

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Механика робота

ВЕЖБЕ - ТРИНАЕСТА НЕДЕЉА

ПРИПРЕМА ЗА РАЧУНСКИ КОЛОКВИЈУМ

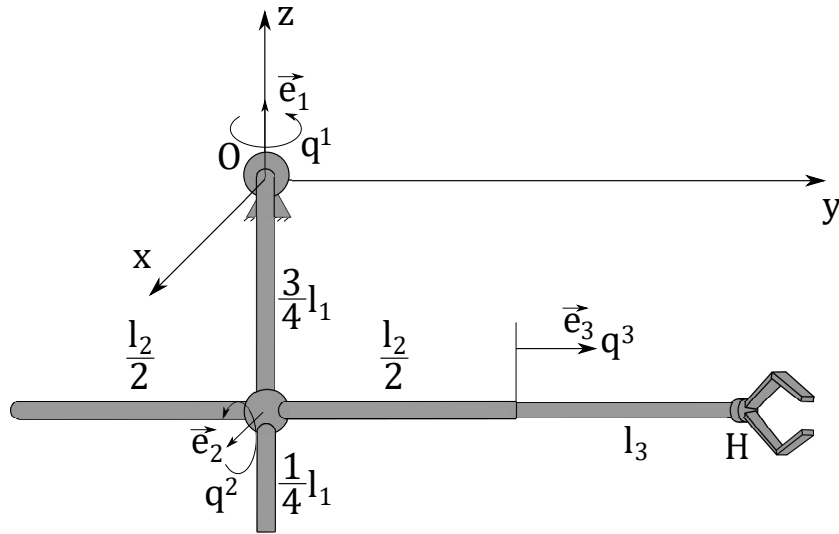
Београд, 2023.

NR

Задатак 18 За робот са 3 степена слободe приказан на слици у референтној конфигурацији, одредити:

- положај врха хваталке \vec{r}_H ,
- кинетичку енергију трећег сегмента робота E_{k_3} ,
- коефицијент метричког тензора a_{12} ,
- Кристофелов симбол прве врсте $\Gamma_{23,2}$ и
- генералисану силу гравитације која делује на други сегмент робота $Q_{2(g)}$.

Дате су следеће вредности генералисаних координата и генералисаних брзина, респективно: $q^i = 0, 1 \cdot i$ [rad, m], $\dot{q}^i = 0, 2 \cdot i$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $i = 1, 2, 3$. Сматрати да су сегменти робота хомогени штапови занемарљивог попречног пресека, масе $m_i = 2$ kg, $i = 1, 2, 3$, и дужина $l_1 = l_2 = 4$ m, $l_3 = 2$ m.



Решење

Уводимо параметар ξ_i који је једнак јединици уколико је зглоб i призматични, а нули ако је цилиндрични. За параметар $\bar{\xi}_i$ важи обратно. У овом случају је:

$$\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = 1, \bar{\xi}_3 = 0$$

Јединични вектори оса ротације и translације сегмената одређени у односу на локалне координатне системе сегмената су:

$$\vec{e}_1^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \vec{e}_2^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{e}_3^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Из практичних разлога, у виду припреме пред израду задатка, сада ће бити одређени и карактеристични вектори свих сегмената:

$$\vec{\rho}_{11}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix}, \quad \vec{\rho}_{22}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{\rho}_{33}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$
$$\vec{\rho}_1^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \vec{\rho}_2^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{\rho}_3^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Матрице трансформације можемо одредити коришћењем Родриговог обрасца:

$$[A_{0,1}] = [I] + \bar{\xi}_1 \left\{ (1 - \cos q^1) [e_1^d]^2 + \sin q^1 [e_1^d] \right\}$$
$$\{\vec{e}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow [e_1^d] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [e_1^d]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$[A_{0,1}] = \begin{bmatrix} 0,995 & -0,0998 & 0 \\ 0,0998 & 0,995 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$[A_{1,2}] = [I] + \bar{\xi}_2 \left\{ (1 - \cos q^2) [e_2^d]^2 + \sin q^2 [e_2^d] \right\}$$
$$\{\vec{e}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow [e_2^d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [e_2^d]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9801 & -0,1987 \\ 0 & 0,1987 & 0,9801 \end{bmatrix}$$

