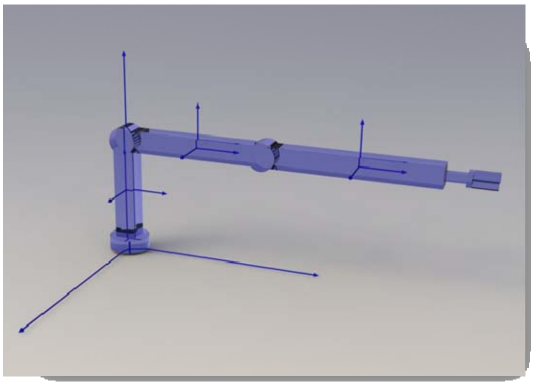
12. Uvod u teoriju upravljanja robotskim sistemima

12.1 Osnovna postavka problema



-Upravljanje radom uočenog sistema treba da obezbedi da se stvarno ponašanje ili podudara ili da bude dovoljno blisko zadatom–željenom ponašanju tog sistema.
-Upravljanje se može izabrati iz nekog višečlanog skupa dopustivih i ostvarljivih upravljanja.
Isto tako,u toku rada na sintezi sistema dobijaju se razne varijante sistema koje ispunjavaju uslove zadatka.
optimalan u tom smislu - teorija optimalnog upravljanja

Robotski sistem sa aspekta automatskog upravljanja, predstavlja jedan nelinearni višestruko prenosni nestacionarni dinamički sistem.

Strukturno posmatrano, jedan ovakav sistem se sastoji iz upravljačkog sistema, koji je najčešće obično digitalnog tipa, i objekta.

Pod pojmom objekta se ovde podrazumeva mehanička struktura tj. manipulator zajedno sa aktuatorima.

Zadatak upravljanja se može iskazati na sledeći način: ***neophodno je obezbediti takvu promenu upravljačkih veličina tako da završni uređaj robotskog sistema ostvari zahtevano kretanje u prostoru.***

Pri tome, projektovanje sistema upravljanja može biti pojednostavljeno prikazan u tri faze:

- upoznavanje za fizičkim sistemom koji se razmatra
- modeliranje
- specifikacija upravljačkih zahteva (glavni ciljevi upravljanja su:

stabilnost ,
regulacija(poziciono upravljanje),
praćenje trajektorija, (upravljanje kretanjem),
optimizacija

Najvažnija osobina u upravljačkom sistemu jeste stabilnost istog (gde se najčešće primenjuje tzv. *Lyapunov-ska teorija* stabilinosti i (*input–output)* *ulazno -izlazne teorije stabilnosti.*

Upravljanje.Dopustivo upravljanje.

U opštem slučaju neka je stanje sistema određeno vektorom **x** u m – dimenzionom euklidskom prostoru stanja (faznom prostoru) V_m, pri čemu su koordinate stanja x^i $(i=1,2,...,m)$ elementi vektora **x**. Ako je razmatrani sistem mehanički sa n stepena slobode njegovo kretanje opisano je u prostoru stanja V_m $(m=2n)$ sistemom od $2n$ diferencijalnih jednačina prvog reda. Ukoliko uporedo sa prostorom V_m postoji r – dimenzioni vektorski prostor U_r vektora **u** čiji elementi u_α $(\alpha=1,2,...,r)$, figurišu u diferencijalnim jednačinama kretanja sistema, njihovim izborom na odgovarajući način može da se utiče na promenu stanja sistema, tj. može da se upravlja kretanjem sistema. Takav vektor zove se *vektor upravljanja* a njegove koordinate u_α *funkcije upravljanja* ili, samo, *upravljanja.* U opštem slučaju, upravljanja su ograničena kao posledica nekih nametnutih uslova ili realnih mogućnosti upravljačkih sistema. Neka je G_u neka oblast prostora U_r određena tim ograničenjima. Upravljanja koja ispunjavaju uslov

$$\boldsymbol{u} \in G_u \subset U_r \tag{12.1}$$

nazivaju se *dopustiva upravljanja*, a oblast *skup dopustivih upravljanja*. Oblast G_u može da bude otvoren ili zatvoren skup, konstantan ili promenljiv. Dopustiva upravljanja mogu biti prekidna sa konačnim brojem prekida u konačnom intervalu $[t_o, t_1]$. Dalje će se podrazumevati da je taj skup otvoren i promenljiv, ako se to drugačije ne naglasi.

Cilj upravljanja. Funkcija cilja

Svakom upravljanju odgovara neka promena stanja sistema, odnosno neko kretanje sistema.

Pri tome, osnovni problem je da se odrede upravljanja iz (12.1) tako da se sistem kreće u skladu sa nekim unapred postavljenim ciljem.

Osnovni *cilj upravljanja* kretanjem mehaničkih sistema izražava se zahtevom da sistem, iz nekog početnog stanja S_0, pređe u stanje S_1 i da taj proces bude obavljen u intervalu $[t_o, t_1]$.

U opštem slučaju, početno stanje $t_0, \boldsymbol{x}(t_0)$ može da bude na mnogostrukosti:

$$\varphi_k\left[t_0, \boldsymbol{x}\left(t_0\right)\right]=0 \qquad \left(k=1,2,...,p\leq m\right) \tag{12.2}$$

a krajnje stanje na mnogostrukosti:

$$\psi_l\left[t_1, \boldsymbol{x}(t_1)\right]=0 \qquad \left(l=1,2,...,s\leq m\right) \tag{12.3}$$

pri čemu, u nekim problemima, interval $\left[t_o, t_1\right]$ nije unapred određen. Ako, među dopustivim upravljanjima postoje takva, koja obezbeđuju ostvarenje postavljenog cilja upravljanja, *sistem je upravljiv*.

Osnovni kriterijumi egzistencije takvih upravljanja čine *uslove upravljivosti* i, u opštem slučaju, njihovo postavljanje je veoma složeno.

Kalmanov uslov upravljivosti je napoznatiji i on je bio postavljen za linearne stacionarne dinamičke sisteme.On se može koristiti samo za linearizovane nelinearne mehaničke sisteme. Za nelinearne sisteme uslovi upravljivosti *" u malom"* su dati od strane (*Krasovskii, 1968; Kirillova and Gabasov, 1971)*.

Takodje značajnu ulogu u uslovima upravljivosti mehaničkih sistema imaju i karakter generalisanih sila koje deluju na dati mehanički sistem.Ove sile mogu imati opštu formu, tj. da nisu potencijalne, disipativni karakter, ili prirodu intezivnih oscilacija.
Dovoljne uslovi upravljivosti za takve mehaničke sisteme je proučavan i dat od strane (Pyatnitskii, 1996, 1997) gde su razmatrane spoljašnje sile sa ograničenom amplitudom kao dozvoljenim (mogućim).Slični uslovi su dokazani i za neholonomne mehaničke sisteme (Matyukhin, 2004).
Upravljačke sile se dobijaju upotrebom odgovarajućih aktuatora datog mehaničkog sistema, tako da je potrebno uzeti u obzir i dinamiku samih aktuatora u razamatranje u eksplicitnoj formi. Neka su diferencijalne jednačine kretanja robotskog sistema date u sledećem obliku (9.1)-prva grupa jednačina.Druga grupa jednačina predstavlja dinamiku aktuatora razmatranog sistema

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\gamma}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q^\gamma}=Q_\gamma+M_\gamma, \quad \frac{dM_\gamma}{dt}=F_\gamma\left(q,\dot{q},M,t\right)+u_\gamma, \quad \gamma=1,2,...,n \tag{12.4}$$

Kovarijantni oblik diferencijalnih jednačina kretanja robotskog sistema je:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\gamma}\left(q\right)\ddot{q}^\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}\left(q\right)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta=Q_\gamma\left(q,\dot{q},t\right)+M_\gamma \tag{12.5}$$

pri čemu su sa $Q_\gamma\left(q,\dot{q},t\right)$ označene spoljašnje generalisane sile (sila zemljine teže, sile u oprugama, sile viskoznog trenja,itd.) a sa M_γ generalisane sile od sistema pogonskih (aktuatorskih) sila. Pri tome,dinamika aktuatora se na primer, može prikazati u obliku redukovane jednačine električnog motora jednosmerne struje (dc motor):

$$\lambda \dot{M} = -rM + \nu \dot{q} + u \tag{12.6}$$

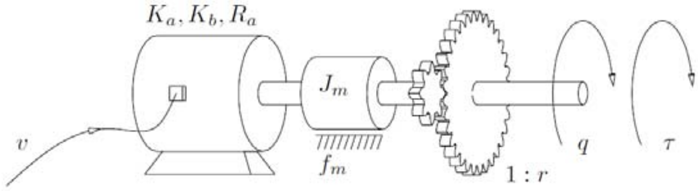


Figure 3.11. Diagram of a DC motor

gde je $\lambda > 0$ predstavlja induktivnost rotora, r - njegov otpor, $\nu \dot{q}$ predstavlja kontraelektormotornu silu, odnosno sa u je označen napon koji predstavlja upravljačku veličinu. Prema tome, u (12.4) veličine $u_\gamma,\ \gamma = 1,2,...,n$ predstavljaju upravljačke veličine sistema.Takođe, uočava se da sistem (12.4) ima sledeće osobine,odnosno uvode se sledeće pretpostavke:

a) koeficijenti metričkog tenzora $a_{\alpha\gamma}(q),\quad \alpha,\gamma = 1,2,...,n$ predstavljaju inercijalne karakteristike robotskog sistema i za koje važe sledeće nejednakosti za sve vrednosti:

$$\left| a_{\alpha\gamma}(q) \right| \le d, \quad \alpha,\gamma = 1,2,...,n, \quad d = const > 0 \tag{12.7}$$

gde je d neka jedinstvena konstanta.

b) kako su $a_{\alpha\gamma} = a_{\alpha\gamma}(q)$ glatke funkcije, važe za sve vrednosti q sledeće nejednakosti

$$\left| \frac{\partial a_{\alpha\gamma}(q)}{\partial q^\beta} \right| \le d, \quad \left| \frac{\partial^2 a_{\alpha\gamma}(q)}{\partial q^\beta \partial q^\delta} \right| \le d, \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta = 1,2,...,n \tag{9.8}$$

c) na osnovu osobine da kinetička energija razmatranog sistema (a to je slučaj za mehaničke sisteme koji su podvrgnuti skleronomnim vezama) predstavlja homogenu kvadratnu formu generalisanih brzina $\dot{q}^1, \dot{q}^2, ..., \dot{q}^n$ važe sledeće nejednakosti:

$$\lambda_1 |\dot{q}|^2 \le E_k(q,\dot{q}) \le \lambda_2 |\dot{q}|^2, \qquad |\dot{q}|^2 = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 \tag{9.9}$$

za sve vrednosti $q, \dot{q}$, gde su λ_1, λ_2 neke pozitivne konstante, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \infty$.

