

## 8 Диференцијалне једначине првог реда

Једначина облика

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

у којој фигурише бар један од извода *непознате функције*  $y = y(x)$  је *диференцијална једначина*.

Ред диференцијалне једначине је ред највећег извода који у њој фигурише.

Нормални облик диференцијалне једначине је

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Овде радимо само диференцијалне једначине првог реда, тј. облика  $F(x, y, y') = 0$ .

### 8.1 Диференцијалне једначине са раздвојеним променљивим

Ако се диференцијална једначина може написати у облику

$$f(x) dx = g(y) dy,$$

тада је она једначина са раздвојеним променљивим и њено опште решење добијамо интегралњем (квадратуром):

$$\int f(x) dx = \int g(y) dy + C.$$

**Пример 8.1.** Наћи опште решење диференцијалне једначине  $(1 + e^x)yy' = e^x$ .

Како је  $y' = \frac{dy}{dx}$ , дату диференцијалну једначину можемо записати у облику

$$y dy = \frac{e^x dx}{1 + e^x},$$

па је њено опште решење

$$\int y dy = \int \frac{e^x dx}{1 + e^x}, \quad \text{тј.} \quad \frac{y^2}{2} + C = \ln(1 + e^x),$$

што се може записати и у облику

$$C_1 e^{y^2/2} = 1 + e^x \quad (C_1 = e^C).$$

**Пример 8.2.** Наћи опште решење диференцијалне једначине  $y'(\operatorname{ctg}^2 x - 3) = 1$ .

Дата једначина се може записати у облику  $dy = \frac{dx}{\operatorname{ctg}^2 x - 3}$ , па је њено опште решење

$$y = \int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^2 x - 3} = \left[ \operatorname{ctg} x = t \right. \\ \left. dx = -dt/(1+t^2) \right] = - \int \frac{dt}{(t^2-3)(t^2+1)} = \frac{1}{8\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}}{\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}} \right| - \frac{1}{4}x + C.$$

### 8.2 Хомогена диференцијална једначина

Хомогена диференцијална једначина је једначина која се може написати у облику

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (8.1)$$

и она се сменом

$$z = \frac{y}{x}, \quad y = zx, \quad y' = z'x + z$$

своди на диференцијалну једначину са раздвојеним променљивим (по непознатој функцији  $z$ ):

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Постоји тест да је дата диференцијална једначина хомогена: убаци се  $tx$  уместо  $x$  и  $ty$  уместо  $y$ , па ако је могуће елиминисати  $t$ , једначина јесте хомогена.

Једначина облика

$$y' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}$$

се у случају да је  $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$  своди на хомогену сменом  $x = X + A$ ,  $y = Y + B$  подешавањем параметара  $A$  и  $B$ .

Случај  $\delta = 0$  значи да су изрази  $a_1x + a_2y$  и  $b_1x + b_2y$  пропорционални, па се полазна једначина сменом  $z = a_1x + a_2y$  своди на једначину са раздвојеним променљивим.

**Пример 8.3.** Решити диференцијалну једначину  $x^2 dy + y(\sqrt{x^2 - y^2} - x) dx = 0$ ,  $x > y > 0$ .

Дељењем дате једначину са  $x^2 dx$  добијамо једначину

$$y' = -\frac{y}{x} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} - 1 \right),$$

која има облик (8.1), па је хомогена. Уводимо смену  $z = \frac{y}{x}$ ,  $y' = z'x + z$ , па се дата једначина своди на једначину

$$z'x + z = -z(\sqrt{1 - z^2} - 1), \quad \text{тј.} \quad \frac{dz}{z\sqrt{1 - z^2}} = -\frac{dx}{x},$$

што је једначина са раздвојеним променљивим. Интеграл на левој страни претходне једнакости је

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{z dz}{z^2\sqrt{1 - z^2}} = \left[ \begin{array}{l} 1 - z^2 = u^2, \quad z = \sqrt{1 - u^2} \\ z dz = -u du \end{array} \right] = \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - u}{1 + u} + C =$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - z^2}}{1 + \sqrt{1 - z^2}} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{2 - z^2 - 2\sqrt{1 - z^2}}{z^2} + C.$$

Следи да је опште решење дате једначине (након враћања функције  $y$  и множења једначине са 2)

$$\ln \frac{2x^2 - y^2 - 2x\sqrt{x^2 - y^2}}{y^2} = -2 \ln x + \ln C, \quad \text{тј.} \quad 2x^4 - x^2y^2 - 2x^3\sqrt{x^2 - y^2} - Cy^2 = 0.$$