Матрица трансформације $[A_{2,3}]$ је јединична јер је $\bar{\xi}_3 = 0$.

$$[A_{2,3}] = [I] + \bar{\xi}_3 \left\{ (1 - \cos q^3) [e_3^d]^2 + \sin q^3 [e_3^d] \right\} = [I]$$

Сложена матрица трансформације $[A_{0,2}]$ је:

$$[A_{0,2}] = [A_{0,1}] [A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 0,995 & -0,0978 & 0,0198 \\ 0,0988 & 0,9752 & -0,1977 \\ 0 & 0,1987 & 0,9801 \end{bmatrix}$$

Преостале матрице трансформације су већ одређене јер је $[A_{2,3}]$ јединична матрица:

$$\begin{aligned} [A_{0,3}] &= [A_{0,1}] [A_{1,2}] [A_{2,3}] = [A_{0,1}] [A_{1,2}] [I] = [A_{0,2}] \\ [A_{1,3}] &= [A_{1,2}] [A_{2,3}] = [A_{1,2}] [I] = [A_{1,2}] \end{aligned}$$

Тензоре инерције можемо одредити на основу познатих израза за одређивање аксијалног момента инерције хомогених штапова, где ће аксијални момент инерције за подужну осу штапа бити занемарљиво мали, тј. једнак нули, с обзиром на то да је попречни пресек штапа занемарљиво мали. Дакле, за први сегмент важи:

$$J_{c_1}^{(1)} = \begin{bmatrix} J_{c_{\xi_1}}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & J_{c_{\eta_1}}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{c_{\zeta_1}}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 l_1^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2 \quad (1)$$

Аналогно томе су одређени и тензори инерције другог и трећег сегмента:

$$J_{c_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \text{ kgm}^2 \quad (2)$$

$$J_{c_3}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ kgm}^2 \quad (3)$$

Положај врха хватаљке \vec{r}_H

$$\boxed{\vec{r}_H = \sum_{\alpha=1}^n (\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} q^{\alpha})} \Rightarrow \vec{r}_H^{(0)} = \vec{\rho}_{11}^{(0)} + \vec{\rho}_{22}^{(0)} + \vec{\rho}_{33}^{(0)} + q^3 \vec{e}_3^{(0)}$$

С обзиром на координатне системе у којима су ти вектори задати, морамо ивршити следеће трансформације:

$$\vec{r}_H^{(0)} = [A_{0,1}] \left\{ \vec{\rho}_{11}^{(1)} \right\} + [A_{0,2}] \left\{ \vec{\rho}_{22}^{(2)} \right\} + [A_{0,3}] \left\{ \vec{\rho}_{33}^{(3)} \right\} + q^3 [A_{0,3}] \left\{ \vec{e}_3^{(3)} \right\}$$

Положај врха хватаљке је:

$$\vec{r}_H^{(0)} = \begin{pmatrix} -0,4205 \\ 4,1929 \\ -2,0861 \end{pmatrix}$$

Кинетичка енергија трећег сегмента Кинетичка енергија трећег сегмента може се одредити на основу израза:

$$E_{k_3} = \frac{1}{2} m_3 \left(\vec{V}_{c_3}^{(3)} \right) \left\{ \vec{V}_{c_3}^{(3)} \right\} + \frac{1}{2} \left(\vec{\omega}_3^{(3)} \right) [J_{c_3}^{(3)}] \left\{ \vec{\omega}_3^{(3)} \right\} \quad (4)$$

Дакле, потребно је да одредимо $\vec{V}_{c_3}^{(3)}$ и $\vec{\omega}_3^{(3)}$.