d) za vrednosti generalisanih sila $Q_\gamma(q,\dot{q},t)$ se uvodi pretpostavka da su ograničene za sve vrednosti $q, \dot{q}$ i $t \ge t^0$:

$$\left|Q_\gamma\left(q,\dot{q},t\right)\right| \le h_\gamma, \quad h_\gamma = const \ge 0, \quad \gamma = 1,2,...,n \tag{9.10}$$

e) odgovarajući izvodi generalisanih sila $Q_\gamma\left(q,\dot{q},t\right)$ su takođe ograničeni:

$$\left|\frac{\partial Q_\gamma\left(q,\dot{q},t\right)}{\partial t}\right| \le l_\gamma^1, \quad \left|\frac{\partial Q_\gamma\left(q,\dot{q},t\right)}{\partial q^\alpha}\right| \le l_\gamma^2, \quad \left|\frac{\partial Q_\gamma\left(q,\dot{q},t\right)}{\partial \dot{q}^\beta}\right| \le l_\gamma^3, \tag{9.11}$$

$l_\gamma^s = const \ge 0, \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,...,n$

f) funkcije $F_\gamma(q,\dot{q},M,t)$ su ograničene za sve vrednosti $q,\dot{q},M$ i $t \ge t^0$

$$\left|F_\gamma(q,\dot{q},M,t)\right| \le F_\gamma^1, \quad F_\gamma^1 = const > 0 \tag{9.12}$$

g) upravljačke veličine sistema $u_\gamma = u_\gamma(t), \ \gamma = 1,2,...,n$ su ograničene

$$\left|u_\gamma(t)\right| \le L_\gamma, \ L_\gamma = const \ge 0, \quad \gamma = 1,2,...,n \tag{9.13}$$

Pri tome, apsolutno neprekidne funkcije vremena $\left\{q\left(t\right),\dot{q}\left(t\right),M(t)\right\}$ predstavljaju rešenja sistema (9.1).Upravljivost mehaničkih sistema se ovde podrazumeva u smislu upravljivosti koje je definisao Kalman. Skup U dopustivih upravljanja sadrži sve moguće vektorske funkcije $u\left(t\right)=\left\{u_1(t),u_2(t),...,u_n(t)\right\}$ koje zadovoljavaju ograničenja (9.10). Ovaj skup je definisan sa konstantnim parametrima L_γ, tj. $U = U\left(L_\gamma\right)$.

Definicija upravljivosti (Kalman) Sistem (12.4) je upravljiv sistem u klasi dopustivih upravljanja U ako za proizvoljne tačke $S^i\left(q^i,\dot{q}^i,M^i\right)$ i $S^f\left(q^f,\dot{q}^f,M^f\right)$ sistema u prostoru stanja $P=\left(q^1,q^2,...,q^n,\dot{q}^1,\dot{q}^2,...,\dot{q}^n,M_1,...,M_n\right)$ ako postoji upravljanje $u \in U$ koji prevodi sistem iz S^i u tačku S^f za konačno vreme.

<u>Lokalni kriterijum upravljivosti</u>

Kao što je istaknuto ranije Kalmanov kriterijum upravljivosti je bio definisan za linearne stacionarne dinamičke sisteme pri čemu se on može koristiti i za nelinearne sisteme ako je moguća linearizacija jednačina kretanja datog sistema.Drugim rečima, uopšteno govoreći, dati kriterijum upravljivosti omogućava nam da proučavamo problem upravljivosti samo lokalno.On se može koristiti samo za linearizovane nelinearne mehanničke sisteme. Za nelinearne sisteme uslovi upravljivosti *"u malom"* su dati od strane (Krasovskii, 1968; Kirillova and Gabasov, 1971).

<u>Nelokalni kritetrijum upravljivosti</u>

Međutim, ovde se izlaže opšti slučaj problema upravljivosti, tj., slučaj nelinearnih sistema u nelokalnoj formulaciji.Ova klasa sistema je predstavljena sa (9.4) u opštoj formi.Kriterijum upravljivosti za čisto mehaničke sisteme, bez uzimanja u obzir dinamike aktuatora je razmatran od strane [Pyatnitskii,1996,1997, Matyukhin and Pyatnitskii,2004, Matyukhin,2004]. Upravljačke sile M_γ u formi $\left|M_\gamma\right| \leq H_\gamma$ mehaničkog sistema su bile direktno razmatrane kao upravljačke veličine i problem upravljivosti je bio razmatran samo u faznom prostoru mehaničkog sistema $P^1 = \left\{q^1, q^2, ..., q^n, \dot{q}^1, \dot{q}^2, ..., \dot{q}^n\right\}$.
U radu (Matyukhin i Pyatnitskii,2004) je predstavljen i razmatran uslov upravljivosti gde je sada uzeto u obzir i $\left|M_\gamma\right| \leq H_\gamma$, $\left|\dot{M}_\gamma\right| \leq L_\gamma$, brzina promene upravljačke veličine M_γ.

<u>Teorema: Neka sistem zadovoljava uslove (12.7- 12.13).Onda postoji broj L^{**} takav da će sistem biti upravljiv u klasi upravljanja: $|u_i| \leq L^{**}, i = 1, 2, ..., n$ pri čemu konstanta zadovoljava $L^{**} > L^{*} + F_1^i, i = 1, 2, ...n$ $|F_i| < F_1^i$</u>

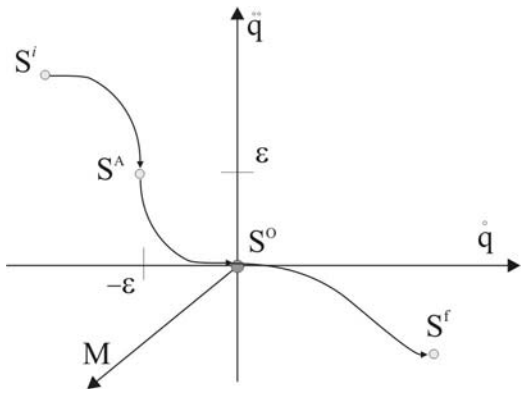
Ovde je od interesa proučavanje problema upravljivosti u proširenom prostoru stanja $P = \left\{q^1, q^2, ..., q^n, \dot{q}^1, \dot{q}^2, ..., \dot{q}^n, M_1, M_2, ..., M_n\right\}$. Prvo se predstavlja i razmatra jednostavniji slučaj sistema (12.18) tj., $Q_\gamma = F_\gamma = 0, \quad \gamma = 1, 2, ..., n$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\gamma}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q^\gamma} = M_\gamma, \quad \frac{dM_\gamma}{dt} = u_\gamma, \quad \gamma = 1, 2, ..., n. \tag{12.28}$$

Teorema 1.([54],[55]) *Neka sistem (12.18) zadovoljava uslove (12.21)-(12.27), onda za bilo koje konstante* $L_\gamma = const > 0$, *sistem će biti upravljiv u klasi upravljanja:*

$$\left|u_\gamma(t)\right| \leq L_\gamma, \ \gamma = 1, 2, ..., n, \quad L_\gamma = const > 0. \tag{12.29}$$

Smisao teoreme ogleda se u činjenici da mehanički sistem (12.13) može biti preveden u bilo koju tačku njegovog prostora stanja P, bez obzira na početno stanje sistema koje je on imao u početnom trenutku, (sl.12.5). Pri tome, dovoljno je da upravljanja imaju samo nenulte vrednosti $L_\gamma = const > 0$. Ovo važi za bilo koji sistem oblika (12.18) i za koja su ograničenja (12.21)-(12.27) zadovoljena.



Slika 12.5

Sam dokaz je zasnovan na činjenici da se sistem može «usporiti», tj. prvo, kretanje sistema može biti takvo da se obezbeđuju male vrednosti brzina i njenih izvoda ($\left|\dot{q}_i^A\right| \le \varepsilon$, $\left|\ddot{q}_i^A\right| \le \varepsilon$, $\left|\dddot{q}_i^A\right| \le \varepsilon$) i pri tome postoji upravljanje u^A koji prevodi sistem za konačno vreme iz proizvoljnog početnog stanja S^i u stanje S^A. Zatim se sistem prevodi iz stanja S^A u nulto stanje S^o a posle iz nultog stanja S^o u proizvoljno konačno stanje S^f.

Teorema 2. ([54],[55]) *Neka sistem (12.18) zadovoljava uslove (12.21)-(12.27). Onda postoji broj L^{**} takav da će sistem biti upravljiv za sledeću klasu upravljanja:*

$$\left|u_\gamma(t)\right| \le L^{**}, \quad \gamma = 1,2,\ldots,n, \tag{12.30}$$

pri čemu L^{**} zadovoljava uslov

$$L^{**} > \max_\gamma \left(l_\gamma^1 + \rho \sum_{k=1}^{n} l_k^2 + a \sum_{k=1}^{n} l_k^3 + F_\gamma^1 \right),$$

$$\left|\dot{q}^\gamma\right| \le \rho, \left|\ddot{q}^\gamma\right| \le a, \quad \rho, a = const \ge 0, \ \left|F_\gamma\right| \le F_\gamma^1. \tag{12.31}$$

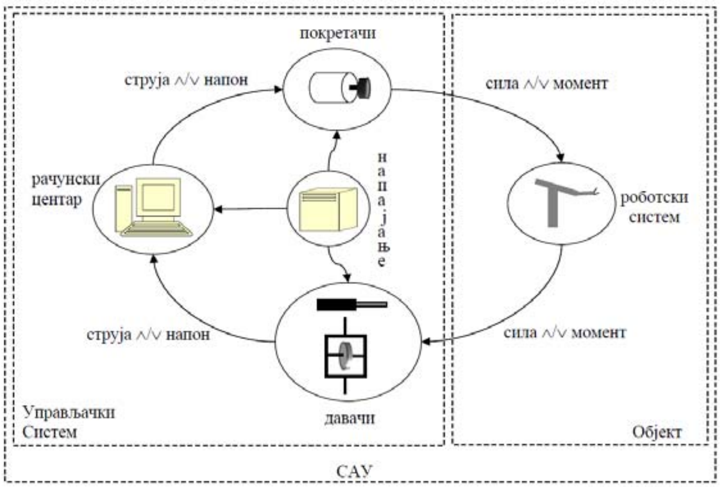
Potrebno je primetiti da pretpostavka $\left|F_\gamma\right| \le F_\gamma^1$ Teoreme 2 je suštinska što se može ilustrovati sledećim primerom gde je dinamika aktuatora data u sledećem obliku