**Пример 8.4.** Решити диференцијалну једначину  $(4x + 3y + 1) dx + (x + y + 1) dy = 0$ .

Напишимо дату једначину у облику  $y' = -\frac{4x + 3y + 1}{x + y + 1}$ . Сменама  $x = X + A$ ,  $y = Y + B$  за одговарајуће  $A$  и  $B$ , ова једначина се своди на хомогену. У једначини

$$Y' = -\frac{4X + 4A + 3Y + 3B + 1}{X + A + Y + B + 1}$$

бирамо  $A$  и  $B$  тако да важи

$$4A + 3B + 1 = 0 \quad \text{и} \quad A + B + 1 = 0.$$

Решење горњег система је  $A = 2$  и  $B = -3$ , па полазна једначина постаје

$Y' = -\frac{4X + 3Y}{X + Y}$ , тј.  $Y' = -\frac{4 + 3\frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$ . Сменом  $z = \frac{Y}{X}$ , одакле је  $Y' = z'X + z$ , добијамо

$$z'X + z = -\frac{4 + 3z}{1 + z}, \quad \text{односно} \quad -\frac{1 + z}{(2 + z)^2} dz = \frac{dX}{X}, \quad \text{одакле је}$$

$$-\int \frac{2 + z - 1}{(2 + z)^2} dz = \int \frac{dX}{X}, \quad \text{односно} \quad -\ln|2 + z| - \frac{1}{2 + z} + C = \ln|X|.$$

Дакле, опште решење хомогене једначине је

$$-\frac{1}{2 + \frac{Y}{X}} + C = \ln \left| X \left( 2 + \frac{Y}{X} \right) \right|, \quad \text{тј.} \quad C_1 e^{-\frac{X}{2X+Y}} = 2X + Y,$$

а опште решење полазне једначине је

$$C_1 e^{\frac{2-x}{2x+y-1}} = 2x + y - 1.$$

### 8.3 Линеарна диференцијална једначина

Линеарна диференцијална једначина је једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (8.2)$$

Опште решење ове једначине се добија по формули

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left( C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right).$$

**Пример 8.5.** Наћи решење диференцијалне једначине  $(\sin y + x \operatorname{tg} y)y' = 1$  које задовољава услов  $y(1) = 0$ .

Користимо да је  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'}$ , па је дата једначина еквивалентна линеарној једначини  $x' - x \operatorname{tg} y = \sin y$ . Опште решење је

$$x(y) = e^{-\int p(y) dy} \left( C + \int q(y)e^{\int p(y) dy} dy \right), \quad \text{где је } p(y) = -\operatorname{tg} y \text{ и } q(y) = \sin y.$$

Како је  $\int p(y) dy = -\int \operatorname{tg} y dy = \ln |\cos y| + C$ , добијамо

$$x(y) = \frac{1}{\cos y} \left( C + \int \sin y |\cos y| dy \right) = \frac{1}{\cos y} \left( C - \int \cos y d(\cos y) \right) = \frac{C}{\cos y} - \frac{\cos y}{2}.$$

Партикуларно решење налазимо из услова  $1 = \frac{C}{\cos 0} - \frac{\cos 0}{2}$ , па је  $C = \frac{3}{2}$  и тражено решење је

$$x = \frac{3}{2 \cos y} - \frac{\cos y}{2}.$$

### 8.4 Бернулијева диференцијална једначина

Једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

представља Бернулијеву диференцијалну једначину. Делењем ове једначине са  $y^\alpha$  и увођењем смене  $y^{1-\alpha} = z$ ,  $z = z(x)$ , сводимо је на линеарну диференцијалну једначину по  $z$ :

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x).$$

**Пример 8.6.** Наћи опште решење диференцијалне једначине  $y' = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .

Дата једначина је еквивалентна једначини  $x' = \frac{x^2 + y^2}{x}$ , тј.  $x' - x = \frac{y^2}{x}$ , што је Бернулијева једначина,  $x = x(y)$ . Множењем те једначине са  $x$  и увођењем смене  $x^2 = z$ ,  $2xx' = z'$  сводимо је на линеарну једначину  $z' - 2z = 2y^2$ . Опште решење је

$$z = e^{\int 2 dy} \left( C + \int 2y^2 e^{-\int 2 dy} dy \right) = e^{2y} \left( C + \int 2y^2 e^{-2y} dy \right),$$

$$\begin{aligned} \int 2y^2 e^{-2y} dy &= \left[ \begin{array}{l} u = 2y^2, \quad dv = e^{-2y} dy, \\ du = 4y dy, \quad v = -e^{-2y}/2 \end{array} \right] = -y^2 e^{-2y} + \int 2ye^{-2y} dy \\ &= \left[ \begin{array}{l} u = 2y, \quad dv = e^{-2y} dy, \\ du = 2 dy, \quad v = -e^{-2y}/2 \end{array} \right] = -y^2 e^{-2y} - ye^{-2y} - e^{-2y}/2 + C. \end{aligned}$$