Брзина центра масе трећег сегмента Брзину центра масе можемо одредити на основу израза:

$$\boxed{\vec{V}_{c_i} = \sum_{\beta=1}^i \vec{T}_{\beta(i)} \dot{q}^{\beta}} \quad (5)$$

где су квазибазни вектори:

$$\boxed{\vec{T}_{\beta(i)} = \bar{\xi}_{\beta} \vec{e}_{\beta} \times \vec{R}_{\beta(i)} + \xi_{\beta} \vec{e}_{\beta}} \quad (6)$$

док је $\vec{R}_{\beta(i)}$ вектор положаја центра масе i -тог сегмента у односу на зглоб сегмента β :

$$\boxed{\vec{R}_{\beta(i)} = \sum_{\alpha=\beta}^i (\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} q^{\alpha}) + \vec{\rho}_i} \quad (7)$$

Дакле, на основу израза (5) следи:

$$\vec{V}_{c_3} = \sum_{\beta=1}^3 \vec{T}_{\beta(i)} \dot{q}^\beta = \vec{T}_{1(3)} \dot{q}^1 + \vec{T}_{2(3)} \dot{q}^2 + \vec{T}_{3(3)} \dot{q}^3$$

што је у односу на локални координатни систем трећег сегмента:

$$\vec{V}_{c_3}^{(3)} = \vec{T}_{1(3)}^{(3)} \dot{q}^1 + \vec{T}_{2(3)}^{(3)} \dot{q}^2 + \vec{T}_{3(3)}^{(3)} \dot{q}^3 \quad (8)$$

Потребно је одредити одговарајуће квазибазне векторе, на основу израза (6):

$$\vec{T}_{1(3)}^{(1)} = 1 \cdot \vec{e}_1^{(1)} \times \vec{R}_{1(3)}^{(1)} + 0 \cdot \vec{e}_1^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \times \vec{R}_{1(3)}^{(1)} = [e_1^{d(1)}] \left\{ \vec{R}_{1(3)}^{(1)} \right\} \quad (9)$$

$$\vec{T}_{2(3)}^{(2)} = 1 \cdot \vec{e}_2^{(2)} \times \vec{R}_{2(3)}^{(2)} + 0 \cdot \vec{e}_2^{(2)} = \vec{e}_2^{(2)} \times \vec{R}_{2(3)}^{(2)} = [e_2^{d(2)}] \left\{ \vec{R}_{2(3)}^{(2)} \right\} \quad (10)$$

$$\vec{T}_{3(3)}^{(3)} = 0 \cdot \vec{e}_3^{(3)} \times \vec{R}_{3(3)}^{(3)} + 1 \cdot \vec{e}_3^{(3)} = \vec{e}_3^{(3)} \quad (11)$$

У наставку ће на основу израза (7) бити одређени вектори $\vec{R}_{1(3)}^{(1)}$ и $\vec{R}_{2(3)}^{(2)}$, који су нам потребни у једначинама (9) и (10).

$$\vec{R}_{1(3)}^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^3 (\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha q^\alpha) + \vec{\rho}_i \Rightarrow \vec{R}_{1(3)}^{(1)} = \vec{\rho}_{11}^{(1)} + \vec{\rho}_{22}^{(1)} + \vec{\rho}_{33}^{(1)} + q^3 \vec{e}_3^{(1)} + \vec{\rho}_3^{(1)}$$

