Zadaci

Zadatak 7.1. Dat je glavni vektor $\vec{F}_R = 4\vec{i}$ sistema sila, čiji je glavni moment $\vec{M}_o = 3\vec{j}$ za početak *Dekartovog* koordinatnog sistema *Oxyz*. Odrediti intenzitet glavnog momenta istog sistema sila u odnosu na tačku $O_1(0,0,2)$.

Rešenje: *Promena glavnog momenta sistema sila sa promenom redukcione tačke, data je izrazom (7.6), tj.*

$$\vec{M}_{o_1} = \vec{M}_o + \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_R .$$

Izrazi za $\vec{M}_o$ *i* $\vec{F}_R$ *u prethodnoj jednakosti zadati su uslovima zadatka, dok je vektor* $\overrightarrow{O_1O}$*, određen vektorima položaja tačaka O i* O_1*, dat kao*

$$\overrightarrow{O_1O} = \vec{r}_o - \vec{r}_{o_1} = -2\vec{k} .$$

To znači da se može pisati

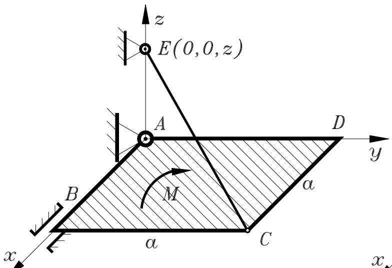
$$\vec{M}_{o_1} = 3\vec{j} + [(-2\vec{k}) \times (4\vec{i})] ,$$

odakle se dobija

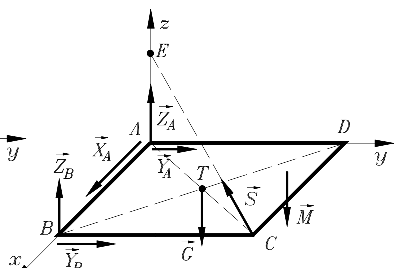
$$\vec{M}_{o_1} = 11\vec{j} ,$$

odnosno intenzitet glavnog momenta datog sistema sila, za tačku O_1 *je* $M_{o_1} = 11$.

Zadatak 7.3. Homogena horizontalna kvadratna ploča *ABCD*, težine $G = \sqrt{2}$ i stranice dužine $a = 1$, održava se u položaju ravnoteže, prikazanom na slici, pomoću sfernog ležišta *A*, cilindričnog ležišta *B* i užeta *CE*. Ako u ravni ploče deluje spreg sila intenziteta momenta $M = 1$, odrediti položaj tačke *E* na osi *Az*, za koju treba vezati uže, tako da intenzitet sile u užetu bude $S = 1$. Odrediti reakcije veza u ležištima *A* i *B*.



uz zadatak 7.3.



7.3.a.

Rešenje: *U cilju razmatranja ravnoteže ploče ABCD potrebno je ploču osloboditi veza, a njihovo dejstvo zameniti reakcijama veza. Tako je dejstvo sfernog ležišta zamenjeno sa tri, a dejstvo cilindričnog ležišta sa dve međusobno upravne sile (slika 7.3.a.). Dejstvo užeta na ploču zamenjeno je silom* $\vec{S}$ *smera kao na slici, s obzirom na činjenicu da uže može biti opterećeno samo na zatezanje. Sada se, dakle, umesto ravnoteže ploče razmatra ravnoteža datog prostornog sistema sila i spregova sila, tj. treba da je* $(\vec{X}_A,\vec{Y}_A,\vec{Z}_A,\vec{Y}_B,\vec{Z}_B,\vec{G},\vec{S};\vec{M}) \sim 0$

Da bi se napisale jednačine ravnoteže (7.25), potrebno je odrediti projekcije svih sila, momenata sila i momenata spregova sila na ose datog koordinatnog sistema.

Reakcije $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ oslonaca A i B i težina $\vec{G}$ ploče ABCD mogu se analitički odrediti u odnosu na dati koordinatni sistem Axyz, tj.

$$\vec{F}_A = X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}, \quad \vec{F}_B = Y_B\vec{j} + Z_B\vec{k}, \quad \vec{G} = -G\vec{k},$$

dok je sila $\vec{S}$ analitički određena sa

$$\vec{S} = S_x\vec{i} + S_y\vec{j} + S_z\vec{k} = Scos\alpha\vec{i} + Scos\beta\vec{j} + Scos\gamma\vec{k}.$$

*Projekcije S_x, S_y i S_z mogu se odrediti direktno iz trougla ACE ili pomoću kosinusa uglova α, β i γ koje napadna linija te sile zaklapa sa odgovarajućim koordinatnim osama. Kosinusi uglova α, β i γ mogu se odrediti na način kako je to urađeno pri rešavanju zadatka **3.1.**. U ovom slučaju, "početna" tačka za silu $\vec{S}$ je $C(a,a,0)$ a "krajnja" je $E(0,0,z)$, pa je*

$$\overline{CE} = \sqrt{2a^2 + z^2}, \qquad cos\alpha = \frac{x_E - x_C}{\overline{CE}} = \frac{-a}{\sqrt{2a^2 + z^2}},$$

$$cos\beta = \frac{y_E - y_C}{\overline{CE}} = \frac{-a}{\sqrt{2a^2 + z^2}}, \qquad cos\gamma = \frac{z_E - z_C}{\overline{CE}} = \frac{z}{\sqrt{2a^2 + z^2}}.$$

Na taj način, sila $\vec{S}$, može se napisati u obliku

$$\vec{S} = -S\frac{a}{\sqrt{2a^2 + z^2}}\vec{i} - S\frac{a}{\sqrt{2a^2 + z^2}}\vec{j} + S\frac{z}{\sqrt{2a^2 + z^2}}\vec{k}.$$

Sada se mogu napisati analitički uslovi ravnoteže sistema sila koji obezbeđuju da je glavni vektor datog sistema sila koji deluje na ploču, jednak nuli, tj.

$$\sum X_i = 0; \qquad X_A - S\frac{a}{\sqrt{2a^2 + z^2}} = 0, \tag{a}$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad Y_A + Y_B - S\frac{a}{\sqrt{2a^2 + z^2}} = 0, \tag{b}$$

