Универзитет у Београду

Машински факултет

Механика робота

Вежбе - дванаеста недеља

Београд, 2023.
ℕℝ

Кристофелови симболи прве врсте

ПРВИ НАЧИН

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}}\right)$$

ДРУГИ НАЧИН

$$\boxed{\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \sum_{i=sup(\beta,\gamma)}^{n} m_i \bar{\xi}_{\alpha}\left(\vec{e}_{\alpha} \times \overrightarrow{T}_{\beta_{(i)}}\right)\left\{\overrightarrow{T}_{\gamma_{(i)}}\right\} + \bar{\xi}_{\alpha}\bar{\xi}_{\beta}\bar{\xi}_{\gamma}\left(\vec{e}^{(i)}_{\beta\gamma}\right)\left[\Pi^{(i)}_{c_i}\right]\left\{\vec{e}^{(i)}_{\alpha}\right\}}$$

Задатак 16: Кристофелов симбол прве врсте $\Gamma_{12,1}$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12,1} &= \sum_{i=sup(2,1)}^{3} m_i \bar{\xi}_1\left(\vec{e}_1 \times \overrightarrow{T}_{2_{(i)}}\right)\left\{\overrightarrow{T}_{1_{(i)}}\right\} + \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\bar{\xi}_1\left(\vec{e}^{(i)}_{21}\right)\left[\Pi^{(i)}_{c_i}\right]\left\{\vec{e}^{(i)}_{1}\right\}\\
&= \sum_{i=2}^{3} m_i\left(\vec{e}_1 \times \overrightarrow{T}_{2_{(i)}}\right)\left\{\overrightarrow{T}_{1_{(i)}}\right\} + \left(\vec{e}^{(i)}_{21}\right)\left[\Pi^{(i)}_{c_i}\right]\left\{\vec{e}^{(i)}_{1}\right\}\\
&= m_2\left(\vec{e}_1 \times \overrightarrow{T}_{2_{(2)}}\right)\left\{\overrightarrow{T}_{1_{(2)}}\right\} + \left(\vec{e}^{(2)}_{21}\right)\left[\Pi^{(2)}_{c_2}\right]\left\{\vec{e}^{(2)}_{1}\right\}\\
&+ m_3\left(\vec{e}_1 \times \overrightarrow{T}_{2_{(3)}}\right)\left\{\overrightarrow{T}_{1_{(3)}}\right\} + \left(\vec{e}^{(3)}_{21}\right)\left[\Pi^{(3)}_{c_3}\right]\left\{\vec{e}^{(3)}_{1}\right\}
\end{aligned}$$

Квазибазни вектори су већ одређени у претходним тачкама задатка, као и трансформације јединичног вектора осе ротације, те је само потребно одредити планарне тензоре инерције и векторски производ $\vec{e}_{21} = \vec{e}_2 \times \vec{e}_1$.

Планарни тензор инерције

$$\left[\Pi^{(i)}_{c_i}\right] = \left\{\begin{matrix} J_{\eta C\zeta} & J_{\xi\eta} & J_{\xi\zeta} \\ J_{\eta\xi} & J_{\xi C\zeta} & J_{\eta\zeta} \\ J_{\zeta\xi} & J_{\zeta\eta} & J_{\xi C\eta} \end{matrix}\right\}$$

где се квадратни моменти инерције могу одредити уз помоћ аксијалних момената инерцији, на следећи начин:

$$\begin{aligned}
J_{\eta C\zeta} &= \frac{J_{C_\eta} + J_{C_\zeta} - J_{C_\xi}}{2}\\
J_{\xi C\zeta} &= \frac{J_{C_\xi} + J_{C_\zeta} - J_{C_\eta}}{2}\\
J_{\xi C\eta} &= \frac{J_{C_\xi} + J_{C_\eta} - J_{C_\zeta}}{2}
\end{aligned}$$

Према томе, планарне тензоре инерције можемо одредити на основу задатих тензора инерције:

$$J_{c_1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\Pi_{c_1}^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 9,5 \end{bmatrix}$$

$$J_{c_2}^{(2)} = J_{c_3}^{(3)} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\Pi_{c_2}^{(2)}\right] = \left[\Pi_{c_3}^{(3)}\right] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 9,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Векторски производ $\vec{e}_{21}$ је:

$$\vec{e}_{21} = \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{e}_{21}^{(2)} = \left[e_2^{d(2)}\right] \left\{\vec{e}_1^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,9801 \\ 0,1987 \end{Bmatrix}$$

Потребна нам је и његова трансформација у локални координатни систем трећег сегмента:

$$\vec{e}_{21}^{(3)} = [A_{2,3}]^T \left\{\vec{e}_{21}^{(2)}\right\} = [I] \left\{\vec{e}_{21}^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,9801 \\ 0,1987 \end{Bmatrix}$$

