} . Isključivanjem te koordinate iz tih veza ili isključivanjem veze u kojoj figuriše ta koordinata (ako figuriše u samo jednoj vezi) ostaju dve veze kao moguće nezavisne.

Oblik veza pogodan za eliminaciju koordinate q^{r+1} dobija se narednim razmatranjem. Matrična relacija (11.65) pomnožena sa leve strane matricom $[\gamma]$ daje izraz

$$[\gamma][A_{j,r}]^T [\gamma]^T = [\gamma][A_{r+1}][\gamma]^T, \quad (11.68)$$

koji dovodi do sledećih relacija

$$\begin{aligned}
 (\bar{p}_{(0)})[A_{j,r}]^T \{\bar{p}_{(0)}\} &= 1, \\
 (\bar{q}_{(0)})[A_{j,r}]^T \{\bar{p}_{(0)}\} &= 0, \\
 (\bar{r}_{(0)})[A_{j,r}]^T \{\bar{p}_{(0)}\} &= 0, \\
 (\bar{p}_{(0)})[A_{j,r}]^T \{\bar{q}_{(0)}\} &= 0, \\
 (\bar{q}_{(0)})[A_{j,r}]^T \{\bar{q}_{(0)}\} &= \cos q^{r+1}, \\
 (\bar{r}_{(0)})[A_{j,r}]^T \{\bar{q}_{(0)}\} &= \sin q^{r+1}, \\
 (\bar{p}_{(0)})[A_{j,r}]^T \{\bar{r}_{(0)}\} &= 0, \\
 (\bar{q}_{(0)})[A_{j,r}]^T \{\bar{r}_{(0)}\} &= -\sin q^{r+1}, \\
 (\bar{r}_{(0)})[A_{j,r}]^T \{\bar{r}_{(0)}\} &= \cos q^{r+1}.
 \end{aligned} \tag{11.69}$$

Ako uvedemo sledeću matricu ortogonalnih transformacija

$$[D] = [\gamma][A_{j,r}]^T [\gamma]^T, \tag{11.70}$$

gde je

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11}^{j,r} & \delta_{12}^{j,r} & \delta_{13}^{j,r} \\ \delta_{21}^{j,r} & \delta_{22}^{j,r} & \delta_{23}^{j,r} \\ \delta_{31}^{j,r} & \delta_{32}^{j,r} & \delta_{33}^{j,r} \end{bmatrix}, \delta_{\alpha\beta}^{j,r} = \delta_{\alpha\beta}^{j,r}(q^{j+1}, \dots, q^r), \alpha, \beta = 1, 2, 3, \tag{11.71}$$

relacije (11.59) dobijaju oblik

$$\begin{aligned}
 \delta_{11}^{j,r}(q^{j+1}, \dots, q^r) &= 1, \\
 \delta_{12}^{j,r}(q^{j+1}, \dots, q^r) &= 0, \\
 \delta_{13}^{j,r}(q^{j+1}, \dots, q^r) &= 0, \\
 \delta_{21}^{j,r}(q^{j+1}, \dots, q^r) &= 0, \\
 \delta_{22}^{j,r}(q^{j+1}, \dots, q^r) &= \cos q^{r+1}, \\
 \delta_{23}^{j,r}(q^{j+1}, \dots, q^r) &= -\sin q^{r+1}, \\
 \delta_{31}^{j,r}(q^{j+1}, \dots, q^r) &= 0, \\
 \delta_{32}^{j,r}(q^{j+1}, \dots, q^r) &= \sin q^{r+1}, \\
 \delta_{33}^{j,r}(q^{j+1}, \dots, q^r) &= \cos q^{r+1}.
 \end{aligned} \tag{11.72}$$

Mehanika robota

U skupu od devet veza (11.72) najviše tri su nezavisne. Pokazuje da bar u jednoj od te tri veze figuriše koordinata q^{r+1} . Isključivanjem te koordinate, kako je već rečeno, iz tih veza ili isključivanjem veze u kojoj figuriše ta koordinata (ako figuriše u samo jednoj vezi) ostaju dve veze kao moguće nezavisne.