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_A + Z_B - G + S\frac{z}{\sqrt{2a^2 + z^2}} = 0. \tag{c}$$

Da bi se odredile projekcije momenata svih sila, u odnosu na koordinatni početak, potrebno je odrediti koordinate napadnih tačaka svih sila koje deluju na ploču. Za dati koordinatni sistem je: $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$ i $T(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0)$, gde je T napadna tačka sile težine ploče. Sada su momenti svih sila, u odnosu na koordinatni početak, dati sa

$$\vec{M}_A(\vec{F}_A) = \vec{r}_A \times \vec{F}_A = 0, \qquad \vec{M}_A(\vec{F}_B) = \vec{r}_B \times \vec{F}_B = -aZ_B\vec{j} + aY_B\vec{k} \,,$$

$$\vec{M}_A(\vec{G}) = \vec{r}_T \times \vec{G} = -\frac{a}{2}G\vec{i} + \frac{a}{2}G\vec{j},$$

$$\vec{M}_A(\vec{S}) = \vec{r}_C \times \vec{S} = aS\frac{z}{\sqrt{2a^2+z^2}}\vec{i} - aS\frac{z}{\sqrt{2a^2+z^2}}\vec{j} \,.$$

dok moment sprega sila $\vec{M}$, koji deluje u ravni Axy, ima projekciju samo na osu Az

$$\vec{M} = -M\vec{k} \,.$$

Analitički uslovi ravnoteže koji obezbeđuju da je glavni moment datog sistema sila koji deluje na ploču, jednak nuli, su

$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad -\frac{a}{2}G + aS\frac{z}{\sqrt{2a^2+z^2}} = 0 \,, \tag{d}$$

$$\sum M_{Ay} = 0; \qquad -aZ_B + \frac{a}{2}G - aS\frac{z}{\sqrt{2a^2+z^2}} = 0 \,, \tag{e}$$

$$\sum M_{Az} = 0; \qquad -aY_B - M = 0 \,. \tag{f}$$

Iz šest jednačina (a-c) i (d-f) mogu se odrediti nepoznate veličine X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B i z. Zamenjujući date podatke $a=1$, $G=\sqrt{2}$, $S=1$ i $M=1$, u ove jednačine, rešavanjem se dobija

$$X_A = \frac{1}{2}, \qquad Y_A = -\frac{1}{2}, \qquad Z_A = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

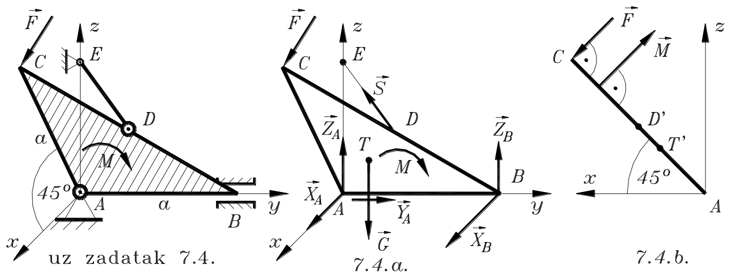
$$Y_B = 1, \qquad Z_B = 0, \qquad z = \sqrt{2} \,.$$

Zadatak 7.4. Homogena ploča *ABC* oblika jednakokrakog pravouglog trougla $(\angle A = 90^o)$, stranica $\overline{AC} = \overline{AB} = a$ i težine $\vec{G}$, održava se u prikazanom položaju ravnoteže pomoću sfernog ležišta *A*, cilindričnog ležišta *B* i lakog štapa *DE*. Veze u tačkama *D* i *E* su zglobne, pri čemu je $\overline{BD} = \overline{CD}$ i $E(0,0,a\sqrt{2}/2)$. Ploča je nagnuta u odnosu na horizontalnu ravan *Axy* pod uglom 45^o. Ako u ravni ploče deluje spreg sila intenziteta momenta $M = Ga\sqrt{2}$, a upravno na ploču u tački *C* sila intenzitata $F = G\sqrt{2}/3$ i smera kao na slici, odrediti reakcije ležišta *A* i *B* i silu u štapu *DE*.

Rešenje: *Ploča ABC, oslobođena veza, prikazana je na slici 7.4.a.. Sile koje deluju na ploču date su u sledećem analitičkom obliku*

$$\vec{F}_A = X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}, \qquad \vec{F}_B = X_B\vec{i} + Z_B\vec{k}, \qquad \vec{G} = -G\vec{k} \,,$$

$$\vec{S} = = S\cos\alpha\vec{i} + S\cos\beta\vec{j} + S\cos\gamma\vec{k} \,.$$



uz zadatak 7.4. 7.4.a. 7.4.b.

"Početna" i "krajnja" tačka za silu $\vec{S}$ *u ovom slučaju su tačke* $D(\frac{a}{2}\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\frac{\sqrt{2}}{2})$ *i* $E(0,0,a\frac{\sqrt{2}}{2})$*, respektivno, tako da je*

$$\vec{S}=-\frac{S}{2}\vec{i}-S\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+\frac{S}{2}\vec{k}\cdot$$

U cilju analitičkog određivanja sile $\vec{F}$ *, posmatra se normalna projekcija ploče na ravan Axz (slika 7.4.b.), gde su* D' *i* T' *normalne projekcije tačaka D i T na datu ravan. Sila* $\vec{F}$ *može se sada napisati na sledeći način*

$$\vec{F}=F\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-F\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\cdot$$

Koordinate napadnih tačaka ostalih sila koje deluju na ploču su: $A(0,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(a\frac{\sqrt{2}}{2},0,a\frac{\sqrt{2}}{2})$ *i* $T(\frac{a}{3}\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\frac{\sqrt{2}}{2})$*, pa su momenti sila, određeni za koordinatni početak A, određeni sa*

$$\vec{M}_A(\vec{F}_A)=\vec{r}_A\times\vec{F}_A=0,\qquad \vec{M}_A(\vec{F}_B)=\vec{r}_B\times\vec{F}_B=aZ_B\vec{i}-aX_B\vec{k}\,,$$

$$\vec{M}_A(\vec{G})=\vec{r}_T\times\vec{G}=-\frac{a}{3}G\vec{i}+\frac{a\sqrt{2}}{6}G\vec{j},\qquad \vec{M}_A(\vec{F})=\vec{r}_C\times\vec{F}=aF\vec{j}\,,$$

$$\vec{M}_A(\vec{S})=\vec{r}_D\times\vec{S}=\frac{a}{2}S\vec{i}-\frac{a\sqrt{2}}{4}S\vec{j}\,,$$

dok je moment sprega sila $\vec{M}$ *takav da ima projekcije na ose Ox i Oz (slika 7.4.b.)*

$$\vec{M}=-M\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+M\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\cdot$$