где ће бити извршене неопходне трансформације:

$$\vec{R}_{1(3)}^{(1)} = \left\{ \vec{\rho}_{11}^{(1)} \right\} + [A_{1,2}] \left\{ \vec{\rho}_{22}^{(2)} \right\} + [A_{1,3}] \left(\left\{ \vec{\rho}_{33}^{(3)} \right\} + q^3 \left\{ \vec{e}_3^{(3)} \right\} + \left\{ \vec{\rho}_3^{(3)} \right\} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3, 234 \\ -2, 344 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Аналогно томе:

$$\vec{R}_{2(3)}^{(2)} = \sum_{\alpha=2}^3 (\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha q^\alpha) + \vec{\rho}_i \Rightarrow \vec{R}_{2(3)}^{(2)} = \vec{\rho}_{22}^{(2)} + \vec{\rho}_{33}^{(2)} + q^3 \vec{e}_3^{(2)} + \vec{\rho}_3^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3, 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Када се решења (12) и (13) уврсте у једначине (9) и (10), одређени су тражени квазибазни вектори, као и вектор $\vec{T}_{3(3)}^{(3)}$ који је већ одређен у

једначини (11):

$$\vec{T}_{1(3)}^{(1)} = [e_1^{d(1)}] \{ \vec{R}_{1(3)}^{(1)} \} = \begin{Bmatrix} -3, 234 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\vec{T}_{2(3)}^{(2)} = [e_2^{d(2)}] \{ \vec{R}_{2(3)}^{(2)} \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3, 3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\vec{T}_{3(3)}^{(3)} = \vec{e}_3^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Коначно, на основу израза (8) и одговарајућих трансформација, брзина центра масе трећег сегмента је:

$$\vec{V}_{c_3}^{(3)} = [A_{1,3}]^T \vec{T}_{1(3)}^{(1)} \dot{q}^1 + [A_{2,3}]^T \vec{T}_{2(3)}^{(2)} \dot{q}^2 + \vec{T}_{3(3)}^{(3)} \dot{q}^1 = \begin{Bmatrix} -0, 2156 \\ 0, 6 \\ 0, 44 \end{Bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (17)$$

Угаона брзина трећег сегмента

$$\boxed{\vec{\omega}_i = \sum_{\alpha=1}^i \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \dot{q}^\alpha} \Rightarrow \vec{\omega}_3 = \vec{e}_1 \dot{q}^1 + \vec{e}_2 \dot{q}^2$$

Пошто је потребно да одредимо угаону брзину у односу на локални координатни систем трећег сегмента, извршићемо неопходне трансформације:

$$\begin{aligned} \{ \vec{\omega}_3^{(3)} \} &= [A_{1,3}]^T \{ \vec{e}_1^{(1)} \} \dot{q}^1 + [A_{2,3}]^T \{ \vec{e}_2^{(2)} \} \dot{q}^2 \\ \vec{\omega}_3^{(3)} &= \begin{Bmatrix} 0, 4 \\ 0, 0397 \\ 0, 196 \end{Bmatrix} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Када уврстимо решења (3), (17) и (18) у једначину (4), кинетичка енергија трећег сегмента је:

$$E_{k_3} = 2, 587 \text{ J}$$

Коефицијент метричког тензора a_{12}

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i=\text{sup}(\alpha,\beta)}^n m_i \left(\vec{T}_{\alpha(i)} \right) \left\{ \vec{T}_{\beta(i)} \right\} + \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta \left(\vec{e}_\alpha^{(i)} \right) [J_{c_i}^{(i)}] \left\{ \vec{e}_\beta^{(i)} \right\}$$

Дакле:

$$\begin{aligned} a_{12} &= \sum_{i=\text{sup}(1,2)}^3 m_i \left(\vec{T}_{1(i)} \right) \left\{ \vec{T}_{2(i)} \right\} + \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \left(\vec{e}_1^{(i)} \right) [J_{c_i}^{(i)}] \left\{ \vec{e}_2^{(i)} \right\} \\ &= \sum_{i=2}^3 m_i \left(\vec{T}_{1(i)} \right) \left\{ \vec{T}_{2(i)} \right\} + \left(\vec{e}_1^{(i)} \right) [J_{c_i}^{(i)}] \left\{ \vec{e}_2^{(i)} \right\} \end{aligned}$$

Тј.

