Konačne jed. kretanja tačke u Dekartovim koordinatama. Prirodni postupak

(1) Tačka se kreće u ravni Oxy saglasno konačnim jednačinama kretanja:

$$x = 2t - \frac{t^2}{2} \quad i \quad y = t-2$$

gde je t mereno u sekundama, a koordinate x i y u metrima.

Na osnovu datih jednačina kretanja tačke odrediti:

a) liniju putanje i trajektoriju

b) smer kretanja tačke po trajektoriji

c) brzinu tačke i jednačinu hodografa brzine

d) ukupno, tangentno i normalno ubrzanje tačke u trenutku $t_1 = 2$.

e) poluprečnik krivine trajektorije tačke u položaju u kome se ona našla u trenutku $t_1 = 2s$, primenom kinematske metode.

a) i b) Iz konačnih jednačina kretanja treba eliminisati vreme t i dobiti vezu između koordinata tačke x i y, tj jednačinu koju zadovoljavaju veličine x i y u obliku: $y = y(x)$ ili $f(x,y) = 0$. Ove jednačine predstavljaju jednačinu krive linije u ravni Oxy u eksplicitnom, odnosno implicitnom obliku. Ova kriva linija naziva se **linija putanje tačke**. S obzirom na formu (oblik funkcija $x = x(t)$, $y = y(t)$) u ovom zadatku, vreme t se lakše može izračunati iz funkcije $y = y(t)$ nego iz funkcije $x = x(t)$:

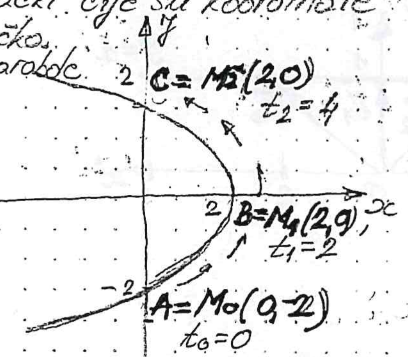
$y = t-2 \Rightarrow t = 2+y$.

i zameniti u konačnu jed. kretanja tačke u pravcu ose Ox:

$x = 2(2+y) - \frac{1}{2}(2+y)^2 \Rightarrow \boxed{y^2 = 4-2x}$, $x \leq 2$

Dobija jednačina $y = y(x)$ predstavlja jednačinu parabole za $x \leq 2$ $(y^2 \geq 0)$. Osa ove parabole je osa Ox. Ona seče osu Ox osu u tački čije su koordinate $B(2,0)$, a osu Oy u tačkama $A(0,-2)$ i $C(0,-2)$. Tačka $B(2,0)$ je teme parabole.

Kada $x \to -\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$.



Trajektorija je deo linije putanje po kojoj se tačka M kreće, a određuje se iz činjenice da je parametar t u konačnim jednačinama kretanja tačke, vreme, tj da uzima vrednosti: $t \geq 0$ (nenegativne vrednosti). Da bi se odredila trajektorija potrebno je ispitati ili tok konačne jednačine kretanja u pravcu ose Ox, ili tok konačne jednačine kretanja tačke pravcu ose Oy, ili tok obe navedene funkcije (ako postoje nedoumice u pogledu jednoznačnosti ovih funkcija). Za analizu trajektorije i smera kretanja po njoj obično se, u prvom koraku, bira jednostavnija funkcija. U ovom slučaju to je funkcija: $y = y(t) = t-2$

Prvo se određuje početni položaj tačke, M_0, njen položaj u trenutku $t_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} t_0 = 0,\ M_0,\quad y_0 = y(t_0 = 0) = -2 \Rightarrow A = M_0(0,-2) \\ t > 0,\ M,\quad y = y(t) \uparrow \text{ (monotono rastuća)} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Trajektorija deo parabole od tačke} \\ A = M_0 \text{ na desno, za } y \geq -2\end{array}$$

U položaj B na paraboli tačka stiže u trenutku t_1:

$y_1 = y(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 2$ $\quad (B = M_1(2,0))$

a u položaj C u trenutku t_2:

$y_2 = y(t_2) = 2 \Rightarrow t_2 - 2 = 2 \Rightarrow t_2 = 4$ $\quad (C = M_2(0,2))$

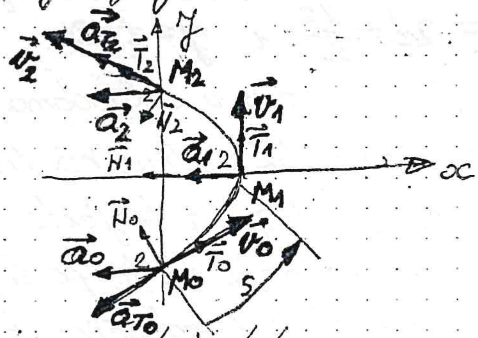
c) $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$; $\vec{v}_x = \dot{x}\vec{i}$, $\vec{v}_y = \dot{y}\vec{j}$ / $\Rightarrow v_x = \vec{v}\cdot\vec{i} = \dot{x}$, $v_y = \vec{v}\cdot\vec{j} = \dot{y}$

$\vec{v} = \{\dot{x}, \dot{y}\}$; $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; $\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(2t - \frac{1}{2}t^2\right) \Rightarrow \dot{x} = 2 - t$

$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$; $\dot{y} = \frac{d}{dt}(t-2) \Rightarrow \dot{y} = 1$

$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{1 + (2-t)^2}$



$\vec{v}$ – pravac tangente na trajektoriju

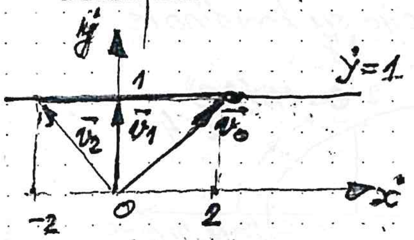
Ako se vektori brzina $\vec{v} = \vec{v}(t)$ u različitim trenucima nacrtaju tako da imaju istu početnu tačku $O_1 = O$, onda kriva koja spaja krajeve tih vektora predstavlja **hodograf vektora brzine $\vec{v} = \vec{v}(t)$**. Jednačina ove krive određuje se u Dekartovom koordinatnom sistemu $O\dot{x}\dot{y}$. Duž osa $O\dot{x}$ i $O\dot{y}$ nanose vrednosti projekcija $\dot{x}$ i $\dot{y}$ vektora brzine $\vec{v}$ u različitim trenucima. Ose $O\dot{x}$ i $O\dot{y}$ paralelne su osama Ox i Oy Dekartovog koordinatnog sistema Oxy.

	$t_0=0$ $M_0(0,-2)$	$t_1=2$ $M_1(2,0)$	$t_2=4$ $M_2(0,2)$
$\dot{x}$	2	0	−2
$\dot{y}$	1	1	1
$\lvert\vec{v}\rvert$	$\sqrt{5}$	↘ 1	↗ $\sqrt{5}$
$\ddot{x}$	−1	−1	−1
$\ddot{y}$	0	0	0
$\lvert\vec{a}\rvert$	1	1	1
a_T	$-2/\sqrt{5}$	↗ 0	↗ $2/\sqrt{5}$
a_N	$\sqrt{5}/5$	0	$\sqrt{5}/5$
R_K	$5\sqrt{5}$		

($\dot{x}$↓)
$\dot{y}$=const

Jednačina hodografa brzine u $O\dot{x}\dot{y}$ biće data jednačinom krive linije oblika $\dot{y} = \dot{y}(\dot{x})$, odnosno $g(\dot{x}, \dot{y}) = 0$. Ona se dobija na isti kao i jednačina linije putanje u Oxy. Naime, potrebno je iz funkcija $\dot{x} = \dot{x}(t)$ i $\dot{y} = \dot{y}(t)$ eliminisati vreme. U posmatranom slučaju je:

$\left.\begin{array}{l}\dot{x}(t) = 2 - t \\ \dot{y}(t) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow$ **Hodograf brzine je deo prave linije $\dot{y} = 1$ određen činjenicom da je $t \geq 0$, tj. da je $\dot{x} \leq 2$.**



d) $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$; $\vec{a}_x = \ddot{x}\vec{i}$, $\vec{a}_y = \ddot{y}\vec{j}$ $(\vec{a}_x \perp \vec{a}_y)$

$a_x = \vec{a}\cdot\vec{i} = \ddot{x}$, $a_y = \vec{a}\cdot\vec{j} = \ddot{y} \Rightarrow \vec{a} = \{\ddot{x}, \ddot{y}\}$

$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d}{dt}(2-t) \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \ddot{x}(t) = -1}$

$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}$, $\ddot{y} = \frac{d}{dy}(1) \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = 0}$

$|\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \Rightarrow \boxed{|\vec{a}| = 1}$

e) U prirodnom triedru, triedru vezanom za liniju putanju (trajektoriju)

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$, $\vec{a}_T \perp \vec{a}_N \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$ $\vec{a}_T = a_T\vec{T}$, $\vec{a}_N = a_N\vec{N}$

$a_T = \vec{a}\cdot\vec{T}$ i $a_N = \vec{a}\cdot\vec{N}$ (tangentno i normalno ubrzanje projekcije $\vec{a}$ na osu tangente i osu glavne normale prirodnog triedra u posmatranoj tački trajektorije

$a_T = \frac{dv}{dt}$ i $v = \vec{v}\cdot\vec{T} \Rightarrow v = v_T$ – mera promene algebarske vrednosti brzine

$a_N = v^2/R_K$ – mera promene brzine po pravcu

$\vec{T}$ i $\vec{N}$ – ortovi tangente i glavne normale; menjaju svoj pravac od tačke do tačke trajektorije: $\vec{T} = \vec{T}(s)$ i $\vec{N} = \vec{N}(s)$;

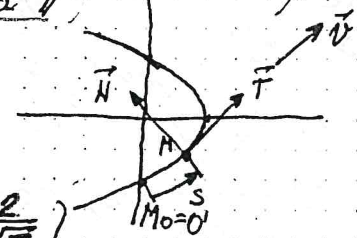
" " $\vec{T} = \vec{T}(s)$ prati smer porasta lučne koordinate s.

$v = \begin{cases} |\vec{v}|, & \vec{v} \text{ i } \vec{T} \text{ imaju isti smer} \\ -|\vec{v}|, & \vec{v} \text{ i } \vec{T} \text{ imaju suprotan smer} \end{cases}$

U posmatranom slučaju, kada tačka ne menja smer kretanja za $t \geq 0$ je:

$\boxed{v = |\vec{v}|}$ ($\vec{v}$ prati smer porasta lučne koordinate s, tj., ima isti smer kao i ort $\vec{T}$ i prema tome pozitivnu projekciju na $\vec{T}$)

i



$v = \sqrt{1+(2-t)^2} = \sqrt{5-4t+t^2}$,

pa je tangentno ubrzanje:

$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{5-4t+t^2}$, $a_T = \frac{1}{2v} \cdot \frac{d}{dt}(5-4t+t^2)$ i

$a_T = \frac{2t-4}{2v} \Rightarrow \boxed{a_T = \frac{t-2}{v}} \Rightarrow$

$\boxed{a_{T_0}} = a_T(t_0=0) = \frac{-2}{v_0} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$a_{T_1} = a_T(t_1=2) = \frac{0}{v_1} = 0$

$a_{T_2} = a_T(t_2=4) = \frac{2}{v_2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$0 \leq t < 2$ – usporeno, $v\downarrow$

$2 \leq t < \infty$ – ubrzano $v\uparrow$

II način određivanja $\vec{a}_T$

$\vec{a} \cdot \vec{v} = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}$

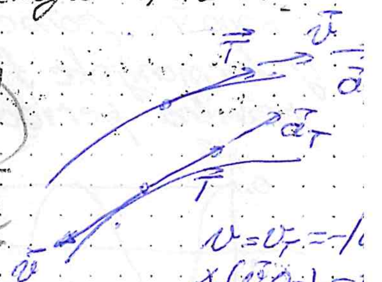
$\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a}_T \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot \underbrace{|\vec{a}_T| \cos\measuredangle(\vec{a}_T, \vec{v})}_{a_T}$

$\vec{a}_T, \vec{v}$ – kolinearni istog smera $\cos\measuredangle(\vec{v}, \vec{a}_T) = 1$ $\Rightarrow$

$\vec{a}_T, \vec{v}$ – kolinearni suprotnog smera $\cos\measuredangle(\vec{v}, \vec{a}_T) = -1$

$\vec{a}_T \cdot \vec{v} = a_T v$

$\Rightarrow$ ako je $\vec{v}$ prati smer porasta lučne koordinate, onda je $|\vec{v}| = v$, a $|\vec{a}_T| \cos\measuredangle(\vec{v}, \vec{a}_T) = a_T$, projekcija $\vec{a}_T$ na $\vec{T}$. ?



Gornja 2 izraza daju jednačinu

$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = |\vec{v}| \cdot a_T \Rightarrow \boxed{a_T = \frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{|\vec{v}|}}$ ili $\boxed{a_T = \frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{v}}$

$v = v_T = -|$

$\measuredangle(\vec{v}, \vec{a}_T) = $

U npr., $t_1 = 2 \Rightarrow a_{T_2} = \frac{\dot{x}_2\ddot{x}_2 + \dot{y}_2\ddot{y}_2}{v_2} = \frac{0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0}{v_2} = 0$ važi uvek

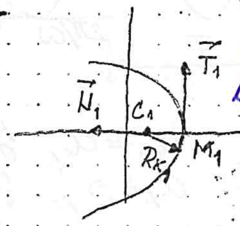
Normalno ubrzanje a_N određuje se iz izraza:

$a_N^2 = a^2 - a_T^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$, $\boxed{a_N > 0}$ uvek, smer $\vec{N}$ $\Rightarrow$

$a_{N_0} = \sqrt{1 - a_{T_0}^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$a_{N_1} = \sqrt{1 - a_{T_1}^2} = \sqrt{1 - 0^2} = 1$

$a_{N_2} = \sqrt{1 - 4/5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$



$\vec{a}_T \cdot \vec{v} = (a_T)(-v) \cdot (-$

$a_T \cdot v$

e) $a_N = \frac{v^2}{R_K} \Rightarrow \boxed{R_K = \frac{v^2}{a_N}}$ $\boxed{R_{K_0}} = \frac{v_0^2}{a_{N_0}} = \frac{5}{\sqrt{5}/5} = 5\sqrt{5}$

$R_{K_1} = \frac{v_1^2}{a_{N_1}} = \frac{1}{1} = 1$ i $R_{K_2} = \frac{v_2^2}{a_{N_2}} = 5\sqrt{5}$

R_K – poluprečnik zamišljene kružnice u oskulatornoj ravni u posmatranoj tački krive kojom se kriva u beskonačno maloj okolini te tačke može aproksimirati. Centar te kružnice naziva se centar krivine krive

II način. – $R_K = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$

$y^2 = 4 - 2x \Rightarrow \frac{dy^2}{dx} = \frac{d}{dx}(4-2x)$

$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 2y \cdot y'$

$\Rightarrow 2yy' = -2 \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{1}{y}}$ $y_1' = y'(t_1) = -\frac{1}{y_1} = -\frac{1}{0}$???