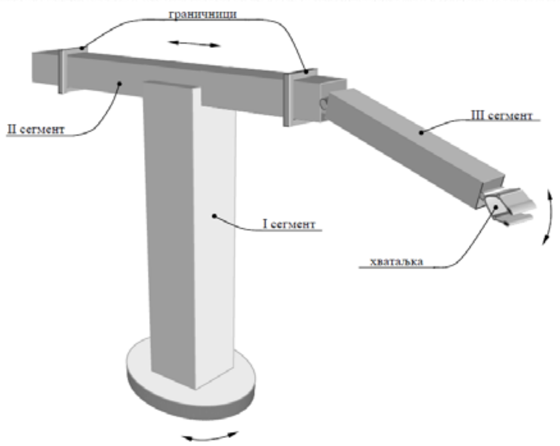
$$\dot{M} = -M + u, \tag{12.32}$$

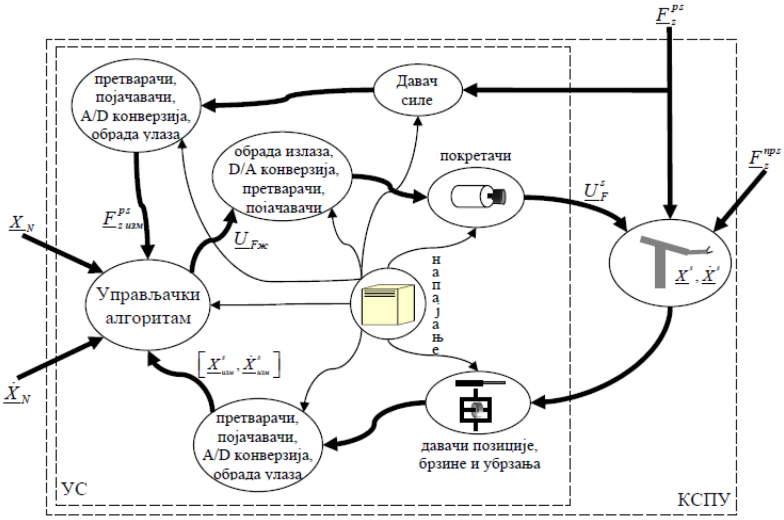
gde za upravljanje u važi (12.30) i $L^{**} = const > 0$. Ovaj sistem je neupravljiv zato što se ne može prevesti iz početnog stanja $M(0) = 0$, na primer, u stanje $M = 2L^{**}$, bez obzira na veličinu unapred definisane vrednosti L^*. Prema tome uslov $\left|F_{\gamma}\right| \leq F_{\gamma}^{1}$ je potreban u opštem slučaju za datu klasu sistema (12.18) za upravljivost istog.

Kriterijum upravljivosti ima jednostavno fizičko značenje i može se izraziti u funkciji upravljačkih i poremećajnih sila koje deluju na dati mehanički sistem. Tako na primer, za posmatrani robot za ispunjenje uslova upravljivosti je potrebno da upravljačke sile dominiraju u odnosu na druge generalisane sile (sile teže, sile vizkoznog trenja, itd.). Dominacija se ogleda u brzini promene upravljačke sile, to jest u prvom izvodu iste.

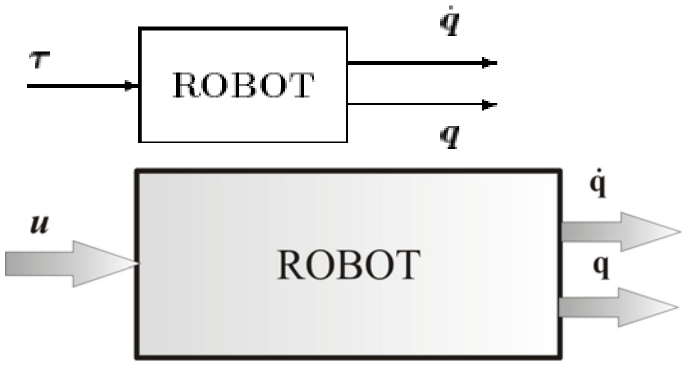
U tom smislu, aktuatorski sistem mora biti «dovoljno snažan» i da radi «dovoljno brzo». Samo u tom slučaju, moguće je da se suzbiju intezivne promene poremećaja okruženja i da se slobodno upravlja datim mehaničkim sistemom.







Modeliranje- Pitanje određivanja egzaktnog modela predstavlja vrlo značajan zadatak u okviru projektovanja upravljačkog sistema robota. Pri tome svaki sastavni deo robotskog sistema (mehanički sklop, senzor, aktuator, upravljački sistem (regulator)) može se uspešno modelovati na osnovu kataloških podataka ili u matematičkom ili u funkcionalnom obliku. Postoje u praksi ograničenja u postupku modeliranja i to realnim mogućnostima sa jedne strane i potrebama sa druge strane. Modeli se mogu podeliti prema više kriterijuma tako da uočavamo: *eksterne* (na osnovu mesta modela u hijerarhijskom upravljanju) i *interne* (sama struktura modela- linearni/nelinearni, stacionarni/nestacionarni itd.), po načinu realizacije: *parametarske* (konvencionalni analitički i numerički modeli, standarndna linearna regresija,sigmoidalne neuronske mreže) i *neparametarske* (metoda *n* najbližih suseda, lokalno težinska regresija iterativno upravljanje, itd.)



Primer analitičkog modela:
Dinamika robotskog sistema je data sa

$[a(q)]\ddot{q}+[b(q,\dot{q})]\dot{q}=Q,\Rightarrow \ddot{q}=-[a(q)]^{-1}[b(q,\dot{q})]\dot{q}+[a(q)]^{-1}Q$

kao i odgovarajući kinematički model robotskog sistema

$\dot{\overline{q}}=[J]\dot{q}\Rightarrow \dot{q}=[J]^{-1}\dot{\overline{q}}$, gde je $\overline{q}=f(q)$

odnosno u vektorskom obliku tzv.

jednačine stanja datog objekta-robotskog sistema uvođenjem sledećih veličina stanja:

$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q\\\dot{q}\end{bmatrix}$

i vektor upravljanja koji predstavlja date generalisane pogonske sile $\boldsymbol{U}=Q$

$\dot{x}=A(x)+B(x)u$

$y=C(x)$

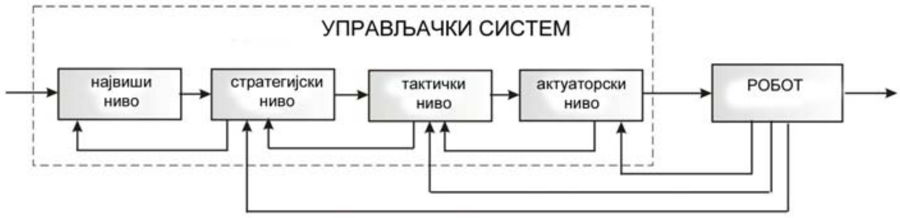
gde je vektor izlaza: $y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{q}\\\dot{\overline{q}}\end{bmatrix}$ kao i odgovarajuće matrice:

$A(x)=\begin{bmatrix}\dot{q}\\-[a(q)]^{-1}[b(q,\dot{q})]\dot{q}\end{bmatrix},\ B(x)=\begin{bmatrix}0\\ [a(q)]^{-1}\end{bmatrix},\ C(x)=\begin{bmatrix}f(q)\\ [J(q)]\dot{q}\end{bmatrix}$

Управљачки систем робота је хијерархијски организован, при чему сваки виши ниво припрема задатак и управља радом нижег нивоа. Нивои управљања су следећи:

1. Актуаторски (извршни ниво) је најнижи ниво и чине га сервоуправљачки актуатори.
2. Тактички ниво управљања представља наредни ниво управљања. Ту се разматрају и уочавају везе између појединих делова роботског система и врши планирање односно расподела кретања на подсистеме зглобова. На овом нивоу се решава инверзни задатак кинематике тако да се одређују кретања зглобова $q(t)$ па се ово управљање често назива и *кинематичко управљање*.
3. Стратегијски ниво управљања јесте следећи виши ниво управљања где се врши планирање кретања роботског система. Задаци који се дефинишу на овом нивоу су описне природе, при чему се задатак рашчлањује на елементарне функционалне покрете. У зависности од организације овог нивоа разликује се надгледано управљање (реализација се одвија под сталним надзором) и ненадгледано упрљављање (без надзора током извршења).
4. Највиши ниво управљања односи се прихватање задатка уз способност логичког расуђивања да анализира сам задатак и одреди одговарајуће операције за извршење постављеног задатка. Овај ниво најчешће садржи елементе вештачке интелигенције, тј. одговарајући експертски систем, или неуронске мреже, примена

фази логике, генетских алгоритама... тиме се омогућава да на овом нивоу систем управљања има одговарајуће битне карактеристике карактеристике: манипулација великим базама знања, симболичко процесирање, способност паралелног процесирања...



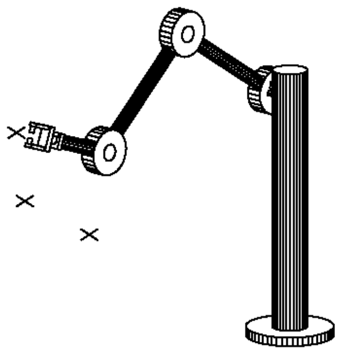
Слика 1.1: Нивои управљања

Роботски систем представља један нелинеарни вишеструко преносни нестационарни динамички систем који се састоји од управљачког система који је обично дигиталног типа и објекта, где се под објектом овде подразумева роботски механизам заједно са актуаторима. Управљање радом уочаног система треба да обезбеди да се стварно понашање или подудара или да буде довољно блиско задатом – жељеном понашању тог система. Управљање се може изабрати из неког вишечланог скупа допустивих или остварљивих управљања. У току рада на синтези управљачког система добијају се разне варијанте система које испуњавају услове задатка, али је потребно пронаћи систем који у задатом смислу најбоље извршава постављени задатак, тј. који је оптималан у том смислу.

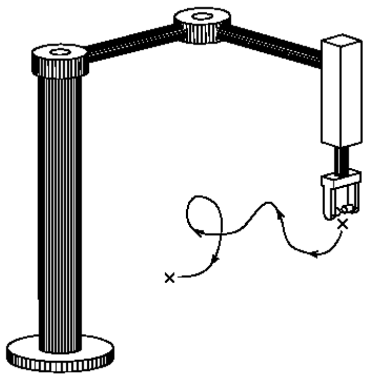
Na aktuatorskom nivou upravljanja uočavaju se dva osnovna tipa upravljanja i to upravljanje od tačke do tačke(*point-to-point control*)

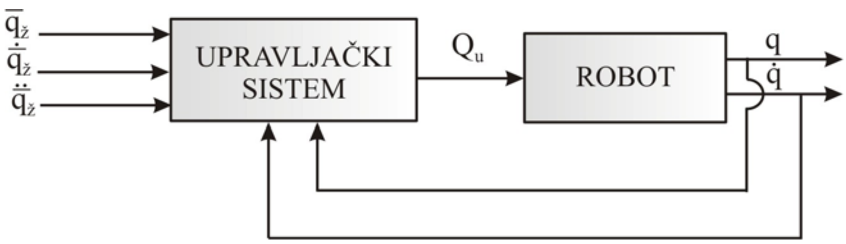
Prvim tipom upravljanja rešavaju se na primer sledeći zadaci: tačkasto zavarivanje, prenošenje materijala itd. gde se robotskom sistemu zadaju niz različitih položaja koje on mora redom da dođe u svaki od njih.

i upravljanje kontinualnim kretanjem (*continuous path control*).