Primenjujući uslove ravnoteže (7.25), analitički uslovi ravnoteže ploče su oblika

$$\sum X_i=0;\qquad\qquad X_A+X_B-\frac{S}{2}+F\frac{\sqrt{2}}{2}=0\,,\qquad (a)$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad Y_A - S\frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \qquad (b)$$

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_A + Z_B - G + \frac{S}{2} - F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \qquad (c)$$

$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad aZ_B - \frac{a}{3}G + \frac{a}{2}S - M\frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \qquad (d)$$

$$\sum M_{Ay} = 0; \qquad \frac{a\sqrt{2}}{6}G - \frac{a\sqrt{2}}{4}S + aF = 0, \qquad (e)$$

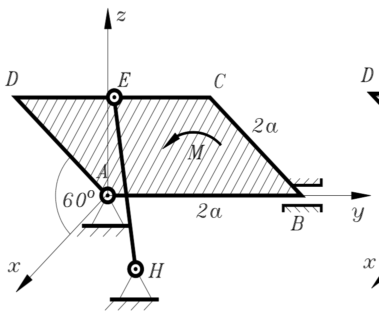
$$\sum M_{Az} = 0; \qquad -aX_B + M\frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \qquad (f)$$

Iz prethodnih šest jednačina uz korišćenje datih podataka: $M = Ga\sqrt{2}$ *i* $F = G\sqrt{2}/3$ *određuje se šest nepoznatih veličina*

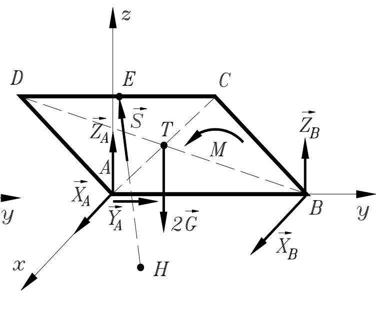
$$X_A = -\frac{G}{3}, \qquad Y_A = G\sqrt{2}, \qquad Z_A = 0,$$

$$X_B = G, \qquad Z_B = \frac{G}{3}, \qquad S = 2G.$$

<u>Zadatak 7.5.</u> Homogena kvadratna ploča *ABCD*, stranice $2a$ i težine $2\vec{G}$, održava se u prikazanom položaju ravnoteže pomoću sfernog ležišta *A*, cilindričnog ležišta *B* i lakog štapa *EH* ($\overline{EC} = \overline{ED}$, $H(2a,a,0)$). Veze u tačkama *E* i *H* su zglobne, a ploča je nagnuta u odnosu na horizontalnu ravan *Axy* pod uglom $\alpha = 60^o$. Ako u ravni ploče deluje spreg sila intenziteta momenta $M = Ga\sqrt{3}/3$ smera kao na slici, odrediti sve reakcije veza.



uz zadatak 7.5.



7.5.a.

Rešenje: *Na način opisan u prethodnom zadatku može se doći do uslova ravnoteže ploče (slika 7.5.a.), tj. može se pisati*

$$\sum X_i = 0; \qquad X_A + X_B - \frac{S}{2} = 0, \qquad (a)$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad Y_A = 0, \qquad (b)$$

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_A + Z_B - 2G + S\frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \qquad (c)$$

$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad 2aZ_B - 2aG + aS\frac{\sqrt{3}}{2} + M\frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \qquad (d)$$

$$\sum M_{Ay} = 0; \qquad \frac{a}{2}2G - a\sqrt{3}S = 0, \qquad (e)$$

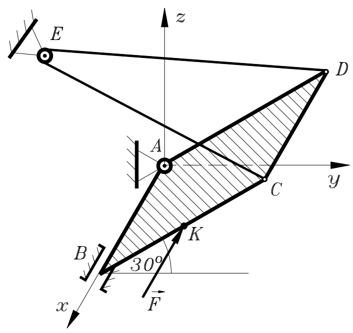
$$\sum M_{Az} = 0; \qquad -2aX_B + a\frac{S}{2} - M\frac{1}{2} = 0. \qquad (f)$$

Rešavajući prethodni sistem jednačina, pri čemu se uzima u obzir da je zadat intenzitet momenta sprega sila, dobija se

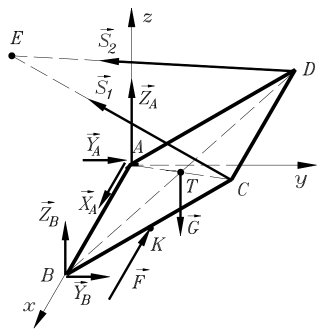
$$X_A = \frac{G\sqrt{3}}{6}, \qquad Y_A = 0, \qquad Z_A = G,$$

$$X_B = 0, \qquad Z_B = \frac{G}{2}, \qquad S = \frac{G\sqrt{3}}{3}.$$

<u>Zadatak 7.6.</u> Homogena kvadratna ploča *ABCD*, stranice *2a* i težine $\vec{G}$, otklonjena je od horizontalne ravni za ugao od 30^o i u tom položaju održava se pomoću sfernog ležišta *A*, cilindričnog ležišta *B* i nerastegljivog užeta. Uže je u tačkama *C* i *D* vezano za ploču i prebačeno preko nepokretnog kotura, zanemarljivih dimenzija koji je vezan u tački $E(a,a\sqrt{3}/2,3a/2)$. U tački *K* ($\overline{BK} = \overline{KC}$), na ploču deluje sila intenziteta $F = G$, paralelno osi *Ax* i smera kao na slici. Odrediti reakcije ležišta *A* i *B* i silu u užetu *CED*.



uz zadatak 7.6.