$yy' = -1 \Rightarrow \frac{d}{dx}(yy') = \frac{d}{dx}(-1) \Rightarrow \frac{dy}{dx}y' + y\frac{dy'}{dx} = 0 = \boxed{(y')^2 + yy'' = 0} \Rightarrow yy'' = -\left(-\frac{1}{y}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y'' = -\frac{1}{y^3}} \Rightarrow R_K = \frac{\left(1+\frac{1}{y^2}\right)^{3/2}}{\left|-\frac{1}{y^3}\right|} = \frac{(1+y^2)^{3/2}}{|y|^3 \cdot \frac{1}{|y^3|}} \Rightarrow \boxed{R_K = (1+y^2)^{3/2}}$

$\frac{1}{|y^3|}$

(2) Konačne jednačine kretanja tačke u Dekartovom KS, Oxy, su:

$x = a\cos\omega t$ i $y = b\sin\omega t$, a, b, ω = pozitivne konstante, $a > b$

Odrediti:

a) liniju putanje, trajektoriju i smer kretanja tačke

b) $\vec{v} = \vec{v}(t)$ i hodograf brzine

c) tangentno, normalno i ukupno ubrzanje tačke u trenutku kada intenzitet brzine tačke postiže svoju maksimalnu vrednost prvi put od početka kretanja ($t_0 = 0$)

d) odrediti poluprečnik krivine trajektorije u tom trenutku.

a) $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a} = \cos\omega t \\ \frac{y}{b} = \sin\omega t \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \\ \alpha = \omega t \end{array}\right\}$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ linija putanje centralna elipsa

$O(0,0)$ – centar elipse

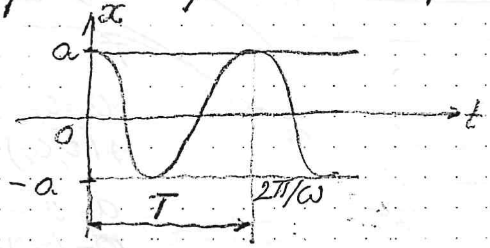
Dužina poluose elipse u pravcu ose Ox je a

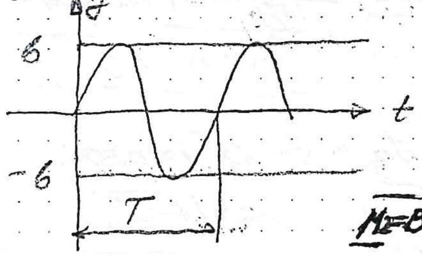
Dužina poluose elipse u pravcu ose Oy je b

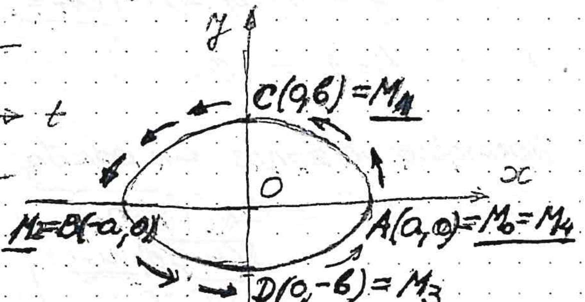
Temena elipse su: $A(a,0)$ i $B(-a,0)$

Tačke preseka elipse i ose Oy su: $C(0,b)$ i $D(0,-b)$

Konačne jednačine kretanja tačke, $x = x(t)$ i $y = y(t)$ su trigonometrijske, tj. harmonijske funkcije, što znači da se vrednosti promenljivih x i y pravilno periodično ponavljaju. Period ovih funkcija je: $T = \frac{2\pi}{\omega}$







$t_0 = 0$; $x_0 = a$, $y_0 = 0$, $M_0 = A(a,0)$

$t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, $x_1 = 0$, $y_1 = b$, $M_1 = C(0,b)$

$t_2 = \frac{\pi}{\omega}$, $x_2 = -a$, $y_2 = 0$, $M_2 = B(-a,0)$

$t_3 = \frac{3\pi}{2\omega}$, $x_3 = 0$, $y_3 = -b$, $M_3 = D(0,-b)$

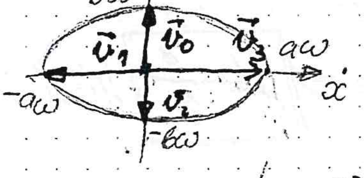
$t_4 = T = \frac{2\pi}{\omega}$, $x_4 = a$, $y_4 = 0$, $M_4 = A(a,0)$

Cela elipsa je trajektorija tačke. Tačka obilazi elipsu u naznačenom smeru

(ne menja smer kretanja)

b) $\left.\begin{array}{l} \dot{x} = -a\omega\sin\omega t \\ \dot{y} = b\omega\cos\omega t \end{array}\right| \Rightarrow |\vec{v}| = \omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t} = a\omega\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2\omega t}$

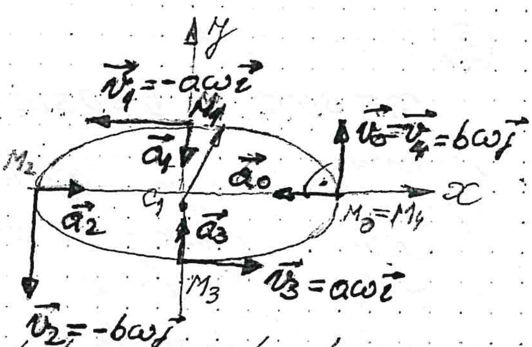
$\frac{\dot{x}^2}{a^2\omega^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2\omega^2} = 1$ – hodograf brzina centralna elipsa sa poluosama $a\omega$ i $b\omega$ u pravcima osa $O\dot{x}$ i $O\dot{y}$, respektivno



c) $\left.\begin{array}{l} \ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{y} = -b\omega^2\sin\omega t \end{array}\right| \Rightarrow |\vec{a}| = \omega^2\sqrt{a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t}$

$|\vec{a}| = \omega^2 a\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2\omega t}$

	$t_0=0$ $M_0(a,0)$	$t_1=\frac{\pi}{2\omega}$ $M_1(0,b)$	$t_2=\pi/\omega$ $M_2(-a,0)$	$t_3=3\pi/2\omega$ $M_3(0,-b)$	$t_4=\frac{2\pi}{\omega}$ $M_4(a,0)$
$\dot{x}$	0	$-a\omega$	0	$a\omega$	0
$\dot{y}$	$b\omega$	0	$-b\omega$	0	$b\omega$
$\lvert\vec{v}\rvert$	$b\omega$	$a\omega$	$b\omega$	$a\omega$	$b\omega$
$\ddot{x}$	$-a\omega^2$	0	$a\omega^2$	0	$-a\omega^2$
$\ddot{y}$	0	$-b\omega^2$	0	$b\omega^2$	0
$\lvert\vec{a}\rvert$	$a\omega^2$	$b\omega^2$	$a\omega^2$	$b\omega^2$	$a\omega^2$



Određivanja trenutaka t_k u kojima brzina ima ekstremnu vrednost inteziteta:

$$\boxed{\frac{d}{dt}|\vec{v}|=0} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}\right]=\frac{\omega}{2|\vec{v}|}\frac{d}{dt}\left(a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t\right)$$

tj. $$\frac{d|\vec{v}|}{dt}=\frac{\omega\left(a^2\cdot 2\sin\omega t\cos\omega t\cdot\omega-2b^2\cos\omega t\sin\omega t\cdot\omega\right)}{2|\vec{v}|}$$

i $$\frac{d|\vec{v}|}{dt}=\frac{\omega^2(a^2-b^2)}{2|\vec{v}|}\sin 2\omega t \Rightarrow \boxed{\frac{\omega^2(a^2-b^2)}{2|\vec{v}|_{t_k}}\sin 2\omega t_k=0} \Rightarrow \boxed{2\omega t_k=k\pi}$$