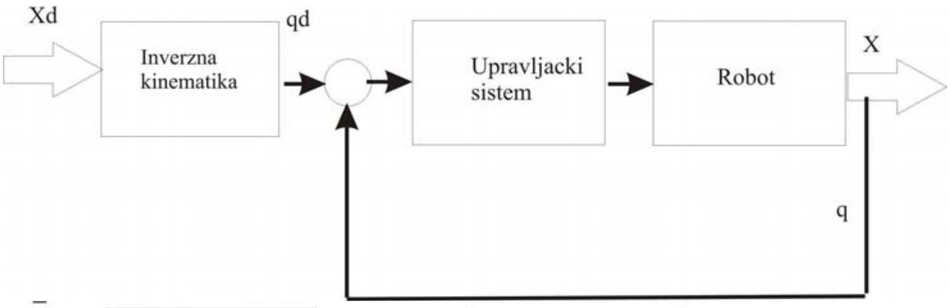
Zadatke farbanja, pisanja, šavnog zavarivanja realizujemo primenom upravljanja kontinualnim kretanjem gde robotski sistem tj. završni uređaj treba da prati zadatu putanju u prostoru uz propisanu brzinu završnog uređaja.

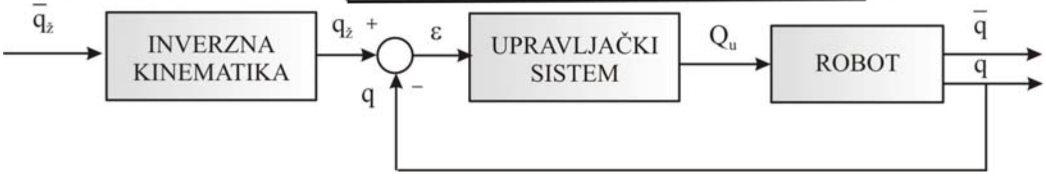




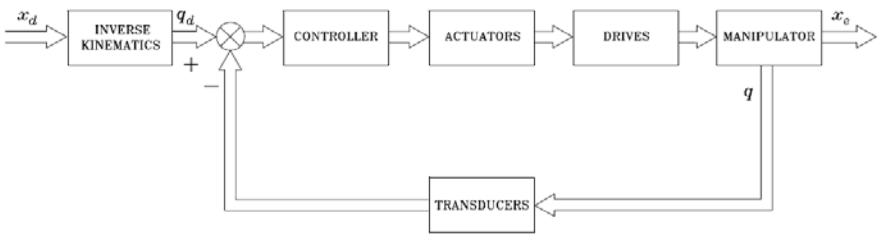
vrste upravljanja:
u prostoru stanja (u prostoru zglobova)

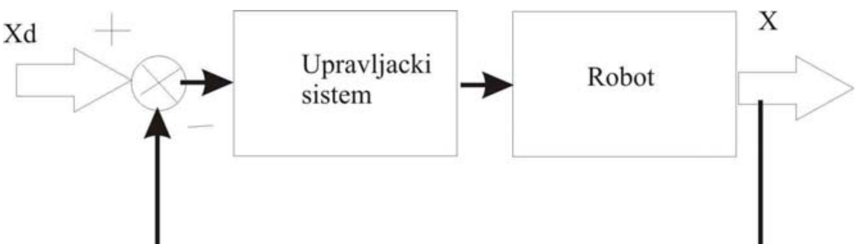
i u prostoru izlaza (operacionom prostoru)

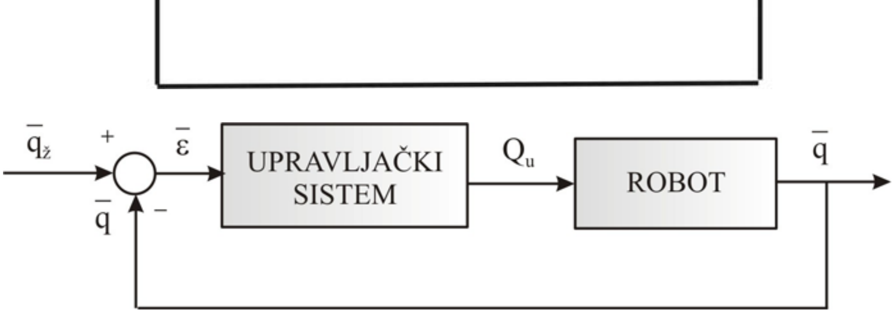


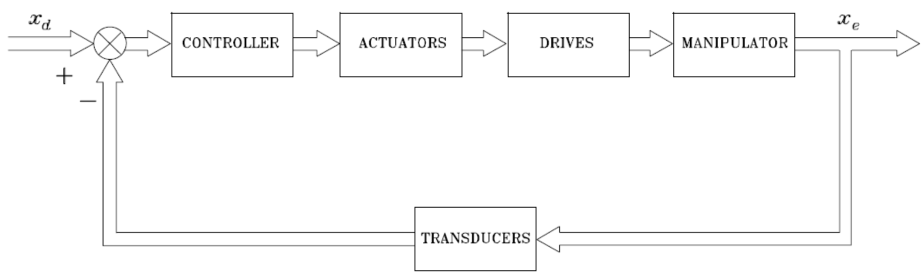


decentralized control schemes, i.e., when the single manipulator joint is controlled independently of the others,
and *centralized control* schemes, i.e., when the dynamic interaction effects between the joints

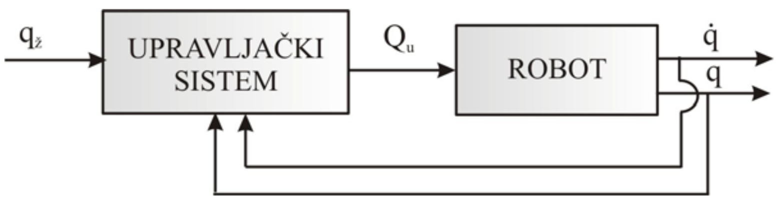








u prostoru stanja: poziciono upravljanje (set point control) i upravljanje po neprekidnoj putanji –problem praćenja (tracking control)



slika 12.3. *strukturni dijagram pozicionog upravljanja*

- Proportional control plus velocity feedback and Proportional Derivati (PD) control;
- PD control with gravity compensation;

- PD control with desired gravity compensation;
- Proportional Integral Derivative (PID) control.

Uvod u poziciono upravljanje

Pri ovom tipu upravljanja se robotu zadaje niz tačaka kroz koje vrh robota treba da prođe.

Pri ovome brzina i putanja između tih tačaka nisu bitne, niti su dostupne. Robot obavlja zadatak (kao npr. tačkasto zavarivanje) dok miruje u tim tačkama. Robotski sistem pripada klasi dinamičkih sistema i zbog toga se vrednost izlaza robotskog sistema ne može poklopiti sa željenom vrednošću izlaza sistema za konačno vreme. U tom smislu, vrh hvataljke robotskog sistema ne može za konačno vreme postići željenu poziciju, međutim, on može prići dovoljno blisko željenoj poziciji i tada možemo smatrati da je cilj upravljanja, tj. postizanje željene pozicije, ostvaren.

Problem pozicionog upravljanja robotskim sistemom čiji je matematički model dat relacijom (*) se može formulisati na sledeći način: *za zadati vektor željenih* *pozicija* $\underline{q}_{\check{z}}$*, treba naći vektorsku funkciju* $\underline{Q}$ *takvu da vektor stvarnih pozicija* $\underline{q}$ *teži vektoru željenih pozicija* $\underline{q}_{\check{z}}$*.* Formalno rečeno, cilj pozicionog upravljanja je nalaženje vektorske funkcije $\underline{Q}$ takve da:

$$\lim_{t\to\infty} \underline{q}(t) = \underline{q}_{\check{z}}$$

gde $\underline{q}_{\check{z}} \in \mathbb{R}^n$ vektor konstanta, kojim su predstavljene željene pozicije robotskih segmenata.Prethodna jednakost se može izraziti i na sledeći način:

$$\lim_{t\to\infty} \underline{\varepsilon} = \underline{0}$$

gde je sa $\underline{\varepsilon}(t)$ označena poziciona greška, definisana sa $\underline{\varepsilon}(t) = \underline{q}_{\check{z}}(t) - \underline{q}(t)$ **.** Vektorska funkcija $\underline{Q}$ je nelinearna vektorska funkcija sledećih promenljivih: $\underline{q}$, $\dot{\underline{q}}$ i $\ddot{\underline{q}}$. Ova funkcija se još naziva i **zakonom upravljanja.** Robotski sistem je opremljen senzorskim sistemom za merenje pozicije (q) i brzine ($\dot{q}$) svakog zgloba i na taj način je fizički moguće realizovati zakon upravljanja. Treba napomenuti da kod nekih robota je moguće merenje samo pozicije, dok se brzina na najčešće može odrediti diferenciranjem pozicije po vremenu. Na osnovu svega izloženog možemo napisati opšti oblik zakona upravljanja:

$$\underline{Q} = \underline{Q}\left(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \ddot{\underline{q}}, \underline{q}_{\check{z}}, M(\underline{q}), C(\underline{q}, \dot{\underline{q}}), \underline{g}(\underline{q})\right)$$

Međutim iz praktičnih razloga, poželjno je da zakon upravljanja ne zavisi od ubrzanja $\ddot{\underline{q}}$, pošto su merači brzine veoma osetljivi na šumove. Ukoliko prethodni zakon upravljanja (**) ne zavisi eksplicitno od $M(\underline{q}), C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$ i $\underline{g}(\underline{q})$ onda se kaže da zakon upravljanja nije *zasnovan na modelu.* U nekim slučajevima , kao kod PID zakona upravljanja, parametri zakona upravljanja se određuju na osnovu matematičkog modela i onda se kaže da je zakon upravljanja zasnovan na modelu. Analiza stabilnosti se može izvršiti pomoću sledećih koraka:

1. Određivanje jednačine ponašanja sistema. Jednačina ponašanja se dobija zamenom upravljačkog zakona (**) u matematički model (*). Uopšteno, jednačina ponašanja je nehomogena,nelinearna diferencijalna jednačina.
2. Predstavljanje jednačine ponašanja u pogodnom obliku:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{q}_{\check{z}} - \underline{q} \\ \dot{\underline{q}} \end{pmatrix} = \underline{f}\left(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{q}_{\check{z}}, M(\underline{q}), C(\underline{q}, \dot{\underline{q}}), \underline{g}(\underline{q})\right)$$

3.Analiza postojanja i jedinstvenosti ravnotežnog stanja. Za ovu vrstu analize pogodnije je zapisati jednačinu (*) u prostoru stanja:

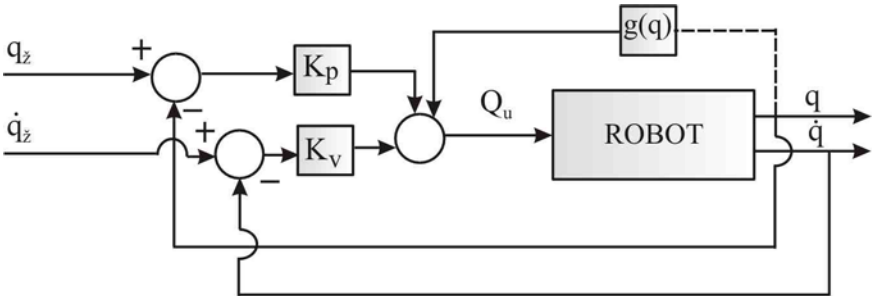
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{q}_2 \end{pmatrix} = \underline{\tilde{f}}\left(\underline{\varepsilon}_1, \underline{q}_2\right)$$

4.Predlog kandidata za Ljapunovljevu funkciju V .