7.6.a.

Rešenje: *Ploča ABCD, oslobođena veza, prikazana je na slici 7.6.a.. Sprovodeći opisani postupak određivanja projekcija sile na ose datog koordinatnog sistema, imajući u vidu da je sila u užetu u svakom njegovom preseku istog intenziteta tj.* $S_1 = S_2 = S$*, dobija se da je*

$$\vec{S}_1 = -S\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - S\frac{\sqrt{6}}{4}\vec{j} + S\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{k}, \qquad \vec{S}_2 = S\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - S\frac{\sqrt{6}}{4}\vec{j} + S\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{k}.$$

Za određivanje projekcija momenata svih sila koje deluju na ploču ABCD, mogu se iskoristiti koordinate tačaka $K(2a,\frac{a\sqrt{3}}{2},\frac{a}{2})$, $T(a,\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2})$, $C(2a,a\sqrt{3},a)$ *i* $D(0,a\sqrt{3},a)$. *Tada su uslovi ravnoteže ploče mogu napisati u obliku*

$$\sum X_i = 0; \qquad X_A - F = 0, \qquad (a)$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad Y_A + Y_B - S\frac{\sqrt{6}}{2} = 0, \qquad (b)$$

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_A + Z_B - G + S\frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \qquad (c)$$

$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad -\frac{a\sqrt{3}}{3}G + a\sqrt{6}S = 0, \qquad (d)$$

$$\sum M_{Ay} = 0; \qquad -2aZ_B + aG - \frac{a\sqrt{2}}{2}S - \frac{a}{2}F = 0, \qquad (e)$$

$$\sum M_{Az} = 0; \qquad 2aY_B - \frac{a\sqrt{6}}{2}S + a\frac{\sqrt{3}}{2}F = 0. \qquad (f)$$

Rešavajući prethodni sistem jednačina, dobija se

$$X_A = G, \qquad Y_A = \frac{3G\sqrt{3}}{8}, \qquad Z_A = \frac{5G}{8},$$

$$Y_B = -\frac{G\sqrt{3}}{8}, \qquad Z_B = \frac{G}{8}, \qquad S = \frac{G\sqrt{2}}{4}.$$

Zadatak 7.10. Za sistem krutih tela, prikazan na slici, zanemarujući težine svih tela osim tereta težine $\vec{Q}$, odrediti sve reakcije veza. Dimenzije kotura D smatrati malim. Poznate su dužine $\overline{AE} = \overline{EC} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$. Uže prebačeno preko kotura D je gipko i ne–istegljivo.

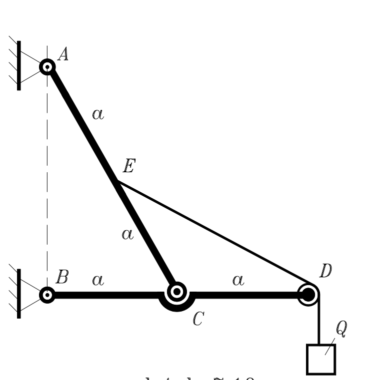
Rešenje: *U cilju određivanja i spoljašnjih i unutrašnjih reakcija veza, potrebno je sistem krutih tela rastaviti na njegove elemente. Sistemi sila koji deluju na svako od tela dati su na slikama 7.10.a.-7.10.d.. Za pisanje uslova ravnoteže tela I potrebno je odrediti ugao* α*. Iz trougla DEL (slika 7.10.a.) sledi*

$$tg\beta = \frac{3a/2}{a\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}, \qquad \beta = \frac{\pi}{3},$$

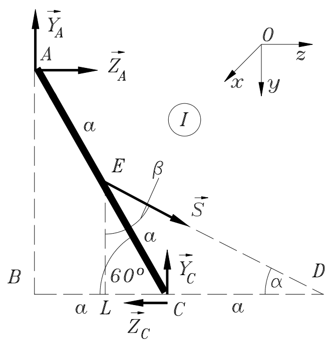
pa je

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Sva tela izložena su dejstvu ravnih sistema sila. Za pisanje uslova ravnoteže može se usvojiti, za sva tela, isti Dekartov koordinatni sistem Oyzx i primenjivati prvi (osnovni) oblik uslova ravnoteže.



uz zadatak 7.10.



7.10.a.

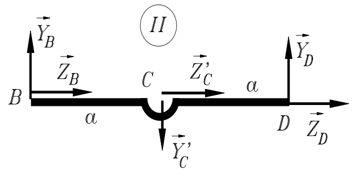
Uslovi ravnoteže tela I su

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_A - Z_C + S\cos\alpha = 0,$$

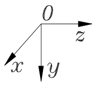
$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_A - Y_C + S\sin\alpha = 0,$$

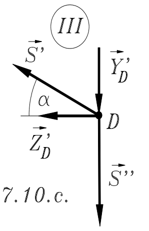
$$\sum M_{Ax} = 0; \quad -2a\sin\frac{\pi}{3}Z_C + 2a\cos\frac{\pi}{3}Y_C + a\cos\frac{\pi}{3}S\sin\frac{\pi}{3} - a\cos\frac{\pi}{3}S\cos\frac{\pi}{3} = 0.$$

Za telo II uslovi ravnoteže glase

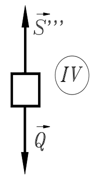


7.10.b.





7.10.c.



7.10.d.