$k=0,1,\ldots$

$$\boxed{t_k=\frac{k\pi}{2\omega}} \quad \boxed{k=0,1,\ldots n}$$

Da li u trenucima $t_0=0$; $t_1=\frac{\pi}{2\omega}$, $t_2=\frac{\pi}{\omega}$, $t_3=\frac{3\pi}{2\omega}$ ... brzina ima maksimalni ili minimalni intezitet može se proceniti na bazi gornje tabele, bez određivanja znaka drugog izvoda funkcije $|\vec{v}|=f(t)$, $\frac{d^2}{dt}|\vec{v}|$ u trenucima t_k $\left(\frac{d^2}{dt^2}|\vec{v}|\Big|_{t_k}>0 \Rightarrow |\vec{v}_k|=|\vec{v}(t_k)|=|\vec{v}_{min}|\right.$ i $\left.\frac{d^2|\vec{v}|}{dt^2}\Big|_{t_k}<0 \Rightarrow |\vec{v}_k|=|\vec{v}(t_k)|=|\vec{v}_{max}|\right)$. Naime, pošto je $a>b$, može se zaključiti da je u trenucima

$t_0=0$, $t_2=\frac{\pi}{\omega}$, $t_4=\frac{2\pi}{\omega}$, $|\vec{v}_0|=|\vec{v}_2|=|\vec{v}_4|=|\vec{v}_{min}|$, gde je $|\vec{v}_{min}|=b\omega$

i

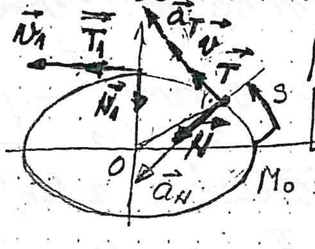
$t_1=\frac{\pi}{2\omega}$, $t_3=\frac{3\pi}{2\omega}$, $|\vec{v}_1|=|\vec{v}_3|=|\vec{v}_{max}|$, gde je $|\vec{v}_{max}|=a\omega$

Dakle, maksimalna vrednost intenziteta brzine, prvi put od početka kretanja, postiže se trenutku $\boxed{t_1=\pi/2\omega}$ a iznosi: $\boxed{|\vec{v}_1|=a\omega}$.

U tom trenutku intezitet ubrzanja je: $\boxed{|\vec{a}_1|=|\vec{a}(t_1)|=b\omega^2}$

Ako sada uvedemo lučnu koordinatu s i prirodni triedar, onda će zbog toga što tačka ne menja smer kretanja, smer porasta lučne koordinate pratiti **smer $\vec{v}$**, pa će **ort tangente** $\vec{T}$ i $\vec{v}$ imati isti smer:

$v_T=v=|\vec{v}|$.



$\vec{v}_0\perp\vec{a}_0$
$\vec{a}_0=\vec{a}_{N0}$
$\vec{v}_1\perp\vec{a}_1$
$\vec{a}_1=\vec{a}_{N1}$
$\vec{v}_2\perp\vec{a}_2$
$\vec{a}_2\neq\vec{a}_{N2}$

Tangentno ubrzanje u trenutku t_1 biće:

$$a_{T_1}=a_T(t_1)=\frac{dv}{dt}\Big|_{t_1} \text{ i iznosiće } \boxed{a_{T1}=0}$$

Normalno ubrzanje u trenutku t_1 je:

$$a_{N_1}^2=a_1^2-a_{T_1}^2 \Rightarrow \boxed{a_{N1}=a_1=b\omega^2}$$

Poluprečnik krivine krive u t_1 iznosi: $R_{k1}=R_k(t_1)=\frac{v_1^2}{a_{N1}}$; $\boxed{R_{k1}=\frac{a^2}{b}}$

$t_0=0<t<t_1$ $\quad v\uparrow$, $\vec{a}_T$ i $\vec{v}$ imaju isti smer

($\vec{N}$ - ort glavne normale u proizvoljnom t nema pravac OM)

③ Tačka se kreće u ravni Oxy saglasno jednačinama:

$x = \sin t$ i $y = 2\sin t$

Odrediti:

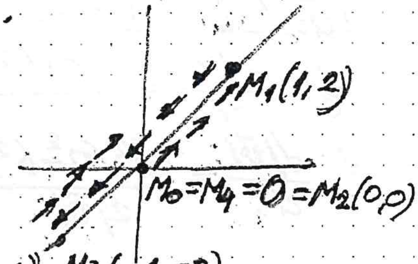
a) liniju putanje i trajektoriju tačke

b) brzinu i ubrzanje tačke

c) zakon puta tačke

d) pređeni put tačke za prvih $T = 2\pi$ sekunde

a) $y = 2x$ – linija putanje prava linija koja prolazi kroz $O(0,0)$, a koja sa osom Ox gradi ugao α i $tg\alpha = 2$.



U $t_0 = 0 \Rightarrow x_0 = y_0 = 0$; $M_0(0,0) = O$

$0 < t \le t_1 = \frac{\pi}{2}$, $x\uparrow, y\uparrow$ do $x_1 = 1, y_1 = 2$; $M_1(1,2)$

$\frac{\pi}{2} < t \le t_2 = \pi$, $x\downarrow, y\downarrow$ do $x_2 = 0, y_2 = 0$, $M_2(0,0)$

$\pi < t \le t_3 = \frac{3\pi}{2}$ $x\downarrow, y\downarrow$ do $x_3 = -1, y_3 = -2$, $M_3(-1,-2)$

$\frac{3\pi}{2} < t \le t_4 = 2\pi$, $x\uparrow, y\uparrow$ do $x_4 = 0, y_4 = 0$, $M_4(0,0) = M_0$

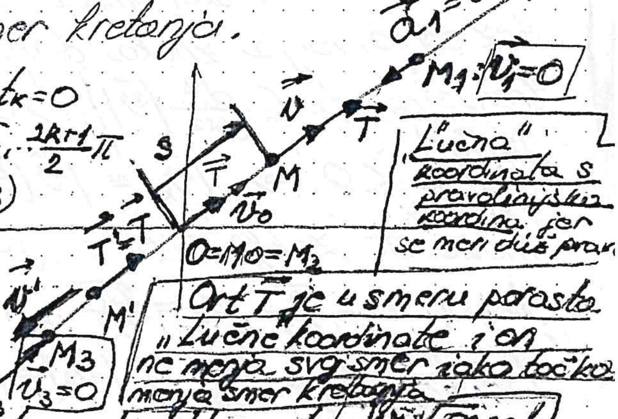
Trajektorija deo prave određen vrednostima x koordinate: $-1 \le x \le 1$. Tokom kretanja tačka menja smer kretanja.

b) $\left.\begin{array}{l}\dot{x} = \cos t \\ \dot{y} = 2\cos t\end{array}\right\}$ $|\vec{v}| = \sqrt{5}|\cos t|$ $|\vec{v}| = 0$, $\cos t_k = 0$

$|\vec{v}_0| = \sqrt{5}$ $t_k = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \frac{2k+1}{2}\pi$ (u M_1 i M_3)

$\ddot{x} = -\sin t$ | $|\vec{a}| = \sqrt{5}|\sin t|$

$\ddot{y} = -2\sin t$



"Lučna" koordinata s pravolinijska koordinata jer se meri duž prave

Ort $\vec{T}$ je u smeru porasta „Lučne koordinate" i on ne menja svoj smer iako tačka menja smer kretanja.