5.Ukoliko predložena funkcija nije Ljapunovljeva moramo se poslužiti nekim drugim metodama za analizu stabilnosti razmatranog sistema.

Primer2: PD (proporcionalno-diferencijalni) algoritam upravljanja sa kompenzacijom dejstva gravitacionih sila, (sl.12.9) je dat sledećom jednačinom [47]:

$$Q^a = K_p\varepsilon + K_v\dot{\varepsilon} + g(q)\,, \tag{12.37}$$



Slika 12.9

gde su sa $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ - su označene simetrične, pozitivno određene matrice. Vektorsku funkciju $g(q)$ uvodimo u odgovarajući zakon upravljanja kod robota koji obavljaju kretanje u vertikalnoj ravni, dok na primer, kod SCARA* konfiguracije prilikom obavljanja zadataka u horizontalnoj ravni, $g(q)$ je jednaka nuli jer potencijalna energija sile zemljine teže $E_p(mg)$ ima konstantnu vrednost. Na taj način, algoritam upravljanja sadrži delimičnu informaciju o dinamičkom modelu robotskog sistema izraženu preko vektorske funkcije $g(q)$ i time se omogućava dobijanje pojednostavljenog matematičkog modela robotskog sistema. Zamenom (12.37) u (12.38)

$$a(q)\ddot{q} + b(q,\dot{q})\dot{q} = Q^a + Q^g \Rightarrow a(q)\ddot{q} + b(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = Q^a\,, \tag{12.38}$$

dobija se

---

* *SCARA- Selective Compliance Assembly Robot Arm*

$$a(q)\ddot{q}+b(q,\dot{q})\dot{q}=K_p\varepsilon+K_d\dot{\varepsilon}\,. \tag{12.39}$$

Odgovarajuća jednačina stanja u prostoru stanja dobija se uvođenjem sledećeg vektora stanja $x=\left(\varepsilon^T\ \dot{\varepsilon}^T\right)^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Imajući u vidu da je $q=q_ž\text{-}\varepsilon$ i $\dot{q}=\dot{q}_ž\text{-}\dot{\varepsilon}$ dobija se

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \dot{\varepsilon}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\varepsilon}\\ \ddot{q}_ž-a(q_ž\text{-}\varepsilon\ )^{-1}[K_p\varepsilon+K_v\dot{\varepsilon}-b(q_ž\text{-}\varepsilon\ ,\dot{q}_ž\text{-}\dot{\varepsilon}\ )(\dot{q}_ž\text{-}\dot{\varepsilon})\ ]\end{pmatrix}. \tag{12.40}$$

Primenom prethodno predložene procedure je neophodno sprovesti sličnu analizu postojanja, jedinstvenosti kao i (asimptotske) stabilnosti nultog ravnotežnog stanja.

If the vector of gravitational torques $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ is absent in the robot model, then the origin of the closed-loop equation, expressed in terms of the state vector $\left[\tilde{\boldsymbol{q}}^T\ \ \dot{\boldsymbol{q}}^T\right]^T$, is globally asymptotically stable. Consequently, we have $\lim_{t\to\infty}\tilde{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{0}$.

For robots with only revolute joints, if the vector of gravitational torques $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ is present in the robot model, then the origin of the closed-loop equation expressed in terms of the state vector $\left[\tilde{\boldsymbol{q}}^T\ \ \dot{\boldsymbol{q}}^T\right]^T$, is not necessarily an equilibrium. However, the closed-loop equation always has equilibria. In addition, if $\lambda_{\min}\{K_p\}>k_g$, then the closed-loop equation has a unique equilibrium. Finally, for any matrix $K_p=K_p^T>0$, it is guaranteed that the position and velocity errors, $\tilde{\boldsymbol{q}}$ and $\dot{\boldsymbol{q}}$, are bounded. Moreover, the vector of joint velocities $\dot{\boldsymbol{q}}$ goes asymptotically to zero.

Consider the PD control law with gravity compensation for n-DOF robots and assume that the desired position $\boldsymbol{q}_d$ is constant.

- If the symmetric matrices K_p and K_v of the PD control law with gravity compensation are positive definite, then the origin of the closed-loop equation, expressed in terms of the state vector $\left[\tilde{\boldsymbol{q}}^T\ \ \dot{\boldsymbol{q}}^T\right]^T$, is a globally asymptotically stable equilibrium. Consequently, for any initial condition $\boldsymbol{q}(0),\dot{\boldsymbol{q}}(0)\in\mathbb{R}^n$, we have $\lim_{t\to\infty}\tilde{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^n$.

As we show below, this controller may verify the position objective globally, hat is,

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{q}_d$$

‹here $\boldsymbol{q}_d\in\mathbb{R}^n$ is a any constant vector and the robot may start off from any onfiguration. We emphasize that the controller “may achieve” the position ontrol objective under the condition that K_p is chosen sufficiently ‘large’. ‚ater on in this chapter, we quantify ‘large’.

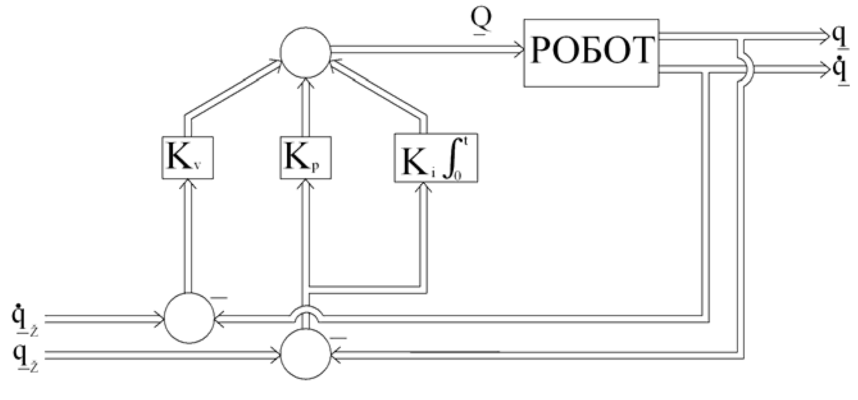
PID zakon upravljanja

Pomoću PD algoritma upravljanja pozicije se može uspešno upravljati robotima čiji matematički modeli ne sadrže gravitacioni član ($\underline{g}(\underline{q})$). U tom slučaju, proces podešavanja parametara PD upravljačkog sistema je trivijalan, pošto se samo zahteva da matrice K_p i K_v budu simetrične, pozitivno određene matrice. U slučajevima gde matematički model robota u sebi sadrži član $\underline{g}(\underline{q})$, a posebno ako sadrži $\underline{g}(\underline{q}_{ž})$ (gde je sa $\underline{g}_{ž}$ označen vektor željenih pozicija), PD upravljački algoritam ne može ostvariti željenu poziciju. Takođe može biti slučaj da poziciona greška $\underline{\varepsilon}$ teži nekoj konstantnoj vrednosti koja je uvek različita od $\underline{0}_x$. Uzimajući ovo u obzir, sa stanovišta automatskog upravljanja i sa ciljem ostvarivanja željene pozicije je prirodno dodati integralni član PD zakonu upravljanja da bi se poziciona greška anulirala.

PID zakon upravljanja je :

$$\underline{Q} = K_p \underline{\varepsilon} + K_v \underline{\dot{\varepsilon}} + K_i \int_0^t \underline{\varepsilon}(\sigma) d\sigma \tag{5.1}$$

gde se matrice K_p, K_v i K_i respektivno zovu “poziciono, brzinsko i integralno pojačanje” i imaju zajedničku osobinu da su simetrične i pozitivno određene. Slika (5.1) prikazuje blok dijagram ove vrste upravljanja:



slika 5.1 strukturni dijagram PID upravljanja

Danas se većina industrijskih robota upravlja PID zakonom upravljanja. Za razliku od PD upravljačkog algoritma, gde je problem podešavanja parametara upravljačkog sistema bio trivijalan, kod PID upravljačkog algoritma on nije ni malo jednostavan jer je potrebno je podesiti članove simetričnih, pozitivno određenih matrica K_p , K_v i K_i .

U praksi, proces podešavanja parametara regulatora je lakši za robote čiji prenosni sistemi sadrže reduktore i kaišne prenosnike. Korišćenjem ovih prenosnika, se znatno povećava moment ili sila (koju stvaraju aktuatori) koja nam je potrebna za obavljanje procesnih zadataka i manipulacije. Međutim, prisustvo prenosnika može prouzrokovati neke fizičke fenomene koji nisu povoljni sa aspekta upravljanja. Neki od tih fenomena su: vibracije koje nastaju usled sprezanja zubaca zupčanika, greške pozicije i energetski gubici usled trenja klizanja u prenosnicima, greške pozicije koje nastaju usled vibracije i elastičnosti kaišnih prenosnika. I pored ovih nabrojanih nedostatka, ovi prenosnici su široko zastupljeni u robotici.

Matematički model robotskog sistema sa n stepeni slobode je dat sa (5.1):

$$M(\underline{q})\underline{\ddot{q}} + C(\underline{q},\underline{\dot{q}})\underline{\dot{q}} + \underline{g}(\underline{q}) = \underline{Q}$$

U ovom odeljku je pretpostavljeno da su svi zglobovi robota obrtni.Cilj upravljanja je da za konstantnu, zadatu vrednost vektora pozicije $\underline{g}_{\check{z}}$, vrednost greške pozicije teži nultoj vrednosti, tj.

$$\lim_{t\to\infty} \underline{\varepsilon}(t) = \underline{0} \tag{5.2}$$

za dovoljno malu početnu vrednost vektora pozicione greške $\underline{\varepsilon}(0)$ i dovoljno malu početnu vrednost vektora brzinske greške $\underline{\dot{\varepsilon}}(0)$.