Дакле, опште решење је

$$x^2 = Ce^{2y} - \frac{1}{2} (2y^2 + 2y + 1).$$

## 8.5 Диференцијална једначина са тоталним диференцијалом

Једначина облика

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (8.3)$$

је једначина са тоталним диференцијалом, ако постоји непрекидно диференцијабилна функција  $u(x, y)$  (потенцијал једначине), таква да је

$$u'_x = M(x, y), \quad u'_y = N(x, y), \quad du = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Услов да је полазна диференцијална једначина са тоталним диференцијалом је да су мешовити парцијални изводи  $u''_{xy} = M'_y$  и  $u''_{yx} = N'_x$  једнаки.

Опште решење једначине (8.3) је у том случају функција  $u(x, y)$  коју добијамо на следећи начин:

- Интегрирамо услов  $u'_x = M(x, y)$  дуж  $x$ -осе, па добијамо  $u(x, y) = \int M(x, y)dx + C(y)$ ;
- Добијену једначину диференцирамо по  $y$ , па добијамо  $u'_y = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x, y)dx) + C'(y)$ ;
- Функцију  $C(y)$  добијамо интеграљењем претходне једначине дуж  $y$ -осе, па је опште решење  $u(x, y) = \int M(x, y)dx + C(y)$ .

У случају да једначина (8.3) није са тоталним диференцијалом, тражимо интеграциони фактор  $\mu(x, y)$  - функцију за коју важи да када помножимо полазну једначину са њом, добијамо једначину која јесте са тоталним диференцијалом, тј.  $(\mu \cdot M)_y = (\mu \cdot N)_x$ .

**Пример 8.7.** Наћи опште решење диференцијалне једначине  $2x\sqrt{y^2-x^2}dx - (1+2y\sqrt{y^2-x^2})dy=0$ .

Нека је  $M = M(x, y) = 2x\sqrt{y^2-x^2}$  и  $N = N(x, y) = -1 - 2y\sqrt{y^2-x^2}$ . Како је  $M'_y = N'_x = \frac{2xy}{\sqrt{y^2-x^2}}$ , дата једначина је са тоталним диференцијалом. Опште решење је

$$u = \int 2x\sqrt{y^2-x^2} dx + \varphi(y) = -\frac{2}{3}(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \varphi(y),$$

где је  $u'_y = N$ , тј.  $-1 - 2y\sqrt{y^2-x^2} = -2y\sqrt{y^2-x^2} + \varphi'(y)$ . Дакле,  $\varphi'(y) = -1$  и  $\varphi(y) = -y + C$ , па је опште решење

$$u = -\frac{2}{3}(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}} - y + C.$$

**Пример 8.8.** Наћи интеграциони фактор једначине  $(x - \cos y) dx - \sin y dy = 0$ , ако је познато да је он облика  $\mu(x, y) = \lambda(x)$ . Уз помоћ њега решити дату једначину.

Нека је  $M = M(x, y) = x - \cos y$  и  $N = N(x, y) = -\sin y$ . Дата једначина није потпуни диференцијал, јер је  $M'_y = \sin y \neq N'_x = -\cos y$ . Тражимо функцију  $\lambda = \lambda(x)$  за коју важи  $(\lambda(x) \cdot M)'_y = (\lambda(x) \cdot N)'_x$ , тј.

$(\lambda(x) \cdot (x - \cos y))'_y = (\lambda(x) \cdot (-\sin y))'_x$ , одакле добијамо диференцијалну једначину  $\frac{d\lambda(x)}{dx} = -dx$ ,

чије је опште решење  $\lambda(x) = Ce^{-x}$ . Дакле, можемо узети да је интеграциони фактор  $\lambda(x) = e^{-x}$ .

Једначина  $e^{-x}(x - \cos y) dx - e^{-x} \sin y dy = 0$  јесте једначина са тоталним диференцијалом, јер је  $M'_y = (e^{-x}(x - \cos y))'_y = e^{-x} \sin y = N'_x = (-e^{-x} \sin y)'_x$ . Опште решење тражимо у облику

$$u(x, y) = \int M dx + \varphi(y) = \int e^{-x}(x - \cos y) dx + \varphi(y) = e^{-x}(\cos y - x - 1) + \varphi(y).$$

Даље је  $u'_y = N = -e^{-x} \sin y = -e^{-x} \sin y + \varphi'(y)$ , одакле је  $\varphi(y) = C$ . Дакле,

$$u(x, y) = e^{-x}(\cos y - x - 1) + C.$$

**Пример 8.9.** Наћи интеграциони фактор једначине  $(xy^2 - 2y^3) dx + (3 - 2xy^2) dy = 0$ , ако је познато да је он облика  $\mu(x, y) = \lambda(y)$ . Уз помоћ њега решити дату једначину.