$\boxed{R_K \to \infty \Rightarrow a_N = \frac{v^2}{R_K} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_T}$

c) Za:

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2} < t \le 2\pi$; $v = v_T = |\vec{v}|$ i $0 \le \cos t \le 1$, $|\cos t| = \cos t \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{5}\cos t}$

$\frac{\pi}{2} < t \le t_3 = \frac{3\pi}{2}$; $v = v_T = -|\vec{v}|$ i $-1 \le \cos t < 0 \Rightarrow |\cos t| = -\cos t$

$v = -\sqrt{5}|\cos t| = -\sqrt{5}(-\cos t) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{5}\cos t}$

$\boxed{\text{Dakle za bilo koje } t: \ v = \sqrt{5}\cos t}$

s druge strane je: $v = \dot{s} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{5}\cos t \Rightarrow \int_{s_0=0}^{s} ds = \sqrt{5}\int_{t_0=0}^{t} \cos t \, dt \Rightarrow$

$\Rightarrow s - s_0 = \sqrt{5}\sin t \Big|_{t_0}^{t} \Rightarrow \boxed{s(t) = \sqrt{5}\sin t}$

d) $v = \sqrt{5}\cos t$; $v(t_k) = 0 \Rightarrow \sqrt{5}\cos t_k = 0 \Rightarrow \boxed{t_k = \frac{2k+1}{2}\pi, k = 0, 1,}$

$k = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $s_1 = s(t_1) = \sqrt{5}\sin\frac{\pi}{2}$, $s_1 = \sqrt{5}$ (tačka M_1)

$k = 1$, $t_3 = \frac{3\pi}{2}$, $s_3 = s(t_3) = \sqrt{5}\sin\frac{3\pi}{2}$, $s_3 = -\sqrt{5}$ (tačka M_3)

$s_0 = s(t_0) = 0$ i $s_4 = s(t_4 = 2\pi) = 0$ (tačke $M_0 = M_4$)

$\boxed{S = |s_1 - s_0| + |s_3 - s_1| + |s_4 - s_3| = |\sqrt{5} - 0| + |-\sqrt{5} - \sqrt{5}| + |0 - (-\sqrt{5})| = 4\sqrt{5}}$

isto važi i u slučaju

U zadacima ①, ② i ③ model tačke M nije konkretizovan, u smislu da li je tačka M slobodna ili vezana, da li predstavlja entitet sam za sebe ili predstavlja tačku nekog krutog tela. Cilj ovih zadataka je bio da ilustruje metode i postupke određivanja kinematskih veličina kada su poznate konačne jednačine kretanja (KJK) u Dekartovom koordinatnom sistemu (DKS) i zakon puta, tj. KJK tačke po trajektoriji. U nastavku se bavimo istim problemom, ali ćemo posmatrati tačku M kao element nekog tela ili sistema tela, čije KJK nisu unapred poznate, ali se mogu odrediti iz geometrijskih odnosa (veza) i zakona promene neke geom. veličine u vremenu.

④ Točak poluprečnika R kotrlja se bez klizanja (linchus!) po ravnoj nepokretnoj podlozi. Brzina centra C točka je konstantna i njen intezitet je $v_C = kR$ ($k=const$). Odrediti intezitet brzine i ubrzanje one tačke M na obodu točka koja je u početnom trenutku $t_0=0$ bila na podlozi. Koliki put pređe tačka M dok ne dođe u svoj najviši položaj na putanji?

Točak vrši kretanje koje se naziva kotrljanje (sa ili bez klizanja) po nepokretnoj ravnoj podlozi, a koje spada u grupu kretanja krutih tela koje se naziva ravno kretanje krutog tela. Ne ulazeći u kinematiku ove vrste kretanja primetimo da je ovo kretanje kompozicija dva elementarna kretanja koja se vrše istovremeno: translacije (čisto klizanje diska po podlozi) i rotacije oko translatorno pokretne ose upravne na točak (ose Cz).

Pri translaciji (čistom klizanju) točka po podlozi tačka ~~dodira~~ točka koja je u kontaktu i podlogom je u svakom trenutku ista tačka točka.

Pri rotaciji točka oko, npr, ose Cz, tačka ~~dodira~~ točka koja je u kontaktu sa podlogom je u svakom trenutku neka druga tačka diska, pri čemu se tačke tela u odnosu na osu Cz kreću po kružnicama čiji je centar tačka C.

Kretanje krutog tela (točka) pri ravnom kretanju može se predstaviti kao kretanje ravne figure (jednog ravnog preseka tela) u ravni Oxy, u toj ravni (krug, 2D-ravna figura u ravni Oxy kreće se u ravni Oxy)

Neka je početni položaj diska na podlozi u ravni Oxy dat slikom. Tačka diska koja je u trenutku $t_0=0$ u kontaktu sa podlogom je tačka M_0. Nepokretan KS Oxy postavljen je tako da tačke M_0 i C_0 (centar točka u $t_0=0$) točka u $t_0=0$, leže na osi Oy ($O=M_0$). Osa Ox poklapa se tragom ravni po kojoj se točak kotrlja.

Tački C_0 saopštena je brzina $\vec{v}_{C_0} = Rk\vec{i}$. **Potrebno je uočiti položaj točka, tj. njegovih tačaka C i M u proizvoljnom trenutku t** (dužina intervala vremena $[t_0=0, t]$ može biti bilo kakva ili beskonačno mala ili konačne dužine). **Pošto su i podloga i točak apsolutno kruti** normalno rastojanje centra diska C od podloge se neće menjati tokom kretanja točka, tj. $y_C(t) = const$, i $y_C = R$, dok je $x_C = x_C(t)$. Na bazi toga zaključujemo da se tačka C (centar točka) tokom kotrljanja točka po podlozi kreće po pravoj liniji koja je paralelna sa tragom ravni, tj. osom Ox. U zadatku je dato da je intezitet brzine tačke C konstantne. Iz te činjenice se može odrediti konačna jednačina kretanja tačke C u pravcu ose Ox. Naime:

$$\left.\begin{array}{l} x_C = x_C(t) \\ y_C = R \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_C = \dot{x}_C\vec{i} + \dot{y}_C\vec{j},\ \dot{y}_C = 0 \Rightarrow \vec{v}_C = \dot{x}_C\vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_C| = v_C = \dot{x}_C$$

($\vec{v}_C$ ima pozitivnu projekciju na osu Ox, $\vec{v}_C$ ima isti smer kao i osa Ox.)

$$v_C = \dot{x}_C \Rightarrow Rk = \frac{dx_C}{dt} \Rightarrow \int_{x_{C_0}=0}^{x_C} dx_C = Rk\int_{t_0=0}^{t} dt \Rightarrow \boxed{x_C = Rkt}$$ – zakon puta tačke C

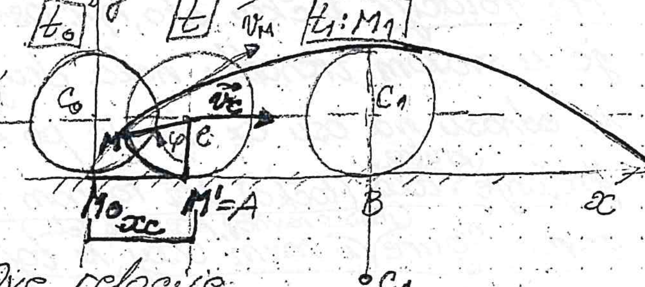
Što se tiče položaja tačke M točka koja je u početnom trenutku bila tačka dodira točka i podloge možemo zaključiti sledeće: ako bi točak samo klizao po podlozi, ta tačka točka bi ostala tačka dodira podloge i točka i došla bi nakon isteka vremena t u položaj M' ($\overline{M_0M'} = x_C$). Međutim, pošto pri kotrljanju točak istovremeno vrši i rotaciju i oko ose Cz, tačke M ne ostaje u položaju M', već prelazi u položaj M, pri čemu je: $\overline{CM} = \overline{CM'}$ (tačka M se pri ovoj rotaciji kreće po kružnici). **Ugao nad lukom kružnice $\widehat{MM'}$ je ugao $\varphi = \varphi(t)$, ugao rotacije točka pri njegovom kotrljanju po ravnoj podlozi:**

Dužina luka $\widehat{M'M}$ je:

$$\widehat{MM'} = R\cdot\varphi(t) \Rightarrow \boxed{\varphi = \measuredangle(CM', CM) = \measuredangle(O_y, CM)}\ (O_y \parallel CM')$$

a dužina duži M_0M' je:

$$M_0M' = x_C$$



Pri kotrljanju bez klizanja važi:

$$\boxed{M_0M' = M'M} \Rightarrow \boxed{x_C(t) = R\varphi(t)}.$$ Ove relacije izražavaju činjenicu da je **put koji pređe tačka dodira točka i podloge pri čistom klizanju jednak je putu koji ona pređe usled rotacije oko ose Cz na intervalu vremena $[t_0, t]$**. U trenutku t tačka A točka je u dodiru sa podlogom.