Zbog dalje analize su nam potrebne sledeća uopštenja i pretpostavke:

Matrica $\frac{1}{2}\dot{M}(\underline{q}) - C(\underline{q},\underline{\dot{q}})$ je kososimetrična.

- Postoji nenegativna konstanta k_{C_1} takva da za svako $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z} \in \mathbb{R}^n$ važi:

  $$\left\| C(\underline{x},\underline{y})\underline{z} \right\| \le k_{C_1} \left\| \underline{y} \right\| \left\| \underline{z} \right\|$$

- Postoji nenegativna konstanta k_g takva da za svako $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ važi:

  $$\left\| \underline{g}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{y}) \right\| \le k_g \left\| \underline{x} - \underline{y} \right\|$$

  gde je $k_g \ge \left\| \frac{\partial \underline{q}(\underline{q})}{\partial \underline{q}} \right\|$ za svako $\underline{q} \in \mathbb{R}^n$.

PID zakon upravljanja dat jednačinom (5.1) uvodi još jednu veličinu stanja označenu sa $\underline{\xi}$ čiji je vremenski izvod: $\dot{\underline{\xi}} = \underline{\varepsilon}$. PID zakon upravljanja se može izraziti pomoću sledeće dve jednačine:

$$\underline{Q} = K_p\underline{\varepsilon} + K_v\dot{\underline{\varepsilon}} + K_i\underline{\xi} \tag{5.3}$$

$$\dot{\underline{\xi}} = \underline{\varepsilon} \tag{5.4}$$

jednačina zatvorenog kola koja se dobija zamenom jednačine (5.3) u jednačinu (5.1)

$$M(\underline{q})\ddot{\underline{q}} + C(\underline{q},\dot{\underline{q}})\dot{\underline{q}} + \underline{g}(\underline{q}) = K_p\underline{\varepsilon} + K_v\dot{\underline{\varepsilon}} + K_i\underline{\xi}$$

$$\dot{\underline{\xi}} = \underline{\varepsilon}$$

Ako uvedemo vektor stanja na sledeći način:

$$\underline{x} = [\underline{\xi}^T \quad \underline{\varepsilon_1}^T \quad \underline{\varepsilon_2}^T]^T \in \mathbb{R}^{3n}$$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\varepsilon_1} \\ \underline{\varepsilon_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon_1} \\ \underline{\varepsilon_2} \\ \ddot{q}_{ž} - M(q_{ž} - \underline{\varepsilon_1})^{-1}[K_p\underline{\varepsilon_1} + K_v\underline{\varepsilon_2} + K_i\underline{\xi} - C(q_{ž} - \underline{\varepsilon_1}, \dot{q}_{ž} - \underline{\varepsilon_2}) - \underline{g}(q_{ž} - \underline{\varepsilon_1})] \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Ako sistem opisan jednačinom (5.5) poseduje ravnotežno stanje ono mora biti sledećeg oblika:

$$\underline{x_r} = [\underline{\xi}^T \quad \underline{\varepsilon}^T \quad \dot{\underline{\varepsilon}}^T]^T = [\underline{\xi}^{*T} \quad \underline{0}^T \quad \underline{0}^T]^T$$

gde:

$$\underline{\xi}^* = K_i^{-1}[M(\underline{q_{ž}})\ddot{\underline{q}}_{ž} + C(\underline{q_{ž}},\dot{\underline{q}}_{ž})\dot{\underline{q}}_{ž} + \underline{g}(\underline{q_{ž}})]$$

mora biti konstantan vektor. Jedan od načina da se odredi $\underline{q_{ž}}$ za koje je $\underline{\xi}^*$ konstantno je rešavanjem sledećih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{q_{ž}} \\ \dot{\underline{q}}_{ž} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\underline{q}}_{ž} \\ M(\underline{q_{ž}})^{-1}[\underline{Q_0} - C(\underline{q_{ž}},\dot{\underline{q}}_{ž})\dot{\underline{q}}_{ž} - \underline{g}(\underline{q_{ž}})] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{q_{ž}}(0) \\ \dot{\underline{q}}_{ž}(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \tag{5.6}$$

gde je $\underline{Q_0} \in \mathbb{R}^{2n}$ vektor konstanta i $\underline{\xi}^* = K_i^{-1}\underline{Q_0}$. U posebnom slučaju ako je $\underline{Q_0} = \underline{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ onda je $\underline{0_x}$ ravnotežno stanje sistema (5.5). Treba zapaziti da je rešenje sistema (5.6) samo pozicija $\underline{q}$ i brzina $\dot{\underline{q}}$ kada imamo konstantno $\underline{Q}=\underline{Q}_0$. U opštem slučaju nije moguće dobiti rešenje $\underline{q}_ž$ u zatvorenoj formi pa se zbog toga jednačina mora rešavati numerički. Numeričkim rešavanjem jednačine (5.6) mogu se dobiti rešenja koja su veoma složena i samim tim neupotrebljiva.

U slučajevima gde je željena pozicija zglobova $\underline{q}_ž$ proizvoljna funkcija vremena (nije konstantan vektor) sistem nema ravnotežno stanje. U takvim slučajevima ne možemo proučavati Ljapunovljevsku stabilnost. Takođe, greška pozicije $\underline{\varepsilon}$ ne može težiti nultoj vrednosti.

Dovoljan uslov za postojanje i jedinstvenost ravnotežnog stanja sistema opisanog jednačinom (5.5) je da je vektor željenih pozicija $\underline{q}_ž$ konstantan vektor. Ravnotežno stanje je sledećeg oblika:

$$\begin{pmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\varepsilon} \\ \dot{\underline{\varepsilon}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_i^{-1}\underline{g}(\underline{q}_ž) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3n}$$

Ukoliko se uvede transformacija koordinata:

$$\underline{z} = \underline{\xi} - K_i^{-1}\underline{g}(\underline{q}_ž)$$

i imajući u vidu da je $\underline{q}_ž = const$, tj. $\dot{\underline{q}}_ž = \underline{0}$, $\underline{\varepsilon}_2 = -\underline{q}_2$

onda se jednačina (3.5) može prikazati na sledeći način:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{z} \\ \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}_1 \\ -\underline{q}_2 \\ M(\underline{q}_ž - \underline{\varepsilon}_1)^{-1}[K_p\underline{\varepsilon}_1 - K_v\underline{q}_2 + K_i\underline{z} + \underline{g}(\underline{q}_ž) - C(\underline{q}_ž - \underline{\varepsilon}_1, \underline{q}_2) - \underline{g}(\underline{q}_ž - \underline{\varepsilon}_1)] \end{pmatrix}$$

(5.7)

Ovom transformacijom smo postigli da je jednačina (5.7) homogena i da sistem opisan jednačinom (5.7) ima jedinstveno, nulto ravnotežno stanje, $[\underline{z}^T \ \ \underline{\varepsilon}_1^T \ \ \underline{q}_2^T]^T = \underline{0} \in \mathbb{R}^{3n}$.

Formulisanje problema upravljanja po neprekidnoj putanji (zadatak praćenja)

Posmatrajmo dinamički model robota sa n stepeni slobode, pri čemu smo pretpostavili da su segmenti kruti, da nemamo trenja u zglobovima i da su aktuatori idealni:

$$M(\underline{q})\underline{\ddot{q}} + C(\underline{q},\underline{\dot{q}})\underline{\dot{q}} + \underline{g}(\underline{q}) = \underline{Q} \tag{6.1}$$

Prethodna diferencijalna jednačina se može zapisati i u sledećem obliku:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{q} \\ \underline{\dot{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{q}} \\ M(\underline{q})^{-1}[\underline{Q}(t) - C(\underline{q},\underline{\dot{q}})\underline{\dot{q}} - \underline{g}(\underline{q})] \end{pmatrix}$$

Slično kao i u prethodnim poglavljima, usvojićemo veličine stanja na sledeći način (za robot sa 3 stepena slobode):

$$q_1 = q^1, \ldots \quad q_4 = \dot{q}^1 = \dot{q}_1, \ldots$$

gde su sa q^1, q^2 и q^3 označene odgovarajuće generalisane koordinate koje su pridružene odgovarajućim segmentima robotskog sistema, dok su sa $\dot{q}^1, \dot{q}^2$ и $\dot{q}^3$ označene odgovarjuće generalisane brzine pridružene istim tim segmentima. Sada možemo napisati jednačinu stanja:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{q_1} \\ \underline{q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{q_2} \\ M(\underline{q_1})^{-1}[\underline{Q}(t) - C(\underline{q_1},\underline{q_2})\underline{q_2} - \underline{g}(\underline{q_1})] \end{pmatrix} \tag{6.1a}$$

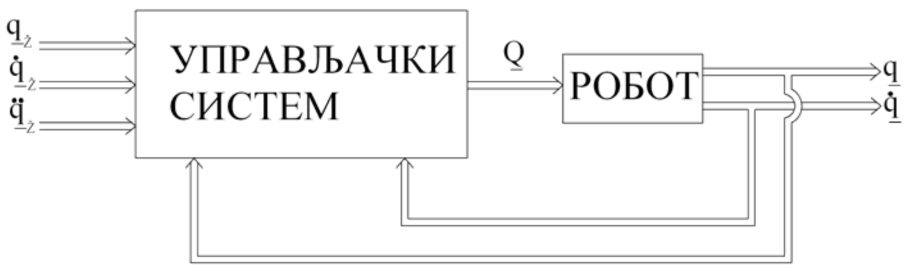
Problem upravljanja po neprekidnoj putanji sistema opisanog jednačinom (6.1) se može formulisati na sledeći način: *ukoliko nam je zadat skup vektorskih ograničenih funkcija* $\underline{q}_{ž}$, $\underline{\dot{q}}_{ž}$ *i* $\underline{\ddot{q}}_{ž}$ *kojima je definisana željena pozicija zglobova, željena brzina i željeno ubrzanje u svakom trenutku* t*, potrebno je odrediti vektorsku funkciju* Q *takvu da stvarna pozicija* $\underline{q}$ *zgloba prati željenu poziciju* $\underline{q}_{ž}$. Drugačije formulisano, cilj upravljanja po neprekidnoj putanji je da se nađe $\underline{Q}$ takvo da je ispunjeno:

$$\lim_{t\to\infty} \underline{\varepsilon}(t) = \underline{0}$$

gde je sa $\underline{\varepsilon}(t)$ označena poziciona greška, definisana sa $\underline{\varepsilon}(t) = \underline{q}_{ž}(t) - \underline{q}(t)$. Prema prethodnoj definiciji sa $\underline{\dot{\varepsilon}}(t) = \underline{\dot{q}}_{ž}(t) - \underline{\dot{q}}(t)$ je označena brzinska greška sistema. Problem upravljanja po neprekidnoj putanji je rešen ako i samo ako promenjive koje su dodeljene zglobovima manipulatora asimptotski prate željenu trajektoriju. Vektorska funkcija $\underline{Q}$ je nelinearna vektorska funkcija sledećih promenjivih: $\underline{q}$, $\underline{\dot{q}}$ i $\underline{\ddot{q}}$. Ova funkcija se još naziva i *zakonom* *upravljanja.* Robotski sistem je opremljen senzorskim sistemom za merenje pozicije ($\underline{q}$) i brzine ($\underline{q}$) svakog zgloba i na taj način je fizički moguće realizovati zakon upravljanja. Treba napomenuti da kod nekih robota je moguće merenje samo pozicije, dok se brzina na najčešće može odrediti diferenciranjem pozicije po vremenu. Na osnovu svega izloženog možemo napisati opšti oblik zakona upravljanja:

$$\underline{Q} = \underline{Q}\left(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{\ddot{q}}, \underline{q}_{\check{z}}, \underline{\dot{q}}_{\check{z}}, \underline{\ddot{q}}_{\check{z}}, M(\underline{q}), C(\underline{q}, \underline{\dot{q}}), \underline{g}(\underline{q})\right)$$