Нека је  $M = M(x, y) = xy^2 - 2y^3$  и  $N = N(x, y) = 3 - 2xy^2$ . Дата једначина није потпуни диференцијал, јер је  $M'_y = 2xy - 6y^2 \neq N'_x = -2y^2$ . Тражимо функцију  $\lambda = \lambda(y)$  за коју важи  $(\lambda(y) \cdot M)'_y = (\lambda(y) \cdot N)'_x$ , одакле добијамо диференцијалну једначину  $\frac{d\lambda}{\lambda} = -2 \frac{dy}{y}$  чије је опште решење  $\lambda(y) = \frac{C}{y^2}$ . Дакле, можемо узети да је интеграциони фактор  $\lambda(y) = \frac{1}{y^2}$ .

Једначина  $(x - 2y) dx + \left(\frac{3}{y^2} - 2x\right) dy = 0$  јесте једначина са тоталним диференцијалом, јер је  $M'_y = (x - 2y)'_y = -2 = N'_x = \left(\frac{3}{y^2} - 2x\right)'_x$ .

Опште решење је облика  $u(x, y) = C$ , где је  $u'_x = M$  и  $u'_y = N$ . Из прве једнакости следи да је  $u(x, y) = \int M dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} - 2xy + \varphi(y)$ . Диференцирањем последње једнакости по  $y$  добијамо да је  $\varphi'(y) = \frac{3}{y^2}$ , одакле је  $\varphi(y) = -\frac{3}{y} + C$ . Дакле, опште решење је

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} - 2xy - \frac{3}{y} + C.$$

**Пример 8.10.** Наћи интеграциони фактор једначине  $y dx + (x^2 + y^2 - x) dy = 0$ , ако је познато да је он облика  $\mu(x, y) = \lambda(x^2 + y^2)$ . Уз помоћ њега решити дату једначину.

Нека је  $M = M(x, y) = y$  и  $N = N(x, y) = x^2 + y^2 - x$ . Дата једначина није потпуни диференцијал, јер је  $M'_y = 1 \neq N'_x = 2x - 1$ . Тражимо функцију  $\lambda = \lambda(t)$ ,  $t = x^2 + y^2$  за коју важи  $(\lambda(t) \cdot M)'_y = (\lambda(t) \cdot N)'_x$ , одакле добијамо диференцијалну једначину  $\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{dt}{t}$ , па је интеграциони фактор  $\lambda = \frac{1}{t} = \frac{1}{x^2 + y^2}$ .

Решимо сада диференцијалну једначину са тоталним диференцијалном  $M_1 dx + N_1 dy = 0$ , где је  $M_1 = \lambda M = -\frac{y}{x^2 + y^2}$  и  $N_1 = \lambda N = \frac{x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ . Опште решење је функција  $u(x, y) = C$  за коју важи  $u'_x = M_1$ , па је

$$u(x, y) = \int M_1 dx + \varphi(y) = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \varphi(y).$$

Даље, како је  $u'_y = N_1$  важи

$$\frac{x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x/y^2}{(x/y)^2 + 1} + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi(y) = -y + C.$$

Дакле, опште решење је

$$u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - y + C.$$

## 8.6 Ортогоналне и изогоналне трајекторије

**Пример 8.11.** Одредити изогоналну трајекторију под углом  $\alpha = 45^\circ$  за фамилију кривих  $y = C/x$  која пролази кроз тачку  $(1, 3)$ .

Диференцијалну једначину дате фамилије добијамо диференцирајући једначину  $xy = C$  (гледамо да елиминишемо константу  $C$ ):  $y + xy' = 0$ . Диференцијална једначина изогоналних трајекторија које секу дату фамилију под углом  $45^\circ$  добијамо заменом  $y'$  са  $\frac{y' - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + y' \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{y' - 1}{y' + 1}$ :

$$y + x \frac{y' - 1}{y' + 1} = 0, \quad \text{тј.} \quad y' = \frac{y - x}{y + x},$$

што је хомогена диференцијална једначина. Решавамо је сменом  $\frac{y}{x} = z$ ,  $y' = z'x + z$  и добијамо једначину са раздвојеним променљивим

$$\frac{z + 1}{z^2 + 1} dz = -\frac{dx}{x}, \quad \text{чије је опште решње} \quad \ln \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -\ln x + C.$$

Ако заменимо  $(x, y) = (1, 3)$  у претходну једначину добијамо  $C = \ln \sqrt{10} + \operatorname{arctg} 3$  - па се тражена изогонална трајекторија добија за ту вредности константе  $C$  из општег решења.

*Рада Мутаџић Букић*