Kako je:

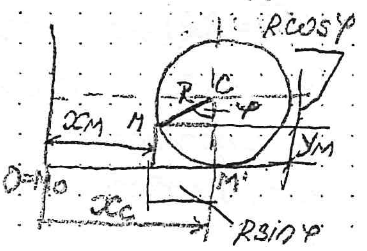
$$x_C(t) = R\varphi(t) \Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi(t) = \frac{x_C(t)}{R}} \Rightarrow \varphi = \varphi(t) = \frac{Rkt}{R} \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = kt}$$

– zakon rotacije određen je pri kotrljanju bez klizanja KJK centra C točka

Iz geometrijski odnosa sa slike moguće je sada odrediti KJK tačke M u KS Oxy:

$$x = x_C - R\sin\varphi = R\varphi - R\sin\varphi \qquad y = R - R\cos\varphi$$

$x = x(\varphi)$; $y = y(\varphi)$ parametarske jednačine krive koja se naziva cikloida



Kako je $\varphi = kt$, to KJK tačke M glase:

$$x = Rkt - R\sin kt$$
$$y = R - R\cos kt$$

Iz ovih jednačina moguće je odrediti trenutak t_1 u kome tačka M dostiže svoj najviši položaj na trajektori i trenutak t_2 u kome tačka M ponovo predstavlja tačku dodira diska i podloge:

$y_1 = y(t_1)$ i $\boxed{y_1 = 2R} \Rightarrow 2R = R - R\cos kt_1 \Rightarrow \cos kt_1 = -1 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\pi}{k}}$

i $y_2 = y(t_2)$ i $y_2 = 0 \Rightarrow 0 = R - R\cos kt_2 \Rightarrow \cos kt_2 = 1 \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{2\pi}{k}}$ $(t_2 > t_1)$

Nakon trenutka t_2, tj. za $t > t_2$ tačka M započinje kretanje po novom luku cikloide. Ovde razmatramo osnovni kretanje na intervalu vremena $[t_0 = 0, t_2 = 2\pi/k]$

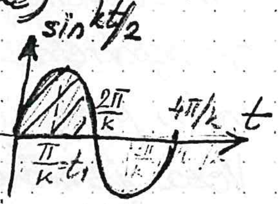
Brzina tačke M je:

$$\dot{x} = Rk - Rk\cos kt \qquad |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$
$$\dot{y} = Rk\sin kt \qquad |\vec{v}| = Rk\sqrt{\sin^2 kt + (1-\cos kt)^2} = Rk\sqrt{2(1-\cos kt)}$$

$\left(1 - \cos kt = 2\sin^2\frac{kt}{2}\right)$

tj. $\boxed{|\vec{v}| = 2Rk\left|\sin\frac{kt}{2}\right|}$ $\Rightarrow \boxed{|\vec{v}| = 2Rk\sin\frac{kt}{2}}$

Kako je $\left|\sin\frac{kt}{2}\right| = \sin\frac{kt}{2}$ za $0 \le t \le \frac{2\pi}{k}$



Projekcija brzine na ort tangente $\vec{T}$ na cikloide $v = v_T = |\vec{v}|$, tj.

$\boxed{v = 2Rk\sin\frac{kt}{2}}$; $\boxed{v_1 = v\left(t_1 = \frac{\pi}{k}\right) = 2Rk}$ $\boxed{v_2 = v\left(t_2 = \frac{2\pi}{k}\right) = 0}$

Ubrzanje tačke M je:

$$\ddot{x} = Rk^2\sin kt \qquad \ddot{y} = Rk^2\cos kt \quad \Rightarrow \boxed{|\vec{a}| = Rk^2}$$

Tangentno ubrzanje M je:

$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2Rk\sin\frac{kt}{2}\right) = Rk^2\cos\frac{kt}{2}} ; \boxed{a_{T_1} = 0}$$

Normalno ubrzanje M je:

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \Rightarrow \boxed{a_N = Rk^2\left|\sin\frac{kt}{2}\right|}$$

i $a_N = Rk^2\sin\frac{kt}{2}$ za $0 \le t \le \frac{2\pi}{k}$; $\boxed{a_{N_1} = Rk^2}$

Poluprečnik trajektorije u $t_1 = \frac{\pi}{k}$

$$R_{K_1} = \frac{v_1^2}{a_{N_1}} ; \boxed{R_{K_1} = 4R}$$

Zakon puta tačke M:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \int_{s_0=0}^{s} ds = \int_0^t v\,dt$$

$$s = \int_0^t 2Rk\sin\frac{kt}{2}\,dt$$

$$s = -4R\cos\frac{kt}{2}\Big|_0^t \Rightarrow \boxed{s = 4R\left(1 - \cos\frac{kt}{2}\right)}$$

Pređeni put od M_0 do M_1

$$s_1 = s(t_1) = 4R\left(1 - \cos\frac{k}{2}\frac{\pi}{k}\right)$$

$$s_1 = s(t_1) = 4R$$

Tačka ne menja smer kretanja na $[t_0, t_1]$, pa je pređeni put:

$$S = s_1 - s_0 \Rightarrow \boxed{S = 4R}$$

$\left(S = \overset{\frown}{M_0M_1} = |s_1 - s_0|\right.$, jer tačka ne menja smer kretanja.$\left.\right)$

(5) Štap AB rotira oko ose Az po zakonu $\varphi=4\pi t$. U tačkama O, A, B veze su zglobne ($\overline{OA}=\overline{AB}=R$). Štap AB preko klizača B dovodi u kretanje štap OM ($\overline{OM}=3R$) koji može da rotira oko ose Oz. Za tačku M štapa OM odrediti:
a) konačne jednačine kretanja b) liniju putanje i hodograf brzine
c) tangentno i normalno ubrzanje u trenutku $t_1=1/4$. d) zakon puta, kao i pređeni put od $t_0=0$ do $t_1=1/4$.

Na slici je prikazan sistem krutih tela: štap AB, klizač B i štap OM koji tokom kretanja ostaju u ravni slike, ravni Oxy. **Štap AB** rotira oko ose Az koja je upravna na ravan slike (ravan Oxy), pri čemu je kraj A štapa nepokretan, jer je pomoću cilindričnog zgloba vezan za nepokretnu podlogu (cilindrični zglob ne dozvoljava pomeranje one tačke tela za koju je vezan: $y_A=0$, $x_A=const$). **Ugao rotacije štapa** je ugao φ i predstavlja ugao između linije (ose) štapa i neke nepokretne ose u ravni kretanja štapa, npr. ose Ox: $\varphi=\measuredangle(Ox, AB)$. Ovo kretanje štapa AB se, s obzirom na unutrašnje veze, prenosi na odgovarajući način na klizač B i štap OM. Naime, pri kretanju štapa OA ova tela ne mogu ostati nepokretna, jer su kruta i međusobno vezana. To znači da **ugao rotacije štapa** OM (štap OM rotira oko nepokretne ose Oz, jer je u tački O vezan cilindričnim zglobom za nepokretnu podlogu: $x_0=0, y_0=0$), tj. ugao $\theta=\measuredangle(Ox, OM)$ nije nezavisan od ugla φ. **Veza između uglova φ i θ u svakom trenutku t određena je činjenicom da su štapovi AB i OM vezani preko klizača B:** klizač B i štap ~~OA~~ AB vezani su cilindričnim zglobom, a klizač B i štap OM obrazuju klizni par, jer se **klizač B može klizati po štapu OM.** Ovo su unutrašnje veze u sistemu.