Коначно, векторске производе у изразу за Кристовелов симбол прве врсте одредићемо као производ одговарајућих дуалних објеката и вектора, при чему водимо рачуна о координатним системима у односу на које су одређени:

$$\begin{aligned} \Gamma_{12,1} = m_2 & \left(\left[e_1^{d(1)}\right] \left\{ \overrightarrow{T}^{(1)}_{2_{(2)}} \right\} \right) \left\{ \overrightarrow{T}^{(1)}_{1_{(2)}} \right\} + \left(\vec{e}_{21}^{(2)}\right) \left[\Pi_{c_2}^{(2)}\right] \left\{\vec{e}_1^{(2)}\right\} \\ + m_3 & \left(\left[e_1^{d(1)}\right] \left\{ \overrightarrow{T}^{(1)}_{2_{(3)}} \right\} \right) \left\{ \overrightarrow{T}^{(1)}_{1_{(3)}} \right\} + \left(\vec{e}_{21}^{(3)}\right) \left[\Pi_{c_3}^{(3)}\right] \left\{\vec{e}_1^{(3)}\right\} \end{aligned}$$

Кристофелов симбол прве врсте $\Gamma_{12,1}$ је:

$$\Gamma_{12,1} = -4,7704$$

Задатак 16: Кристофелов симбол прве врсте $\Gamma_{22,1}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22,1} &= \sum_{i=sup(2,1)}^{3} m_i \bar{\xi}_2 \left(\vec{e}_2 \times \overrightarrow{T}_{2_{(i)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{1_{(i)}}\right\} + \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_1 \left(\vec{e}_{21}^{(i)}\right) \left[\Pi_{c_i}^{(i)}\right] \left\{\vec{e}_2^{(i)}\right\} \\ &= \sum_{i=2}^{3} m_i \left(\vec{e}_2 \times \overrightarrow{T}_{2_{(i)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{1_{(i)}}\right\} + \left(\vec{e}_{21}^{(i)}\right) \left[\Pi_{c_i}^{(i)}\right] \left\{\vec{e}_2^{(i)}\right\} \\ &= m_2 \left(\vec{e}_2 \times \overrightarrow{T}_{2_{(2)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{1_{(2)}}\right\} + \left(\vec{e}_{21}^{(2)}\right) \left[\Pi_{c_2}^{(2)}\right] \left\{\vec{e}_1^{(2)}\right\} \\ &+ m_3 \left(\vec{e}_2 \times \overrightarrow{T}_{2_{(3)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{1_{(3)}}\right\} + \left(\vec{e}_{21}^{(3)}\right) \left[\Pi_{c_3}^{(3)}\right] \left\{\vec{e}_1^{(3)}\right\} \end{aligned}$$

Tj.

$$\Gamma_{22,1} = m_2 \left(\left[e_2^{d(2)} \right] \left\{ \overrightarrow{T}^{(2)}_{2_{(2)}} \right\} \right) \left\{ \overrightarrow{T}^{(2)}_{1_{(2)}} \right\} + \left(\vec{e}_{21}^{(2)} \right) \left[\Pi_{c2}^{(2)} \right] \left\{ \vec{e}_1^{(2)} \right\}$$
$$+ m_3 \left(\left[e_2^{d(2)} \right] \left\{ \overrightarrow{T}^{(2)}_{2_{(3)}} \right\} \right) \left\{ \overrightarrow{T}^{(2)}_{1_{(3)}} \right\} + \left(\vec{e}_{21}^{(3)} \right) \left[\Pi_{c3}^{(3)} \right] \left\{ \vec{e}_1^{(3)} \right\}$$

$$\Gamma_{22,1} = 0$$

Задатак 17 За претходни задатак одредити генералисане силе од сила теже роботског система.

$$Q_{\alpha_{(g)}} = \sum_{i=\alpha}^{n} m_i \vec{g} \overrightarrow{T}_{\alpha_{(i)}}$$

где је $\vec{g}$ одређен у односу на непокретни координатни систем!

$$\boxed{Q_{\alpha_{(g)}} = \sum_{i=\alpha}^{n} m_i \vec{g}^{(0)} \overrightarrow{T}^{(0)}_{\alpha_{(i)}}}$$

Потребно је да одредимо $Q_{1_{(g)}}$, $Q_{2_{(g)}}$ и $Q_{3_{(g)}}$.