$$\begin{aligned} a_{12} &= m_2 \left(\vec{T}_{1(2)} \right) \left\{ \vec{T}_{2(2)} \right\} + \left(\vec{e}_1^{(2)} \right) [J_{c_2}^{(2)}] \left\{ \vec{e}_2^{(2)} \right\} \\ &\quad + m_3 \left(\vec{T}_{1(3)} \right) \left\{ \vec{T}_{2(3)} \right\} + \left(\vec{e}_1^{(3)} \right) [J_{c_3}^{(3)}] \left\{ \vec{e}_2^{(3)} \right\} \end{aligned}$$

Потребно је извршити следеће трансформације јединичних вектора осе ротације:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^{(2)} &= [A_{1,2}]^T \vec{e}_1^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,1987 \\ 0,9801 \end{Bmatrix} \\ \vec{e}_1^{(3)} &= [A_{1,3}]^T \vec{e}_1^{(1)} = [A_{1,2}]^T \vec{e}_1^{(1)} = \vec{e}_1^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,1987 \\ 0,9801 \end{Bmatrix} \\ \vec{e}_2^{(3)} &= [A_{2,3}]^T \vec{e}_2^{(2)} = \vec{e}_2^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Вектори $\vec{T}_{1(3)}^{(1)}$ и $\vec{T}_{2(3)}^{(2)}$ су већ одређени у (14) и (15) и само је због њиховог скаларног множења потребно извршити трансформацију:

$$\vec{T}_{2(3)}^{(1)} = [A_{1,2}] \vec{T}_{2(3)}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,2185 \\ 1,0781 \end{Bmatrix}$$

Потребно је одредити векторе $\vec{T}_{1(2)}$ и $\vec{T}_{2(2)}$

$$\begin{aligned} \vec{T}_{1(2)}^{(1)} &= 1 \cdot \vec{e}_1^{(1)} \times \vec{R}_{1(2)}^{(1)} + 0 \cdot \vec{e}_1^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \times \vec{R}_{1(2)}^{(1)} = \left[e_1^{d(1)} \right] \left\{ \vec{R}_{1(2)}^{(1)} \right\} \\ \vec{T}_{2(2)}^{(2)} &= 1 \cdot \vec{e}_2^{(2)} \times \vec{R}_{2(2)}^{(2)} + 0 \cdot \vec{e}_2^{(2)} = \vec{e}_2^{(2)} \times \vec{R}_{2(2)}^{(2)} = \left[e_2^{d(2)} \right] \left\{ \vec{R}_{2(2)}^{(2)} \right\} \end{aligned}$$

где је потребно да одредимо и векторе $\vec{R}_{1(2)}^{(1)}$ и $\vec{R}_{2(2)}^{(2)}$, на основу израза (7):

$$\begin{aligned}\vec{R}_{1(2)}^{(1)} &= \vec{\rho}_{11}^{(1)} + \vec{\rho}_{22}^{(1)} + \vec{\rho}_2^{(1)} = \vec{\rho}_{11}^{(1)} + [A_{1,2}] \left(\vec{\rho}_{22}^{(2)} + \vec{\rho}_2^{(2)} \right) \\ \vec{R}_{2(2)}^{(2)} &= \vec{\rho}_{22}^{(2)} + \vec{\rho}_2^{(2)}\end{aligned}$$

Следи:

$$\vec{T}_{1(2)}^{(1)} = \left[e_1^{d(1)} \right] \left\{ \vec{\rho}_{11}^{(1)} + [A_{1,2}] \left(\vec{\rho}_{22}^{(2)} + \vec{\rho}_2^{(2)} \right) \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\vec{T}_{2(2)}^{(2)} = \left[e_2^{d(2)} \right] \left\{ \vec{\rho}_{22}^{(2)} + \vec{\rho}_2^{(2)} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

С обзиром на то да се претходно одређени вектори $\vec{T}_{1(2)}^{(1)}$ и $\vec{T}_{2(2)}^{(2)}$ множе скаларно, у општем случају би било неопходно одредити и одговарајућу трансформацију једног од њих. Овде то неће бити урађено јер се ради о „нула векторима”.