Iz geometrije na slici u proizvoljnom trenutku t lako je naći da je:
- **ugao rotacije štapa $\overline{OM}$: $\theta=\frac{1}{2}\varphi$** ($\triangle OAB$ - jednakokraki trougao $\overline{OA}=\overline{AB}$)
- da je **pomeranje klizača B po štapu OM: $\overline{OB}=2R\cos\theta=2R\cos\frac{\varphi}{2}$**
- da su **konačne jednačine kretanja tačke B u Oxy:**

$\boxed{x_B}=\overline{OB}\cos\theta=2R\cos^2\frac{\varphi}{2}$ i $\boxed{y_B}=\overline{OB}\sin\theta=2R\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}=\boxed{R\sin\varphi}$

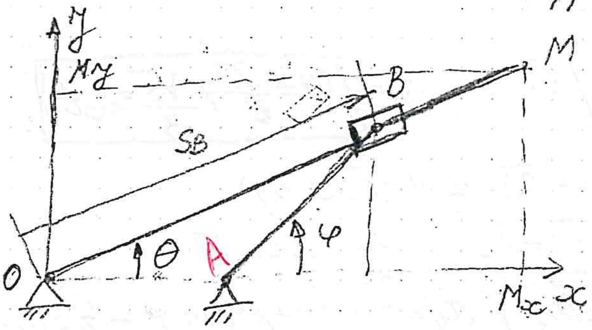
čime se pokazuje da je svako kretanje u sistemu određeno funkcijom, zakonom rotacije štapa OA: $\varphi=\varphi(t)$. I ne samo to **pomoću funkcije $\varphi=\varphi(t)$ može se odrediti kretanje bilo koje tačke ovog sistema tela, npr. tačke M.**

$$\left.\begin{aligned} x_M&=\overline{OM}\cos\theta=3R\cos\frac{\varphi}{2}, \\ y_M&=\overline{OM}\sin\theta=3R\sin\frac{\varphi}{2} \\ \varphi&=4\pi t \end{aligned}\right\} \boxed{x_M=3R\cos 2\pi t} \quad \boxed{y_M=3R\sin 2\pi t} \Longrightarrow x_M^2+y_M^2=9R^2$$

$T=\frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{T=1}$ $(\omega=2\pi)$

kar. trenuci: $t_0=0$, $t_1=\frac{\pi}{2\cdot 2\pi}=\frac{1}{4}$; $t_2=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

$t_3=\frac{3\pi}{2\cdot 2\pi}=\frac{3}{4}$



	$t_0=0$	$t_1=\frac{1}{4}$	$t_2=\frac{1}{2}$	$t_3=\frac{3}{4}$	$t_4=1$
x	3R	0	-3R	0	3R
y	0	3R	0	-3R	0

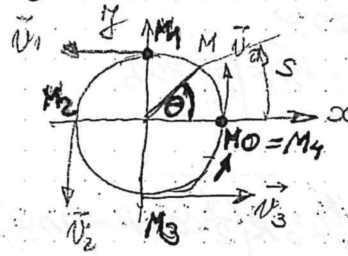
$\left(T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2\pi}=1\right)$

$\left.\begin{array}{l}\dot{x}_M=-6R\pi\sin 2\pi t\\ \dot{y}_M=6R\pi\cos 2\pi t\end{array}\right\} \Rightarrow \dot{x}_M^2+\dot{y}_M^2=36R^2\pi^2$ — hodograf brzine,

$v^2=36R^2\pi \Rightarrow |\vec{v}|=6R\pi$; $\boxed{v=6R\pi}$

$a_T=\frac{dv}{dt}$, $a_T=0$; $a_N=\frac{v^2}{R_{k_S}}=\frac{(6R\pi)^2}{3R_t} \Rightarrow \boxed{a_N=12\pi^2R}$

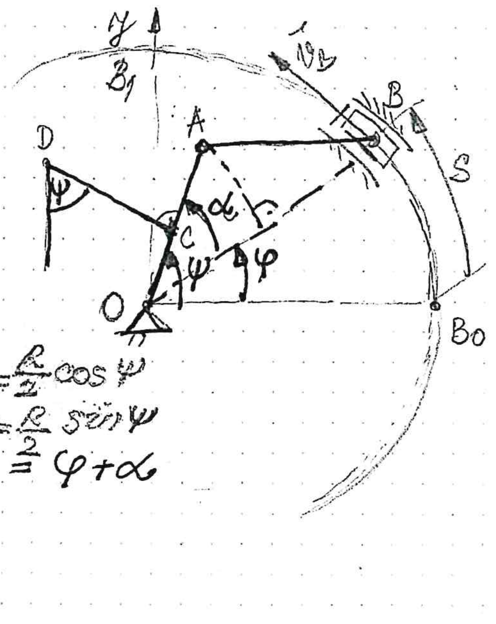
$ds=vdt=6R\pi dt \Rightarrow \int_{s_0=0} ds=\int_{t_0} 6R\pi dt \Rightarrow \boxed{s=6R\pi t}$



$t_1=\frac{1}{4}$; $S=\overset{\frown}{M_0M_1}=|s_1-s_0|=3R\frac{\pi}{2}$

<u>II način</u> ; $\left.\boxed{s=3R\theta=\frac{3}{2}R\varphi}\atop \varphi=4\pi t\right\} \Rightarrow S=6\pi t$

⑥ Klizač B kreće se brzinom konstantnog intenziteta $v_B=\omega_0R$ po kružnoj vodici poluprečnika $\overline{OB}=\sqrt{3}R$. Za klizač B je zglobno vezan štap AB, a za štap AB u tački A je zglobno vezan štap OA koji može da rotira oko nepokretne ose upravne na ravan slike. Za štap OA kruto je spojen štap CD, pri čemu je $CD\perp OA$. U početnom trenutku klizač B se nalazio u položaju B_0. Odrediti: jednačine kretanja tačke D, liniju putanje i hodograf brzine tačke D, vektor ubrzanja tačke D u trenutku kada se klizač B nađe u položaju B_1. Dato: $\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{CD}=2\overline{OC}=R$.



$x_C=\frac{R}{2}\cos\psi$
$y_C=\frac{R}{2}\sin\psi$
$\psi=\varphi+\alpha$

Dato: $\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{CD}=2\overline{OC}=R$; $\overline{OB}=R\sqrt{3}$

$v_B=\dot{s}=\omega_0R \Rightarrow S_B=v_Bt \Rightarrow \boxed{S_B=\omega_0Rt}$

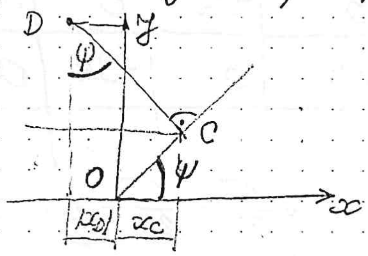
$S_B=\overline{OB}\cdot\varphi \Rightarrow \omega_0Rt=R\sqrt{3}\cdot\varphi \Rightarrow$

$\boxed{\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0 t}$

Ugao α ugao u ΔOAB:

$\left.\begin{array}{l}\overline{OA}=\overline{AB}=R\\ \overline{OB}=R\sqrt{3}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\overline{OB}=2R\cos\alpha\\ R\sqrt{3}=2R\cos\alpha\\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\alpha\end{array}\Bigg\} \begin{array}{l}\alpha=\frac{\pi}{6}\\ \alpha=30^\circ\end{array}$