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_B + Z_C' + Z_D = 0\,,$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_B + Y_C' - Y_D = 0\,,$$
$$\sum M_{Bx} = 0; \qquad -aY_C' + 2aY_D = 0\,.$$

Uslovi ravnoteže tela III, koje je opterećeno ravnim sistemom sučeljnih sila su oblika

$$\sum Z_i = 0; \qquad -Z_D' - S'\cos\frac{\pi}{6} = 0\,,$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad Y_D' - S'\sin\frac{\pi}{6} + S'' = 0\,.$$

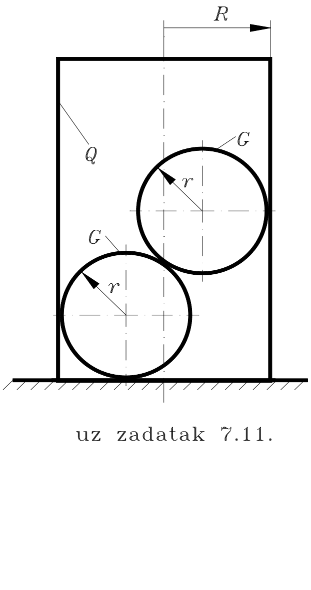
Za telo IV, opterećeno sistemom kolinearnih sila, uslov ravnoteže je

$$\sum Y_i = 0; \qquad -S''' + Q = 0\,.$$

Iz prethodnog sistema od devet jednačina može se odrediti devet nepoznatih veličina, tj.

$$Z_A = -\frac{2}{3}Q\sqrt{3}, \quad Y_A = \frac{3}{2}Q, \quad Z_B = \frac{2}{3}Q\sqrt{3}, Y_B = -\frac{1}{2}Q\,,$$
$$Z_C = -\frac{\sqrt{3}}{6}Q, \quad Y_C = -Q, \quad Z_D = -\frac{\sqrt{3}}{2}Q, Y_D = -\frac{1}{2}Q, \quad S = Q\,.$$

Zadatak 7.11. Dve iste homogene kugle, svaka težine $\vec{G}$ i poluprečnika r, postavljene su u šuplji cilindar poluprečnika R. Odrediti težinu cilindra $\vec{Q}$, tako da ne dođe do njegovog prevrtanja.



uz zadatak 7.11.

Rešenje: *Kugle i cilindar, oslobođeni veza, prikazani su na slici 7.11.a.. Jedan od analitičkih uslova ravnoteže sistema sila koji deluje na cilindar je*

$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad rN_1' + RQ - (a+r)N_3' - bN_4 = 0\,.$$

Do prevrtanja cilindra može doći kada se napadna linija reakcije $\vec{N}_4$ *poklapa sa izvodnicom cilindra (*$b=0$*). U tom slučaju se iz prethodne jednačine dobija*

$$RQ=(r+a)N_3'-rN_1' . \qquad (a)$$

Nepoznate reakcije $\vec{N}_1$ *i* $\vec{N}_3$ *mogu se odrediti iz uslova ravnoteže sistema sučeljnih sila koji deluju na kugle I i II. Za kuglu I može se pisati*

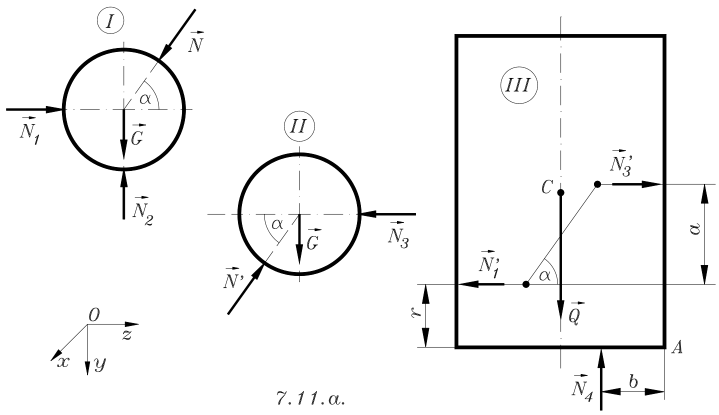
$$\sum Z_i=0; \qquad N_1-N\cos\alpha=0, \qquad (b)$$

a za kuglu II je

$$\sum Z_i=0; \qquad -N_3+N'\cos\alpha=0, \qquad (c)$$

$$\sum Y_i=0; \qquad -N'\sin\alpha+G=0. \qquad (d)$$

Druga jednačina ravnoteže ravnog sistema sučeljnih sila za kuglu I nije pisana jer iz nje se određuje reakcija $\vec{N}_2$ *koja u daljem postupku rešavanja zadatka nije neophodna. Isti je slučaj i sa dva preostala uslova ravnoteže sistema sila koji deluje na cilindar.*



7.11.a.

Ugao α *može se odrediti na sledeći način (telo III sa slike 7.11.a.):*

$$r+2r\cos\alpha+r=2R, \qquad tj. \qquad \cos\alpha=\frac{R-r}{r},$$

odnosno

$$tg\alpha=\frac{a}{2(R-r)}.$$

Iz jednačine (d) dobija se da je $N=G/\sin\alpha$*, pa se zamenom u jednačine (b) i (c) dobija*

$$N_1=N\cos\alpha=G\frac{2(R-r)}{a},$$

odnosno

$$N_3=N\cos\alpha=N_1 .$$

Korišćenjem izračunatih algebarskih vrednosti reakcija N_1 i N_3 u jednačini (a), dobija se

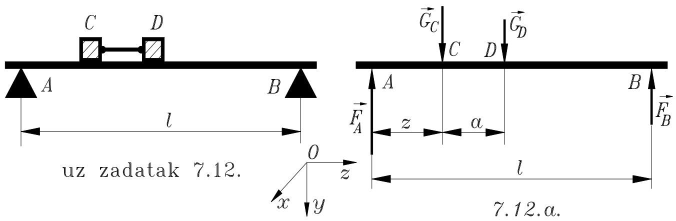
$$RQ = aN_1,$$

odnosno

$$Q = 2G(1 - \frac{r}{R}).$$

Prethodno određena težina Q je najmanja težina pri kojoj ne dolazi do prevrtanja cilindra. Svaka težina Q, veća od ovako određene, obezbeđuje da ne dođe do prevrtanja cilindra.

Zadatak 7.12. Duž horizontalne grede zanemarljive težine, oslonjene na dva oslonca, mogu se pomerati tereti *C* i *D* težina $G_C = 2$ i $G_D = 1$, respektivno. Rastojanje između oslonaca je $l = 4$, a između tereta je $\overline{CD} = a = 1$. Odrediti rastojanje *z*, mereno od oslonca *A*, gde treba da se nalazi teret *C* da bi reakcija oslonca *A* bila dva puta veća od reakcije oslonca *B*.