Коначно, коефицијент метричког тензора a_{12} је:

$$a_{12} = 0$$

Кристофелов симбол прве врсте $\Gamma_{23,2}$

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \sum_{i=\sup(\beta,\gamma)}^n m_i \bar{\xi}_\alpha \left(\vec{e}_\alpha \times \vec{T}_{\beta(i)} \right) \left\{ \vec{T}_{\gamma(i)} \right\} + \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta \bar{\xi}_\gamma \left(\vec{e}_{\beta\gamma}^{(i)} \right) \left[\Pi_{c_i}^{(i)} \right] \left\{ \vec{e}_\alpha^{(i)} \right\}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{23,2} &= \sum_{i=\sup(3,2)}^3 m_i \bar{\xi}_2 \left(\vec{e}_2 \times \vec{T}_{3(i)} \right) \left\{ \vec{T}_{2(i)} \right\} + \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_2 \left(\vec{e}_{32}^{(i)} \right) \left[\Pi_{c_i}^{(i)} \right] \left\{ \vec{e}_2^{(i)} \right\} \\ &= \sum_{i=3}^3 m_i \left(\vec{e}_2 \times \vec{T}_{3(i)} \right) \left\{ \vec{T}_{2(i)} \right\} \\ &= m_3 \left(\vec{e}_2 \times \vec{T}_{3(3)} \right) \left\{ \vec{T}_{2(3)} \right\} \\ &= m_3 \left(\left[e_2^{d(2)} \right] \left\{ \vec{T}_{3(3)}^{(2)} \right\} \right) \left\{ \vec{T}_{2(3)}^{(2)} \right\}\end{aligned}$$

Квазибазни вектори су већ одређени у (15) и (16), те је потребна само следећа трансформација:

$$\vec{T}_{3(3)}^{(2)} = [A_{2,3}] \vec{T}_{3(3)}^{(3)} = [I] \vec{T}_{3(3)}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Дакле, тражени Кристофелов симбол прве врсте је:

$$\Gamma_{23,2} = 6, 6$$

Генералисана сила $Q_{2(g)}$

$$Q_{\alpha(g)} = \sum_{i=\alpha}^n m_i \vec{g}^{(0)} \vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}$$

$$Q_{2(g)} = \sum_{i=2}^3 m_i \vec{g}^{(0)} \vec{T}_{2(i)}^{(0)} = m_2 \vec{g}^{(0)} \vec{T}_{2(2)}^{(0)} + m_3 \vec{g}^{(0)} \vec{T}_{2(3)}^{(0)}$$

$$Q_{2(g)} = m_2 (\vec{g}^{(0)}) \left\{ \vec{T}_{2(2)}^{(0)} \right\} + m_3 (\vec{g}^{(0)}) \left\{ \vec{T}_{2(3)}^{(0)} \right\}$$

Може се написати и на следећи начин:

$$Q_{2(g)} = -m_2 g (0 \ 0 \ 1) \left\{ \vec{T}_{2(2)}^{(0)} \right\} - m_3 g (0 \ 0 \ 1) \left\{ \vec{T}_{2(3)}^{(0)} \right\}$$

Када трансформишемо већ познате квазибазне векторе (15) и (20):

$$\vec{T}_{2(2)}^{(0)} = [A_{0,2}] \left\{ \vec{T}_{2(2)}^{(2)} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}_{2(3)}^{(0)} = [A_{0,2}] \left\{ \vec{T}_{2(3)}^{(2)} \right\} = \begin{pmatrix} 0,0624 \\ -0,6501 \\ 3,234 \end{pmatrix}$$

можемо одредити генералисану силу:

$$Q_{2(g)} = -63,45$$