11.2 Diferencijalne jednačina kretanja zatvorenog kinematičkog lanca

Razmotrimo višestruko zatvoren kinematički lanac sa n segmenata. „otvaranjem“ lanca (rastavljanjem po zglobovima) na k mesta dobijamo kinematički lanac sa strukturom topološkog drveta sa m stepeni slobode kretanja pri čemu je

$$m = n - l,\; l < n,\; l \leq 5k\,, \tag{11.84}$$

Veze nastale iz uslova „otvaranja“ lanca imaju oblik

$$f^{\nu}(q^1,...,q^n) = 0,\; \nu = 1,...,l \tag{11.85}$$

i nezavisne su, tj. važi

$$rank\left[\partial f^{\nu} / \partial q^{\alpha}\right] = l,\; \alpha = 1,...,n \tag{11.86}$$

Pretpostavimo da smo, primenjujući postupak koji se odnosi na otvorene kinematičke lance sa strukturom topološkog drveta, formirali osnovni metrički tenzor

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(q^1,...,q^n),\; \alpha,\beta = 1,...,n \tag{11.87}$$

i odredili generalisane sile

$$Q_{\alpha} = Q_{\alpha}(q^1,...,q^n),\;\; \alpha = 1,...,n \tag{11.88}$$

ne vodeći računa o vezama (11.74). Korišćenjem ***Lagranž-Dalamberovog principa u generalisanim koordinatama***

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}} - Q_{\alpha}\right)\delta q^{\alpha} = 0 \tag{11.89}$$

gde je kinetička energija razmatranog sistema data u obliku

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\,, \tag{11.90}$$

i gde su δq^{α} izohrone varijacije generalisanih koordinata $\delta q^1,...,\delta q^n$. Sa kovarijantnim oblikom izraza u zagradi relacija (11.89) dobija oblik

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\ddot{q}^{\beta} + \sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} - Q_{\alpha}\right)\delta q^{\alpha} = 0. \tag{11.91}$$

Varirajmo, nadalje, veze (11.85). Dobijamo

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\alpha}}\delta q^{\alpha} = 0, \tag{11.92}$$

ili, nakon množenja skalarnim funkcijama $\lambda_\nu = \lambda_\nu(t)$,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha = 0. \tag{11.93}$$

Sabiranjem poslednjeg izraza sa (11.90) dobijamo

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma_{\beta\gamma,\alpha} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma - Q_\alpha + \lambda_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha = 0 \tag{11.94}$$

ili

$$\begin{aligned} &\sum_{b=1}^{m} \left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{b\beta} \ddot{q}^\beta + \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma_{\beta\gamma,b} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma - Q_b + \lambda_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial q^b} \right) \delta q^b \\ &+ \sum_{\rho=m+1}^{n} \left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{\rho\beta} \ddot{q}^\beta + \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma_{\beta\gamma,\rho} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma - Q_\rho + \lambda_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial q^\rho} \right) \delta q^\rho = 0. \end{aligned} \tag{11.95}$$

Kako je ispunjen uslov (11.86) sledi da iz (11.92) možemo da odredimo l zavisnih varijacija generalisanih koordinata kao linearnu kombinaciju m nezavisnih varijacija generalisanih koordinata. Ne umanjujući opštost razmatranja smatraćemo da su nezavisne varijacije $\delta q^1,...,\delta q^m$ a zavisne $\delta q^{m+1},...,\delta q^n$ (ako to nije ispunjeno uvek se može pribeći prenumeraciji koordinata do ispunjenja toga uslova). Odaberimo sada skalarne funkcije $\lambda_\nu = \lambda_\nu(t)$ tako da važi ($\rho = m+1,...,n$)

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{\rho\beta} \ddot{q}^\beta + \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma_{\beta\gamma,\rho} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma - Q_\rho + \sum_{\nu=1}^{l} \lambda_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial q^\rho} = 0, \tag{11.96}$$

što je moguće učiniti jer je $\det[\partial f^\nu / \partial q^\rho] \neq 0$. Odatle se dobija

$$\lambda_\nu = \sum_{\rho=m+1}^{n} \varphi_\nu^\rho \left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{\rho\beta} \ddot{q}^\beta + \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma_{\beta\gamma,\rho} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma - Q_\rho \right), \tag{11.97}$$

gde je $[\varphi_\nu^\rho]$ inverzna matrica matrice $[\partial f^\nu / \partial q^\rho]$. Na taj način u (11.94) ostaje

$$\sum_{b=1}^{m} \left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{b\beta} \ddot{q}^\beta + \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma_{\beta\gamma,b} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma - Q_b + \sum_{\nu=1}^{l} \lambda_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial q^b} \right) \delta q^b = 0 \tag{11.98}$$

odakle, zbog nezavisnosti δq^b sledi

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{b\beta}\ddot{q}^{\beta} + \sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,b}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} - Q_b + \sum_{\nu=1}^{l}\lambda_{\nu}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{b}} = 0,\ b = 1,...,m\,. \qquad (11.99)$$

Poslednje jednačine, zajedno sa (11.96) dovode do Lagranževih jednačina sa množiteljima veza u obliku ([7])

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\ddot{q}^{\beta} + \sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} - Q_{\alpha} + \sum_{\nu=1}^{l}\lambda_{\nu}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} = 0,\ \alpha = 1,...,n\,, \qquad (11.100)$$

koje sa (11.85) sačinjavaju potpun skup diferencijalnih i algebarskih jednačina za određivanje nepoznatih funkcija $q^{\alpha} = q^{\alpha}(t)$ i $\lambda_{\nu} = \lambda_{\nu}(t)$. O određivanju generalisanih sila i koordinata metričkog tenzora bilo je ranije reči.