Rešenje: *Greda oslobođena veza, prikazana je na slici 7.12.a., odakle se vidi da je ona opterećena ravnim sistemom paralelnih sila. Uslovi ravnoteže ravnog sistema paralelnih sila (7.39), mogu se napisati u obliku*

$$\sum Y_i = 0; \qquad -F_A - F_B + G_C + G_D = 0, \qquad (a)$$

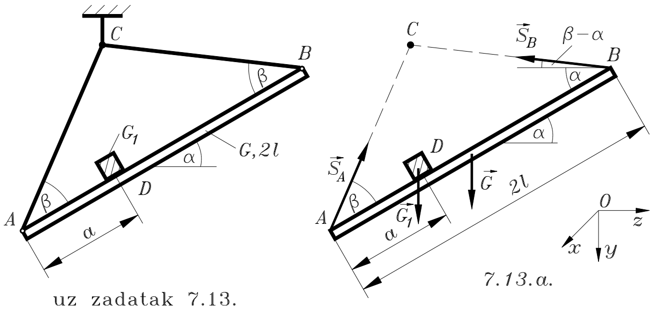
$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad -zG_C - (z+a)G_D + lF_B = 0. \qquad (b)$$

Nepoznate veličine F_A, F_B i z mogu se odrediti ako se sistemu jednačina (a), (b) doda i uslov zadatka da je reakcija oslonca A dva puta veća od reakcije oslonca B, tj. $F_A = 2F_B$. Rešavanjem prethodnih jednačina dobija se da je rastojanje z određeno sa

$$z = \frac{l(G_C + G_D) - 3aG_D}{3(G_C + G_D)}.$$

Ako se zamene poznate vrednosti, dobija se $z = 1$.

Zadatak 7.13. Za krajeve *A* i *B* homogene prizmatične grede, dužine *2l* i težine $\vec{G}$, vezana su dva užeta, *AC* i *BC*, iste dužine. Krajevi užadi *C* pričvršćeni su za treće uže koje je vezano za horizontalnu podlogu. Pravci užadi *AC* i *BC* zaklapaju sa pravcem grede ugao β. U tački D ($\overline{AD}=a$) nalazi se teret težine $\vec{G}_1$. Odrediti ugao α koji pravac grede gradi se horizontalom kao i sile u užadima.



uz zadatak 7.13.

Rešenje: *Greda i teret, oslobođeni veza, prikazani su na slici 7.13.a.. Prvi oblik analitičkih uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na gredu i teret, dat je sa*

$$\sum Z_i = 0; \qquad S_A cos(\alpha+\beta) - S_B cos(\beta-\alpha) = 0\,, \tag{a}$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -S_A sin(\alpha+\beta) - S_B sin(\beta-\alpha) + G_1 + G = 0\,, \tag{b}$$

$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad -aG_1 cos\alpha - lGcos\alpha + 2lS_B sin\beta = 0\,. \tag{c}$$

Množeći jednačinu (a) sa $sin(\beta-\alpha)$ *i jednačinu (b) sa* $cos(\beta-\alpha)$, *a zatim ih sabirajući, dobija se*

$$S_A = (G+G_1)\frac{cos(\beta-\alpha)}{sin2\beta}\,, \qquad S_B = (G+G_1)\frac{cos(\alpha+\beta)}{sin2\beta}\cdot$$

Zamenom prethodnih izraza u jednačinu (c) ugao α *određen je relacijom*

$$tg\alpha = \frac{l-a}{l}\frac{G_1}{G+G_1}ctg\beta\cdot$$

Zadatak 7.14. Na vertikalni zid naslonjene su merdevine AB, težine $0{,}2$, pod uglom od 45^o prema horizontali. U tački D, koja je od donjeg kraja A merdevina udaljena za $l/3$ dužine $\overline{AB}$, stoji čovek težine $0{,}6$. Odrediti sile kojima merdevine deluju na zidove.

Rešenje: *Sile koje deluju na merdevine, nakon oslobađanja od veza, prikazane su na slici 7.14.a.. Analitički uslovi ravnoteže datog ravnog sistema sila su*

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_A - Z_B = 0\,,$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_A + 0{,}6 + 0{,}2 = 0\,,$$

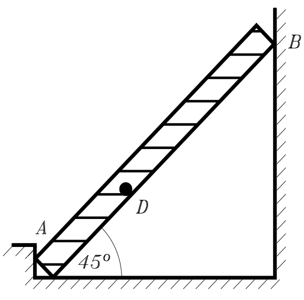
$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad -\frac{1}{3}\overline{AB}\frac{\sqrt{2}}{2}0{,}6 - \frac{1}{2}\overline{AB}\frac{\sqrt{2}}{2}0{,}2 + \overline{AB}\frac{\sqrt{2}}{2}Z_B = 0\,.$$

Rešavanjem prethodnih jednačina, dobijaju se sile kojima zidovi deluju na merdevine

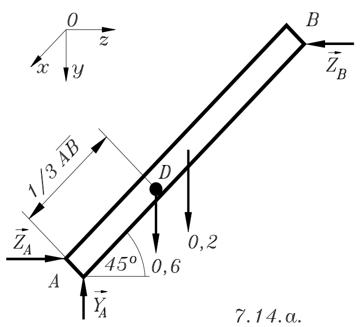
$$Z_A = 0.3, \qquad Y_A = 0.8, \qquad Z_B = 0.3\,.$$

Sile kojima merdevine deluju na zidove imaju iste napadne linije i intenzitete, kao i prethodno određene sile, a suprotne smerove.

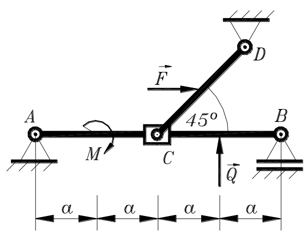
Zadatak 7.15. Horizontalni laki štap *AB*, dužine *4a*, vezan je krajem *A* za nepokretan, a krajem *B* za pokretan oslonac i opterećen vertikalnom silom $\vec{Q}$ i spregom sila čiji je moment intenziteta *M*. Laki štap *CD* i štap *AB* međusobno su povezani klizačem *C*. Na



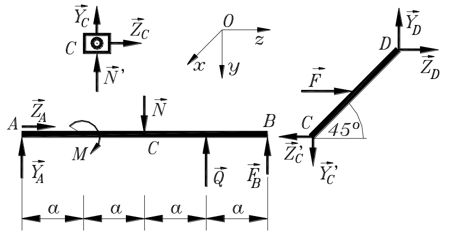
uz zadatak 7.14.