Međutim iz praktičnih razloga, poželjno je da zakon upravljanja ne zavisi od ubrzanja $\underline{\ddot{q}}$, pošto su merači brzine veoma osetljivi na šumove. Na slici 6.1 je predstavljen strukturni dijagram upravljanja po neprekidnoj putanji.



slika 6.1 strukturni dijagram konturnog upravljanja

Dalje ćemo izložiti opštu metodologiju analize stabilnosti konturnog upravljanja:

1. Određivanje jednačine ponašanja robotskog sistema. Jednačina ponašanja se dobija tako što se zakon upravljanja $\underline{Q}$ zamenjuje u matematičkom modelu sistema (6.1). U opštem slučaju jednačina ponašanja sistema je nehomogena nelinearna diferencijalna jednačina pošto je $\underline{q}_{\check{z}} = \underline{q}_{\check{z}}(t)$.
2. Zapisivanje matematičkog modela iz tačke 1. u formi pogodnoj za usvajanje veličina stanja:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{q}_{\check{z}} - \underline{q} \\ \underline{\dot{q}}_{\check{z}} - \underline{\dot{q}} \end{pmatrix} = \underline{f}\left(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{q}_{\check{z}}, \underline{\dot{q}}_{\check{z}}, \underline{\ddot{q}}_{\check{z}}, M(\underline{q}), C(\underline{q}, \underline{\dot{q}}), \underline{g}(\underline{q})\right)$$

gde su ulazne veličine $\underline{q}_{\check{z}}$, $\underline{\dot{q}}_{\check{z}}$ i $\underline{\ddot{q}}_{\check{z}}$ a izlazne $\underline{\varepsilon} = \underline{q}_{\check{z}} - \underline{q}$ i $\underline{\dot{\varepsilon}} = \underline{\dot{q}}_{\check{z}} - \underline{\dot{q}}$

3. Usvajanje veličina stanja i analiza postojanja i jedinstvenosti ravnotežnog stanja za sistem:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\underline{\varepsilon}_1\\ \underline{\varepsilon}_2\end{pmatrix}=\underline{\tilde{f}}\left(t,\underline{\varepsilon}_1,\underline{\varepsilon}_2\right) \tag{6.2}$$

gde je $\underline{\tilde{f}}$ određeno zamenjivanjem $\underline{q}$ sa $\underline{q}_{\check{z}}(t)-\underline{\varepsilon}$ i $\underline{\dot{q}}$ sa $\underline{\dot{q}}_{\check{z}}(t)-\underline{\dot{\varepsilon}}$. Pošto su nominalne trajektorije poznate i funkcije su vremena otuda je i $\underline{\tilde{f}}$ takođe, između ostalog, funkcija i vremena. Treba proveriti da li je nulto stanje ravnotežno i jedinstveno

4. Predlog kandidata za Ljapunovljevu funkciju za proveru stabilnosti nultog ravnotežnog stanja i sam dokaz stabilnosti

Upravljanje u otvorenom kolu dejstva

Upravljački sistemi robota su najčešće digitalnog tipa. Grubo posmatrano, rad ovakvih digitalnih upravljačkih sistema, se može podeliti na tri faze:

- odabiranje $\underline{q}$ i $\underline{\dot{q}}$
- izračunavanje upravljačkog signala (vektora upravljanja) $\underline{Q}$ na osnovu zakona upravljanja
- slanje izračunatog upravljačkog signala izvršnim organima robota (aktuatorima)

Kod nekih primena gde se od robotskog sistema zahteva izvršavanje ponavljajućih zadataka velikom brzinom, prethodne tri faze se moraju izvršiti u malom vremenskom intervalu. Najviše vremena je potrebno za izračunavanje upravljačkog signala $\underline{Q}$. Skraćenje vremena potrebnog za izračunavanje $\underline{Q}$ utiče na povećavanje frekvence procesiranja i samim tim veće mogućnosti sistema za brže izvršavanje zadataka.

Kod ponavljajućih zadataka, vektor željenih pozicija $\underline{g}_{\check{z}}(t)$ i njegovi vremenski izvodi su periodične vektorske funkcije i one postaju poznate jednom kada se izvrši zadatak. Članovi u zakonu upravljanja isključivo zavise od navedenih funkcija i mogu se izračunati i sačuvati u memoriji. Tokom izračunavanja vektora upravljanja ovi unapred izračunati članovi se mogu pročitati iz memorije i na taj način se može smanjiti potrebno vreme za izračunavanje. Ukoliko poznajemo matematički model sistema u otvorenom kolu:

$$\underline{\dot{x}}=A\underline{x}+\underline{u}$$

gde je $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja i u isto vreme i izlaz sistema, $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ je matrica čije sve sopstevene vrednosti $\lambda_i\{A\}$ imaju negativne realne delove, $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ je vektor upravljanja. Pretpostavimo da su vektor željenih pozicija $\underline{x_ž}(t)$ i njegov vremenski izvod $\dot{\underline{x_ž}}(t)$ ograničene funckije. Pravilno projektovan upravljački sistem će obezbediti da $\underline{x}(t) \to \underline{x_ž}(t)$ kada $t \to \infty$. Drugačije iskazano preko vektora greške, $\underline{\varepsilon} = \underline{x_ž}(t) - \underline{x}(t)$, treba projektovati upravljački sistem takav da:

$$\lim_{t \to \infty} \underline{\varepsilon} = \underline{0}$$

Jedan od najjednostavnijih načina rešenja ovog problema je korišćenjem **inverzne dinamike sistema**.

Vektor upravljanja možemo odrediti tako što ćemo u jednačini otvorenog kola staviti da nam je:

$$\underline{x}(t) = \underline{x_ž}(t)$$
$$\dot{\underline{x}}(t) = \dot{\underline{x_ž}}(t)$$

Ukoliko tako dobijenu jednačinu otvorenog kola rešimo po vektoru upravljanja, dobićemo:

$$\underline{u} = \dot{\underline{x_ž}} - A\underline{x_ž}$$

U prethodnoj jednačini leži smisao izraza “**inverzne dinamike sistema”** jer za formiranje upravljanja nam je potrebna informacija o matematičkom modelu sistema izražena kroz matricu A. Ukoliko se ovako određeno upravljanje zameni u polaznu jednačinu otvorenog kola, dobija se:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \dot{\underline{x_ž}} - A\underline{x_ž}$$
$$\dot{\underline{x}} - \dot{\underline{x_ž}} = A\underline{x} - A\underline{x_ž}$$
$$\dot{\underline{x}} - \dot{\underline{x_ž}} = A\left(\underline{x} - \underline{x_ž}\right)$$
$$\dot{\underline{\varepsilon}} = A\underline{\varepsilon}$$

Ovako dobijen sistem je linearan i pošto su realni delovi svih sopstvenih vrednosti matrice A manji od nule on je stabilan, tj. obezbeđeno je da:

$$\lim_{t \to \infty} \underline{\varepsilon} = \underline{0} \quad \text{za svako } \underline{\varepsilon}(0) \in \mathbb{R}^n .$$

Posmatrajmo sada matematički model robotskog sistema dat sa:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{q} \\ \underline{\dot{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{q}} \\ M(\underline{q})^{-1}[\underline{Q}(t) - C(\underline{q}, \underline{\dot{q}})\underline{\dot{q}} - \underline{g}(\underline{q})] \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

Ukoliko želimo da vrednost izlznih veličina $\underline{q}$ i $\underline{\dot{q}}$ bude jednak željenim vrednostima $\underline{q}_{\check{z}}(t)$ i $\underline{\dot{q}}_{\check{z}}(t)$ respektivno, potrebno je zameniti $\underline{q}$, $\underline{\dot{q}}$ i $\underline{\ddot{q}}$ u jednačini (8.1) sa $\underline{q}_{\check{z}}(t)$, $\underline{\dot{q}}_{\check{z}}(t)$ i $\underline{\ddot{q}}_{\check{z}}(t)$ respektivno i rešiti je po $\underline{Q}$. Na taj način dobijamo sledeću jednačinu:

$$\underline{Q} = M\left(\underline{q}_{\check{z}}\right)\underline{\ddot{q}}_{\check{z}} + C\left(\underline{q}_{\check{z}}, \underline{\dot{q}}_{\check{z}}\right) + \underline{g}\left(\underline{q}_{\check{z}}\right) \tag{8.2}$$

Treba zapaziti da vektor upravljanja $\underline{Q}$ ne zavisi od $\underline{q}$ ili $\underline{\dot{q}}$ i štaviše, zakon upravljanja definisan sa (6.2) ne poseduje ni jedan podešavajući parametar. Treba napomenuti da je zakon upravljanja (6.2) zasnovan na modelu, tj. za njegovo realizovanje su nam potrebne informacije o dinamičkom modelu robotskog sistema izražene kroz $M\left(\underline{q}_{\check{z}}\right), C\left(\underline{q}_{\check{z}}, \underline{\dot{q}}_{\check{z}}\right)$ i $\underline{g}\left(\underline{q}_{\check{z}}\right)$.

