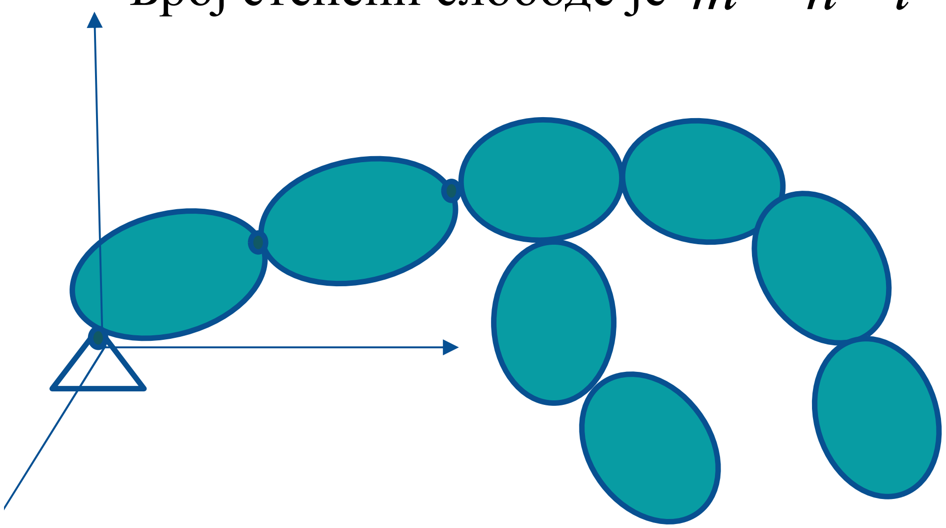
Диференцијалне једначине кретања РС дат у облику затвореног кинематичког ланца

Посматра се РС дат у облику затвореног кинематичког ланца са $n = m + l$ степени слободе који после отварања постаје кинематички ланац са структуром тополошког дрвета. Нису све независне координате, јер постоји *l веза које су независне*

- Број степени слободе је $m = n - l$

$$f^{\nu}\left(q^{1},\quad q^{2},\quad \ldots\quad q^{n}\right) = 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, l < n$$



$$rank\left[\partial f^{\nu} / \partial q^{\alpha}\right] = l,\ \alpha = 1, \ldots, n$$

Претпоставимо да је применом поступка за отворене кин. ланце са гранањем формиран основни метрички тензор и одређене генералисане силе, не водећи рачуна о везама·

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(q^1,\dots,q^n),\ \alpha,\beta = 1,\dots,n$$

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q^1,\dots,q^n),\ \alpha = 1,\dots,n$$

Примењујемо Лангранж-Даламберов принцип

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} - Q_\alpha\right)\delta q^\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha+1}^{н} \Im_\alpha \delta q^\alpha = 0 \quad *$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \ ,$$

а са δq^α су означене изохроне варијације ген. координата $q^1,\ \ q^2,\ \ \dots\ \ q^n$

Варирамо сваку везу $\nu = 1, 2, .., l$ $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} \delta q^{\alpha} = 0,$

Множимо са скаларним функцијама тј Ланґражевих множитељима

$$\lambda_{\nu} = \lambda_{\nu}(t), \quad \nu = 1, 2, .., l$$

$$\lambda_1 \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^{1}}{\partial q^{\alpha}} \delta q^{\alpha} = 0, \quad \lambda_2 \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^{2}}{\partial q^{\alpha}} \delta q^{\alpha} = 0, \ldots, \lambda_l \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^{l}}{\partial q^{\alpha}} \delta q^{\alpha} = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{l} \lambda_{\nu} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} \delta q^{\alpha} = 0, \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{l} \lambda_{\nu} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} \right) \delta q^{\alpha} = 0,$$

- Сабирањем последњег израза са (*) следи:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\mathfrak{J}_{\alpha} + \sum_{\nu=1}^{l} \lambda_{\nu} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} \right) \delta q^{\alpha} = 0,$$

$$\left(q^1,\quad q^2,\quad \dots\quad q^n\right)=\underbrace{\left(q^1,\quad q^2,\quad \dots\quad q^m\right)}_{nezavisne},\underbrace{\left(q^{m+1},\quad q^{m+2},\quad \dots\quad q^{m+l=n}\right)}_{zavisne}$$

$$\sum_{b=1}^{m}\left(\Im_b+\sum_{\nu=1}^{l}\lambda_\nu\frac{\partial f^\nu}{\partial q^b}\right)\delta q^b+\sum_{\rho=m+1}^{n}\left(\Im_\rho+\sum_{\nu=1}^{l}\lambda_\nu\frac{\partial f^\nu}{\partial q^\rho}\right)\delta q^\rho=0,$$

- (**)

- Одређујемо λ_ν тако да је :

$$\Im_\rho+\sum_{\nu=1}^{l}\lambda_\nu\frac{\partial f^\nu}{\partial q^\rho}=0,\quad \rho=m+1,\dots,n$$

- 0

- У матричном облику:

$$\left\{\Im_\rho\right\}+\left[\frac{\partial f^\nu}{\partial q^\rho}\right]\left\{\lambda_\nu\right\}=0,$$

$$\left\{\lambda_\nu\right\}=\left[\frac{\partial f^\nu}{\partial q^\rho}\right]^{-1}\left\{\Im_\rho\right\}\qquad \det\left[\frac{\partial f^\nu}{\partial q^\rho}\right]\neq 0$$

- Због независности веза

- На основу (**) и независности δq^b следи :

$$\sum_{b=1}^{m}\left(\Im_b+\sum_{\nu=1}^{l}\lambda_\nu\frac{\partial f^\nu}{\partial q^b}\right)\delta q^b=0, \quad \Longrightarrow \quad \Im_b+\sum_{\nu=1}^{l}\lambda_\nu\frac{\partial f^\nu}{\partial q^b}=0, \quad b=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{\beta=1}^{n}a_{b\beta}\ddot{q}^\beta+\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,b}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma-Q_b+\sum_{\nu=1}^{l}\lambda_\nu\frac{\partial f^\nu}{\partial q^b}=0,\ b=1,\ldots,m\,.$$

Уобичајено је да се претходне диф. једначине приказују у следећем облику-Ланґражеових једначина друге врсте у ков. облику са Ланґражеовим множитељима веза

$$\sum_{\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta}\ddot{q}^\beta+\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma-Q_\alpha+\sum_{\nu=1}^{l}\lambda_\nu\frac{\partial f^\nu}{\partial q^\alpha}=0,\ \alpha=1,\ldots,n\,,$$

Где су придодате везе

$$f^\nu\left(q^1,\quad q^2,\quad \ldots\quad q^n\right)=0,$$

$$\nu=1,2,\ldots,l<n$$

Непознате величине n $\left(q^1, \quad q^2, \quad \ldots \quad q^n\right) + l$ *Лангранжеових множитеља веза* $\lambda_\nu, \ \nu = 1, 2, \ldots, l$