7.14.a.



uz zadatak 7.15.



7.15.a.

sredini štapa *CD* deluje horizontalna sila $\vec{F}$, smera kao na slici. Ako je $F = 4$, $M = 12$, $Q = 16$ i $a = 1$, odrediti sve reakcije veza.

Rešenje: *Štapovi AB i CD kao i klizač C, oslobođeni veza, prikazani su na slici 7.15.a.. Uslovi ravnoteže sistema sila i spregova sila koji deluju na štap AB su*

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_A = 0,$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_A + N - Q - F_B = 0,$$
$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad -M - 2aN + 3aQ + 4aF_B = 0.$$

Uslovi ravnoteže sistema sučeljnih sila koji deluje na klizač C su

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_C = 0,$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_C - N' = 0,$$

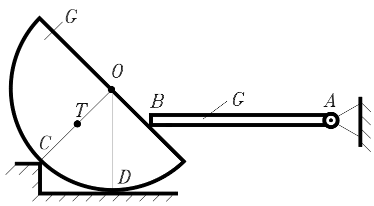
dok su uslovi ravnoteže sistema sila koji deluje na štap CD

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_D - Z_C' + F = 0,$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_D + Y_C' = 0,$$
$$\sum M_{Dx} = 0; \qquad \overline{CD}\frac{\sqrt{2}}{2}Y_C' - \overline{CD}\frac{\sqrt{2}}{2}Z_C' + \frac{\overline{CD}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}F = 0.$$

Rešavanjem prethodnih osam jednačina dobija se

$$Z_A = 0, \quad Y_A = -6, \quad N = 2, \quad F_B = -8, \quad Z_C = 0, \quad Y_C = -2, \quad Z_D = -4, \quad Y_D = -2.$$

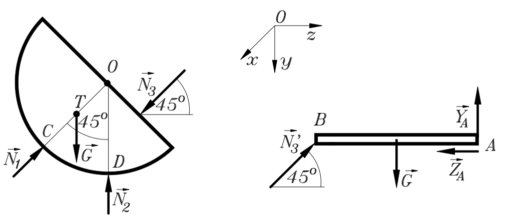
Zadatak 7.16. Poludisk težine $\vec{G}$ i poluprečnika *R*, čija je osa simetrije *OC*, a tačka *T* ($\overline{OT} = R/2$) napadna tačka sile težine, oslanja se u tačkama *C* i *D* na podlogu ($\angle COD = 45^o$). Na poludisk se u tački *B* naslanja homogeni horizontalni štap *AB*, težine $\vec{G}$. Štap je zglobno vezan za nepokretni oslonac *A*. Ako se štap i poludisk, u položaju prikazanom na slici, nalaze u ravnoteži, odrediti rastojanje $\overline{OB}$ i reakcije svih veza.



uz zadatak 7.16.

Rešenje: *Sistemi sila koji deluju na poludisk i na štap,nakon oslobađanja od veza, prikazani su na slici 7.16.a.. Uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na poludisk su*

$$\sum Z_i = 0; \qquad N_1\frac{\sqrt{2}}{2} - N_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad -N_1\frac{\sqrt{2}}{2} + G - N_2 + N_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$
$$\sum M_{ox} = 0; \qquad -\overline{OB}\,N_3 + \frac{R}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}G = 0,$$



7.16.a.

dok su uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na štap AB

$$\sum Z_i = 0; \qquad N_3' \frac{\sqrt{2}}{2} - Z_A = 0\,,$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -N_3' \frac{\sqrt{2}}{2} + G - Y_A = 0\,,$$

$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad -\overline{AB}\,N_3' \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\overline{AB}}{2} G = 0\,.$$

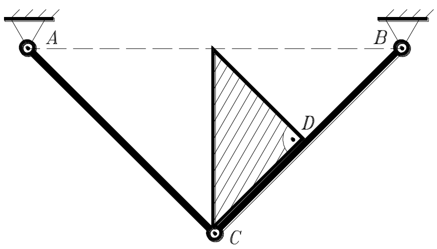
Rešavanjem prethodnog sistema od šest jednačina, nepoznate reakcije veza su

$$N_1 = G\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad N_2 = G, \qquad N_3 = G\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$Z_A = \frac{G}{2}, \qquad Y_A = \frac{G}{2},$$

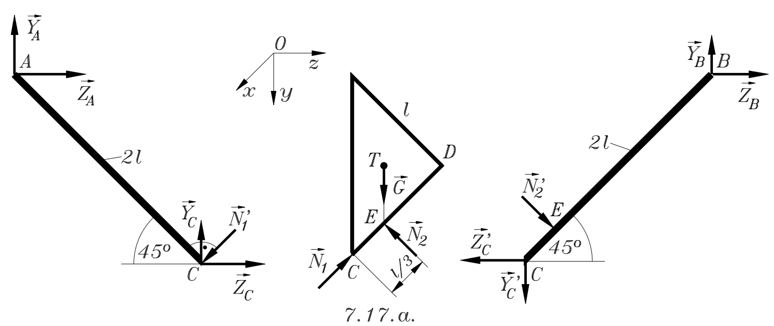
dok je traženo rastojanje $\overline{OB} = R/2$.

Zadatak 7.17. Dva međusobno upravna laka štapa, *AC* i *BC*, jednakih dužina *2l*, zglobno su vezani u tački *C*. Krajevi *A* i *B* štapova vezani su za nepokretne oslonce, koji se nalaze na istoj horizontali. Na štap *BC*, oslonjena je katetom $\overline{DC} = l$ homogena ploča težine $\vec{G}$, oblika jednakokrakog trougla. Ploča je temenom *C* oslonjena na kraj štapa *AC*. Odrediti reakcije svih veza.



uz zadatak 7.17.