Ukoliko imamo slučaj da se neki postupak manipulacije ili procesnog zadatka periodično ponavlja, u izvesnim vremenskim intervalima nam se javljaju isti vektori $\underline{q}_{\check{z}}(t)$, $\underline{\dot{q}}_{\check{z}}(t)$ i $\underline{\ddot{q}}_{\check{z}}(t)$. Najlogičnije bi bilo da se u off-line režimu izračunaju $M\left(\underline{q}_{\check{z}}\right), C\left(\underline{q}_{\check{z}}, \underline{\dot{q}}_{\check{z}}\right)$ i $\underline{g}\left(\underline{q}_{\check{z}}\right)$ da bi se potom lakše izračunao vektor upravljanja $\underline{Q}$. Jednačina ponašanja se dobija zamenom zakona upravljanja (8.2) u matematičko model sistema (8.1)

$$M(\underline{q})\underline{\ddot{q}} + C(\underline{q}, \underline{\dot{q}})\underline{\dot{q}} + \underline{g}(\underline{q}) = M\left(\underline{q}_{\check{z}}\right)\underline{\ddot{q}}_{\check{z}} + C\left(\underline{q}_{\check{z}}, \underline{\dot{q}}_{\check{z}}\right) + \underline{g}\left(\underline{q}_{\check{z}}\right) \tag{8.3}$$

Da bi pojednostavili označavanje, uvedimo sledeće uprošćene oznake:

$$M = M\left(\underline{q}\right),\ M_{\check{z}} = M\left(\underline{q}_{\check{z}}\right), C = C\left(\underline{q}, \underline{\dot{q}}\right),\ C_{\check{z}} = C\left(\underline{q}_{\check{z}}, \underline{\dot{q}}_{\check{z}}\right),\ \underline{g} = \underline{g}\left(\underline{q}\right),\ g_{\check{z}} = g\left(\underline{q}_{\check{z}}\right)$$

Jednačina (8.3) se može zapizati i drugačije , usvajanjem veličina stanja (na isti način kao i u prethodnim poglaljima):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{\varepsilon_1} \\ \underline{\varepsilon_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon_2} \\ -M^{-1}[\left(M_{\check{z}} - M\right)\underline{\ddot{q}}_{\check{z}} + C_{\check{z}}\underline{\dot{q}}_{\check{z}} - C(\underline{\dot{q}}_{\check{z}} - \underline{\varepsilon_2}) + \underline{g}_{\check{z}} - \underline{g}] \end{pmatrix}$$

prethodna jednačina je nelinearna nehomogena diferencijalna jednačina. Stanje $[\underline{\varepsilon}_1^T \ \underline{\varepsilon}_2^T]^T = \underline{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ je ravnotežno stanje ali to nije i jedino ravnotežno stanje. Što se može veoma lako pokazati na primerima.

Pošto u zakonu upravljanja ne postoje parametri čijim podešavanjem bi se moglo uticati na broj i na raspored ravnotežnih stanja, matematički model objekta (manipulatora, robotskog sistema) određuje broj i lokaciju ravnotežnih stanja. Očigledno je da zakon upravljanja definisan jednačinom (8.2) nema skoro nikakvu primenu u praksi. Njegova primena bi verovatno dovela do havarije sistema.

Pošto sistem nema jedinstveno ravnotežno stanje, analiza asimptotske stabilnosti (nestabilnosti) je skoro nemoguća. U ovom poglavlju je prikazano kako se dinamički model sistema u otvorenom kolu dejstva može iskoristiti za formiranje vektora upravljanja koji obezbeđuje:

$$\lim_{t \to \infty} \underline{\varepsilon} = \underline{0}$$

Kada se periodično ponavljaju iste operacije robotskog sistema, potrebno je svaki put izračunavati iste algebarske članove zakona upravljanja. Kod ovakvih slučajeva, logično je prvo izračunati određene članove i zapamtiti ih u memoriji, pa ih po potrebi očitavati. Zakon upravljaša (8.2) je pogodan za ovakve primene. On u sebi uključuje inverznu dinamiku sistema.

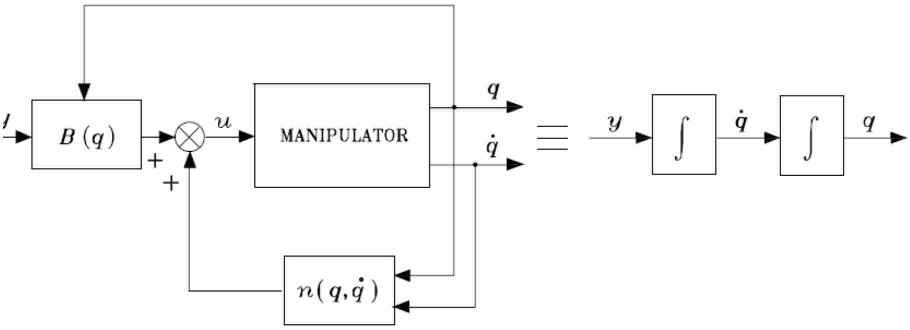
I pored navedenih prednosti, pokazano je da zakon upravljanja (8.2) nema praktičnu upotrebu zbog postojanja više ravnotežnih stanja sistema.

Izvesnim modifikacijama algoritma (8.2), kao što je npr:

$$\underline{Q} = K_p \underline{\varepsilon} + K_v \dot{\underline{\varepsilon}} + M\left(\underline{q}_{\check{z}}\right)\ddot{\underline{q}}_{\check{z}} + C\left(\underline{q}_{\check{z}}, \dot{\underline{q}}_{\check{z}}\right) + \underline{q}\left(\underline{q}_{\check{z}}\right)$$

koji se u literaturi zove PD Upravljanje u otvorenom kolu**,** se može postići jedinstvenost nultog ravnotežnog stanja a samim tim i upotrebljivost datog algoritma upravljanja.

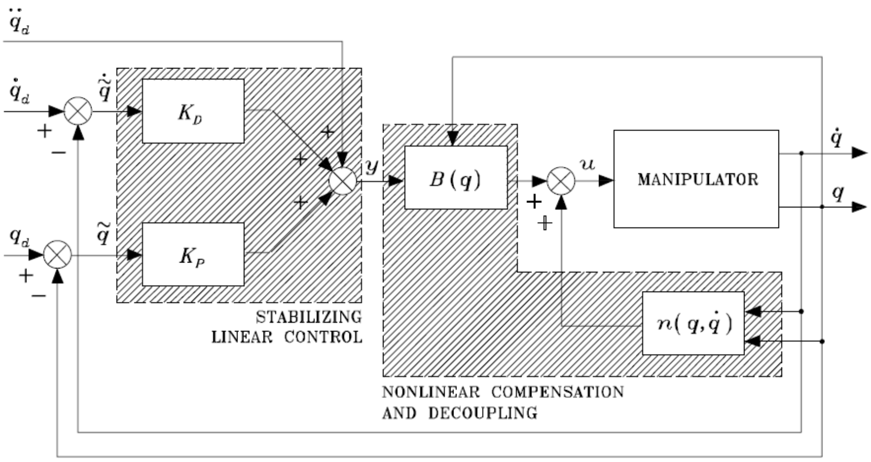
Inverse Dynamics Control



$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{y} + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}),$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{K}_P\boldsymbol{q} - \boldsymbol{K}_D\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{r}$$



$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}_D\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}_P\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{K}_P = \mathrm{diag}\{\omega_{n1}^2, \ldots, \omega_{nn}^2\} \qquad \boldsymbol{K}_D = \mathrm{diag}\{2\zeta_1\omega_{n1}, \ldots, 2\zeta_n\omega_{nn}\},$$

$$\boldsymbol{r} = \ddot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{K}_D\dot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{K}_P\boldsymbol{q}_d.$$

$$\ddot{\widetilde{\boldsymbol{q}}} + \boldsymbol{K}_D\dot{\widetilde{\boldsymbol{q}}} + \boldsymbol{K}_P\widetilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$$

u prostoru izlaza (u opera cionom prostoru)

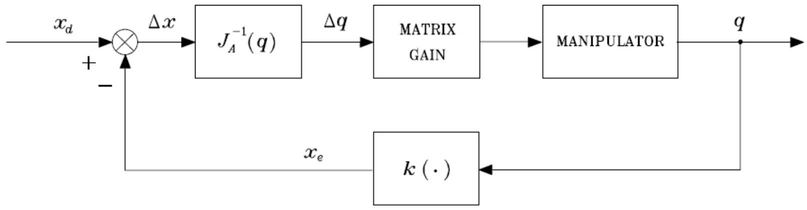
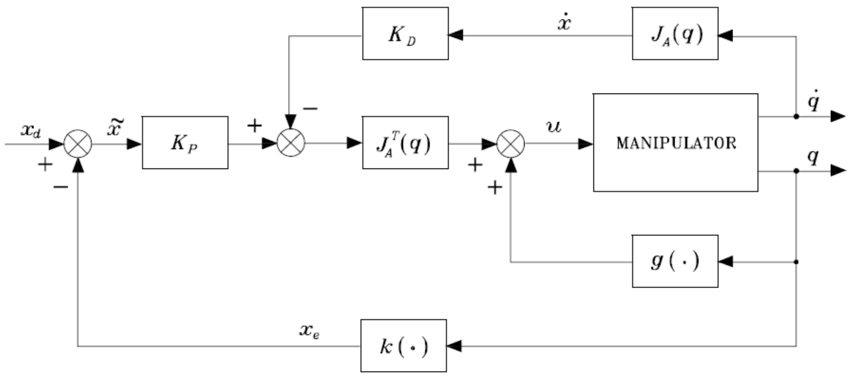


Fig. 8.27. Block scheme of Jacobian inverse control

PD Control with Gravity Compensation



3.29. Block scheme of operational space PD control with gravity compensation

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{J}_A^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{K}_P\widetilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{J}_A^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{K}_D\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

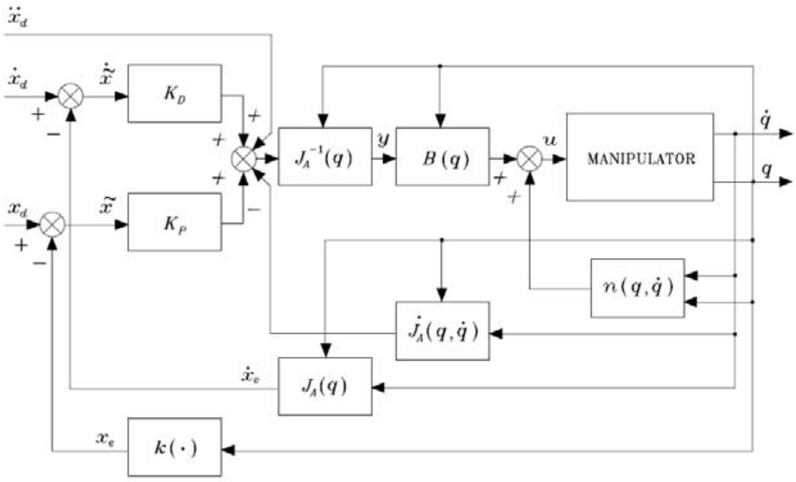


Fig. 8.30. Block scheme of operational space inverse dynamics control