Генералисана сила $Q_{1_{(g)}}$

$$Q_{1_{(g)}} = \sum_{i=1}^{3} m_i \vec{g}^{(0)} \overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(i)}} = m_1 \vec{g}^{(0)} \overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(1)}} + m_2 \vec{g}^{(0)} \overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(2)}} + m_3 \vec{g}^{(0)} \overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(3)}}$$

$$\begin{aligned} Q_{1_{(g)}} = {} & m_1 \left(\vec{g}^{(0)} \right) \left\{ \overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(1)}} \right\} \\ & + m_2 \left(\vec{g}^{(0)} \right) \left\{ \overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(2)}} \right\} \\ & + m_3 \left(\vec{g}^{(0)} \right) \left\{ \overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(3)}} \right\} \end{aligned}$$

где је $\left(\vec{g}^{(0)} \right) = -g \left(0 \ 0 \ 1 \right)$.

$$Q_{1_{(g)}} = m_1 \left(\vec{g}^{(0)} \right) \left\{ \overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(1)}} \right\} + m_2 \left(\vec{g}^{(0)} \right) \left\{ \overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(2)}} \right\} + m_3 \left(\vec{g}^{(0)} \right) \left\{ \overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(3)}} \right\}$$

У претходном задатку смо већ одредили $\overrightarrow{T}^{(1)}_{1_{(1)}}$, $\overrightarrow{T}^{(1)}_{1_{(2)}}$ и $\overrightarrow{T}^{(1)}_{1_{(3)}}$, дакле, треба само да их трансформишемо!

$$\overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(1)}} = [A_{0,1}]\left\{\overrightarrow{T}^{(1)}_{1_{(1)}}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(2)}} = [A_{0,1}]\left\{\overrightarrow{T}^{(1)}_{1_{(2)}}\right\} = \begin{Bmatrix} -0,2926 \\ -0,0294 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(3)}} = [A_{0,1}]\left\{\overrightarrow{T}^{(1)}_{1_{(3)}}\right\} = \begin{Bmatrix} -1,0727 \\ -0,1076 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$Q_{1_{(g)}} = m_1\left(\vec{g}^{(0)}\right)\left\{\overrightarrow{T}^{(0)}_{1_{(g)}}\right\} + m_2\left(\vec{g}^{(0)}\right)\left\{\overrightarrow{T}^{(0)}_{2_{(g)}}\right\} + m_3\left(\vec{g}^{(0)}\right)\left\{\overrightarrow{T}^{(0)}_{3_{(g)}}\right\}$$

$$Q_{1_{(g)}} = 0$$

Може се закључити да сила Земљине теже не врши рад у правцу тог померања.

Генералисана сила $Q_{2_{(g)}}$

$$\boxed{Q_{\alpha_{(g)}} = \sum_{i=\alpha}^{n} m_i \vec{g}^{(0)} \overrightarrow{T}^{(0)}_{\alpha_{(i)}}}$$

$$Q_{2_{(g)}} = \sum_{i=2}^{3} m_i \vec{g}^{(0)} \overrightarrow{T}^{(0)}_{2_{(i)}} = m_2 \vec{g}^{(0)} \overrightarrow{T}^{(0)}_{2_{(2)}} + m_3 \vec{g}^{(0)} \overrightarrow{T}^{(0)}_{2_{(3)}}$$

$$Q_{2_{(g)}} = m_2\left(\vec{g}^{(0)}\right)\left\{\overrightarrow{T}^{(0)}_{2_{(2)}}\right\} + m_3\left(\vec{g}^{(0)}\right)\left\{\overrightarrow{T}^{(0)}_{2_{(3)}}\right\}$$

Може се написати и на следећи начин:

$$Q_{2_{(g)}} = -m_2 g\,(0\ 0\ 1)\left\{\overrightarrow{T}^{(0)}_{2_{(2)}}\right\} - m_3 g\,(0\ 0\ 1)\left\{\overrightarrow{T}^{(0)}_{2_{(3)}}\right\}$$

Када трансформишемо већ познате квазибазне векторе:

$$\overrightarrow{T}^{(0)}_{2_{(2)}} = [A_{0,2}]\left\{\overrightarrow{T}^{(2)}_{2_{(2)}}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,006 \\ -0,0593 \\ 0,294 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{T}^{(0)}_{2_{(3)}} = [A_{0,2}]\left\{\overrightarrow{T}^{(2)}_{2_{(3)}}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,0218 \\ -0,2174 \\ 1,0781 \end{Bmatrix}$$

можемо одредити генералисану силу:

$$Q_{2_{(g)}} = -63,3012$$

Генералисана сила $Q_{3_{(g)}}$

$$\boxed{Q_{\alpha_{(g)}} = \sum_{i=\alpha}^{n} m_i \vec{g}^{(0)} \overrightarrow{T}^{(0)}_{\alpha_{(i)}}}$$

$$Q_{3_{(g)}} = \sum_{i=3}^{3} m_i \vec{g}^{(0)} \overrightarrow{T}^{(0)}_{3_{(i)}} = m_3 \vec{g}^{(0)} \overrightarrow{T}^{(0)}_{3_{(3)}}$$

$$\overrightarrow{T}^{(0)}_{3_{(3)}} = [A_{0,4}]\left\{\overrightarrow{T}^{(3)}_{3_{(3)}}\right\} = \begin{Bmatrix} -0,0978 \\ 0,9752 \\ 0,1987 \end{Bmatrix}$$

$$Q_{3_{(g)}} = -9,7447$$