Rešenje: *Štapovi AC, BC i trougaona ploča, oslobođeni veza, prikazani su na slici 7.17.a.. Kako na ploču deluju samo tri sile - težina ploče i dve reakcije veza od štapova onda, primenjujući teoremu o tri neparalelne sile, napadne linije te tri sile moraju se seći u jednoj tački. Kako je tačka E određena kao presečna tačka poznatih napadnih linija sila* $\vec{N}_1$ *i* $\vec{G}$, *određeno je i rastojanje napadne tačke sile* $\vec{N}_2$ *od tačke C, tj.* $\overline{CE} = l/3$.



7.17.a.

Uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na štap AC su

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_A + Z_C - N_1\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_A - Y_C + N_1\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad -2lN_1' + 2l\frac{\sqrt{2}}{2}Y_C + 2l\frac{\sqrt{2}}{2}Z_C = 0,$$

dok su uslovi ravnoteže ravnog sistema sučeljnih sila koji deluje na ploču dati u obliku

$$\sum Z_i = 0; \qquad N_1\frac{\sqrt{2}}{2} - N_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -N_1\frac{\sqrt{2}}{2} + G - N_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Uslovi ravnoteža ravnog sistema sila koji deluje na štap CD, dati su jednačinama

$$\sum Z_i = 0; \qquad -Z_C' + N_2'\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad Y_C' + N_2'\frac{\sqrt{2}}{2} - Y_B = 0$$

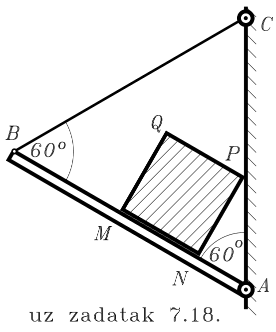
$$\sum M_{Bx} = 0; \qquad 2l\frac{\sqrt{2}}{2}Y_C' - 2l\frac{\sqrt{2}}{2}Z_C' + \frac{5}{3}lN_2' = 0.$$

Iz prethodnih osam jednačina mogu se odrediti osam nepoznatih veličina, pa je

$$Z_A = -\frac{5}{12}G, \quad Y_A = \frac{5}{12}G, \quad Z_C = \frac{11}{12}G, \quad Y_C = \frac{1}{12}G,$$

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}G, \quad N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}G, \quad Z_B = \frac{5}{12}G, \quad Y_B = \frac{7}{12}G.$$

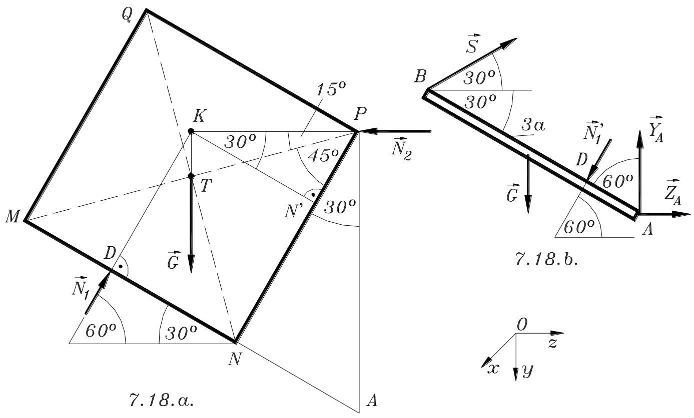
Zadatak 7.18. Prizma *MNPQ*, kvadratne osnove, stranice a i težine $\vec{G}$, oslanja se jednom stranom na telo *AB*, a ivicom *P* na vertikalni zid. Telo *AB*, dužine $3a$ i težine $\vec{G}$, održava se u položaju ravnoteže kao što je na slici prikazano, pomoću zglobne veze *A* i užeta *BC* ($\angle ABC = 60^o, \angle BAC = 60^o$). Odrediti reakcije svih veza.



uz zadatak 7.18.

Rešenje: *Na prizmu MNPQ, nakon oslobađanja od veza, deluju tri sile: njena težina* $\vec{G}$, *i reakcije zida i tela AB. Presečna tačka napadnih linija reakcije vertikalnog zida i težine prizme određuju tačku K kroz koju, saglasno teoremi o tri neparalelne sile, mora proći napadna linija reakcije tela AB (slika 7.18.a.). Sistem sila koji deluje na telo AB, prikazan je na slici 7.18.b..*

Uslovi ravnoteže ravnog sistema sučeljnih sila, koji deluje na prizmu, su



7.18.a. 7.18.b.

$$\sum Z_i = 0; \qquad N_1 \frac{1}{2} - N_2 = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + G = 0,$$

odakle se mogu odrediti veličine N_1 *i* N_2, *tj.*

$$N_1 = 2G\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad N_2 = G\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Uslovi ravnoteže tela AB, pod dejstvom datog ravnog sistema sila, su

$$\sum Z_i = 0; \qquad Z_A - N_1' \frac{1}{2} + S\frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \tag{a}$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_A + N_1' \frac{\sqrt{3}}{2} + G - S\frac{1}{2} = 0, \tag{b}$$

$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad \overline{AD} N_1' + \frac{3}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} G - 3a\frac{\sqrt{3}}{2} S = 0. \tag{c}$$

Iz prethodne tri jednačine mogu se odrediti nepoznate Z_A, Y_A *i* S. *Za njihovo određivanje potrebno je naći rastojanje* $\overline{AD}$. *Kako je* $\overline{AD} = \overline{AN} + \overline{ND}$ *(slika 7.18.a.), može se pisati*

$$\overline{KP} = a\frac{\sqrt{2}}{2}cos15^o,$$

tako da je

$$\overline{ND} = \overline{KN'} = \overline{KP}cos30^o = a\frac{\sqrt{2}}{2}cos15^o cos30^o = a\frac{\sqrt{2}}{2}cos(60^o - 45^o)cos30^o,$$

odnosno

$$\overline{ND} = \frac{a}{8}(\sqrt{3}+3)\cdot$$

Sada je

$$\overline{AD} = actg60^o + \overline{ND} = \frac{a}{24}(11\sqrt{3}+9)\cdot$$

Rešavajući sistem jednačina (a), (b) i (c), dobija se

$$Z_A = -\frac{11}{36}G, \qquad Y_A = (\frac{5}{3} - \frac{11\sqrt{3}}{108})G, \qquad S = (\frac{2}{3} + \frac{11\sqrt{3}}{54})G\cdot$$