Dalje, iz poslednje relacije u (11.56) dobijaju se kao moguće nezavisne veze sledeći izrazi

$$\begin{aligned} (\vec{p}_{(0)}) \sum_{k=j+1}^r [A_{j,k}] \{ \vec{\rho}_{kk}^{(k)} + \xi_k q^k \vec{e}_k^{(k)} \} + (\vec{p}_{(0)}) \{ \vec{d} \} &= 0, \\ (\vec{q}_{(0)}) \sum_{k=j+1}^r [A_{j,k}] \{ \vec{\rho}_{kk}^{(k)} + \xi_k q^k \vec{e}_k^{(k)} \} + (\vec{q}_{(0)}) \{ \vec{d} \} &= 0, \\ (\vec{r}_{(0)}) \sum_{k=j+1}^r [A_{j,k}] \{ \vec{\rho}_{kk}^{(k)} + \xi_k q^k \vec{e}_k^{(k)} \} + (\vec{r}_{(0)}) \{ \vec{d} \} &= 0. \end{aligned} \quad (11.73)$$

Na taj način skup nezavisnih veza nalazi se u (11.72) i (11.73) a ima ih najviše *pet*.

4) Kinematički oblik jednačina veza dobiće se diferenciranjem prve i četvrte relacije u (11.56) po vremenu (umesto prve relacija u (11.56) može da se iskoristi ili druga ili trća relacija). Diferenciranjem prve relacije u (11.56) dobija se

$$\vec{\omega}_r \times \vec{p} = \vec{\omega}_j \times \vec{p}' \quad (11.74)$$

ili

$$(\vec{\omega}_r - \vec{\omega}_j) \times \vec{p}' = 0 \quad (11.75)$$

odakle je

$$\vec{\omega}_r - \vec{\omega}_j = \lambda \vec{p}' \quad (11.76)$$

tj.

$$\sum_{k=j+1}^r \vec{e}_k \dot{q}^k = \lambda \vec{p}', \quad (11.77)$$

što dovodi do relacija

$$\begin{aligned} (\vec{q}_{(0)}) \sum_{k=j+1}^r [A_{j,k}] \{ \vec{e}_k^{(k)} \} \dot{q}^k &= 0, \\ (\vec{r}_{(0)}) \sum_{k=j+1}^r [A_{j,k}] \{ \vec{e}_k^{(k)} \} \dot{q}^k &= 0. \end{aligned} \quad (11.78)$$

Ako razložimo vektore \bar{e}_k ($k = j+1, \dots, r$) na komponentu \bar{e}_k upravne na \bar{e}_{r+1} i komponentu $\mu \bar{p}$ kolinearne sa \bar{p}' ($\bar{p} = \bar{p}'$), gde je

$$\bar{e}_k = (\bar{q}' \cdot \bar{e}_k) \bar{q}' + (\bar{r}' \cdot \bar{e}_k) \bar{r}', \mu = (\bar{p}' \cdot \bar{e}_k), \quad (11.79)$$

izraze (11.77) možemo da napišemo u obliku u kome je eliminisana generalisana brzina \dot{q}^{r+1} :

$$\sum_{k=j+1}^r \bar{e}_k \dot{q}^k = 0, \quad (11.80)$$

odakle sledi da će (11.78) biti nezavisne ako su ma koja dva vektora \bar{e}_k ($k = j+1, \dots, r$) nekolinearna.

Diferenciranjem četvrtog izraza u (11.56) po vremenu dobijamo (vidi slučaj prizmatičnog zgloba)

$$\sum_{\alpha=j+1}^r \left[\bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \times \left(\sum_{k=\alpha}^r \bar{\rho}_{kk} + \bar{\xi}_k \bar{e}_k \dot{q}^k \right) + \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \right] \dot{q}^\alpha = 0, \quad (11.81)$$

ili (vidi i (11.41))

$$\sum_{\alpha=j+1}^r \bar{\mathfrak{S}}_{\alpha(r)} \dot{q}^\alpha = 0, \quad (11.82)$$

odakle sledi da će sledeće tri skalarne jednačine koje se dobijaju iz (11.82) biti nezavisne ako su tri bilo koja vektora $\bar{\mathfrak{S}}_{\alpha(r)}$ ($\alpha = j+1, \dots, r$) nekomplanarna.

Relacija (11.82) može da se napiše i u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} (\bar{p}_{(0)}) \sum_{\alpha=j+1}^r \{ \bar{\mathfrak{S}}_{\alpha(r)}^{(j)} \} \dot{q}^\alpha &= 0, \\ (\bar{q}_{(0)}) \sum_{\alpha=j+1}^r \{ \bar{\mathfrak{S}}_{\alpha(r)}^{(j)} \} \dot{q}^\alpha &= 0, \\ (\bar{r}_{(0)}) \sum_{\alpha=j+1}^r \{ \bar{\mathfrak{S}}_{\alpha(r)}^{(j)} \} \dot{q}^\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (11.83)$$

Dakle, skup jednačina veza dat je relacijama (11.78) i (11.83) a nezavisnih ima najviše *pet*.