Ugao rotacije štapa je $\measuredangle(Ox, OA)=\psi$; $\boxed{\psi=\varphi+\alpha}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\psi=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0 t}$



$$\boxed{x_D}=x_C-\overline{CD}\sin\psi=\overline{OC}\cos\psi-\overline{CD}\sin\psi$$

$$\boxed{y_D=y_C+\overline{CD}\cos\psi}=\overline{OC}\sin\psi+\overline{CD}\cos\psi$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_D&=\frac{R}{2}\cos\psi-R\sin\psi\\ y_D&=\frac{R}{2}\sin\psi+R\cos\psi\\ \psi&=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0 t\end{aligned}}$$

$$x_D^2=\frac{R^2}{4}\cos^2\psi+R^2\sin^2\psi-\frac{R^2}{2}\sin 2\psi$$

$$y_D^2=\frac{R^2}{4}\sin^2\psi+R^2\cos^2\psi+\frac{R^2}{2}\sin 2\psi$$

$$\boxed{x_D^2+y_D^2=\frac{5}{4}R^2}$$

Brzina:

$$\dot{x}_D=-\frac{R}{2}\dot{\psi}\sin\psi-R\dot{\psi}\cos\psi \Rightarrow \dot{x}_D=-\frac{\sqrt{3}}{6}R\omega_0\sin\psi-\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0 R\cos\psi$$

$$\dot{y}_D=\frac{R}{2}\dot{\psi}\cos\psi-R\dot{\psi}\sin\psi \qquad \dot{y}_D=\frac{\sqrt{3}}{6}R\omega_0\cos\psi-\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0 R\sin\psi$$

$$\dot{\psi}=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0$$

$$\boxed{\dot{x}_D^2+\dot{y}_D^2=\frac{5}{12}R^2\omega_0^2} \quad |\vec{v}_D|=\sqrt{\frac{5}{12}}R\omega_0$$

Ubrzanje

$$\ddot{x}_D=-\left(\frac{R}{2}\sin\psi+R\cos\psi\right)\ddot{\psi}-\dot{\psi}^2\left(\frac{R}{2}\cos\psi-R\sin\psi\right)$$

$$\ddot{y}_D=\left(\frac{R}{2}\cos\psi-R\sin\psi\right)\ddot{\psi}-\dot{\psi}^2\left(+\frac{R}{2}\sin\psi+R\cos\psi\right) \Rightarrow$$

$$\ddot{\psi}=0,\ \dot{\psi}=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0$$

$$\boxed{\begin{aligned}\ddot{x}_D&=-\frac{1}{3}\omega_0^2R\left(\frac{1}{2}\cos\psi-\sin\psi\right)\\ \ddot{y}_D&=-\frac{1}{3}\omega_0^2R\left(\frac{1}{2}\sin\psi+\cos\psi\right)\end{aligned}}$$

U trenutku t_1 ; $\varphi_1=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0 t_1 \Rightarrow t_1=\frac{3\pi}{2\sqrt{3}\omega_0} \Rightarrow \boxed{t_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{\omega_0}}$

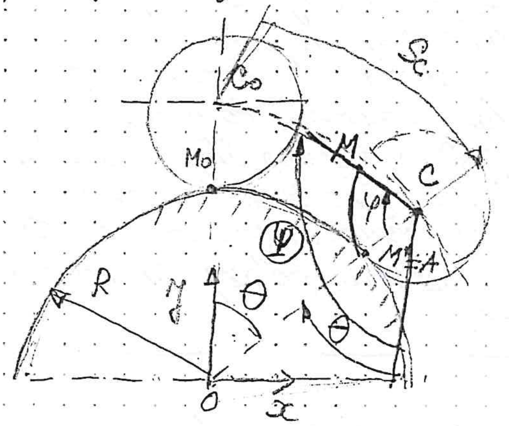
i $\psi_1=\psi(t_1)=\frac{\pi}{6}+\varphi_1 \Rightarrow \boxed{\psi_1=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}}$

pa je: $\ddot{x}_{D1}=-\frac{1}{3}\omega_0^2R\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_{D1}=\frac{R\omega_0^2}{6}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)}$

$\ddot{y}_{D1}=-\frac{1}{3}\omega_0^2R\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\ddot{y}_{D1}=\frac{R\omega_0^2}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)}$

$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2},\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(7) Po nepokretnom disku $R=2[m]$ kotrlja se bez klizanja disk poluprečnika $r=1[m]$ po zakonu $\varphi=\omega t\,[rad]$, gde je $\omega=1\left[\frac{rad}{s}\right]$, a vreme t dato u sekundama. Tačka M se na obodu manjeg diska u početnom trenutku se nalazila na osi Oy. Odrediti poluprečnik krivine ρ trajektorije tačke M u trenutku kada je njena brzina maksimalna.



$\overline{OC}=const$; $OC=r+R$ – trajektorija centra diska kružnica poluprečnika $r+R=3r=3$, sa centrom u tački C

Zakon puta tačke C je:

$S_C=\overline{OC}\cdot\theta$; $S_C=3r\theta$, $\theta=\theta(t)$

$V_C=\dot{S}_C \Rightarrow V_C=\frac{d}{dt}(3r\theta)$, $V_C=3r\dot{\theta}$

Kada bi se disk samo klizao po nepokretnom disku tačka M_0 bi ostala tačka dodira diska i podloge i ona bi pri takvom kretanju prešla put: $s'=\overset{\frown}{M_0M'}=R\theta=2r\theta$. Međutim, zbog toga što disk istovremeno i rotira oko translatorno pokretne ose, tačka M' će preći u tačku M, pri čemu je ugao rotacije diska $\psi=\angle(C_0M_0, CM)$, tj.

$\psi=\angle(Oy, CM) \Rightarrow \boxed{\psi=\varphi+\theta.}$

S druge strane pošto je reč o kotrljanju bez klizanja biće:

$\overset{\frown}{M_0M'}=\overset{\frown}{M'M} \Rightarrow \theta\cdot R=r\varphi \Rightarrow \boxed{\theta=\frac{r}{R}\varphi}$

Ugao rotacije diska biće: $\psi=\frac{r}{R}\varphi+\varphi \Rightarrow \boxed{\psi=\frac{r+R}{R}\varphi}$

Za $R=2$, $r=1$ i $\varphi=\omega t \Rightarrow \boxed{\psi=\frac{3}{2}\omega t}$ $\boxed{\theta=\frac{1}{2}\omega t}$

$x_M=x_C-r\sin\psi \Rightarrow x_M=3r\sin\theta-r\sin\psi$

$y_M=y_C-r\cos\psi \Rightarrow y_M=3r\cos\theta-r\cos\psi$

$\boxed{x_M=3r\sin\frac{t}{2}-r\sin\frac{3}{2}t \quad y_M=3r\cos\frac{t}{2}-r\cos\frac{3}{2}t}$

$\dot{x}_M=\frac{3}{2}\cos\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\cos\frac{3t}{2}$

$\dot{y}_M=-\frac{3}{2}\sin\frac{t}{2}+\frac{3}{2}\sin\frac{3t}{2}$

$v^2=\dot{x}_M^2+\dot{y}_M^2=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}-\frac{t}{2}\right)$

$\boxed{v^2=\frac{9}{2}(1-\cos t)} \Rightarrow v_{max}^2=9$, $v_{max}=3$

za $\boxed{t_1=3\pi}$

$a_T=\frac{dv}{dt}$, $\boxed{a_T(t_1=3\pi)=0}$

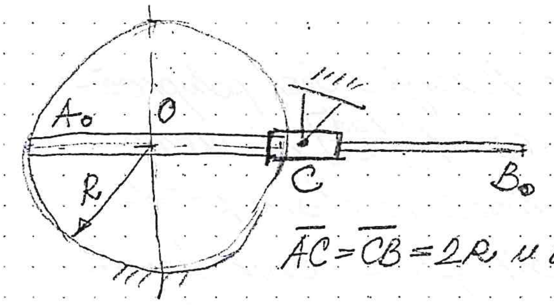
$\ddot{x}=-\frac{3}{4}\sin\frac{t}{2}+\frac{9}{4}\sin\frac{3t}{2}$; $\ddot{x}_1=\ddot{x}(t_1)=-3$

$\ddot{y}=-\frac{3}{4}\cos\frac{t}{2}+\frac{9}{4}\cos\frac{3t}{2}$; $\ddot{y}_1=\ddot{y}(t_1)=0$

$\boxed{|\vec{a}_1|=3}$ i $|\vec{a}_1|=a_{N_1} \Rightarrow \boxed{a_{N_1}=3}$

$R_{K_1}=\frac{v_{max}^2}{a_{N_1}} \Rightarrow \boxed{R_{K_1}=3}$

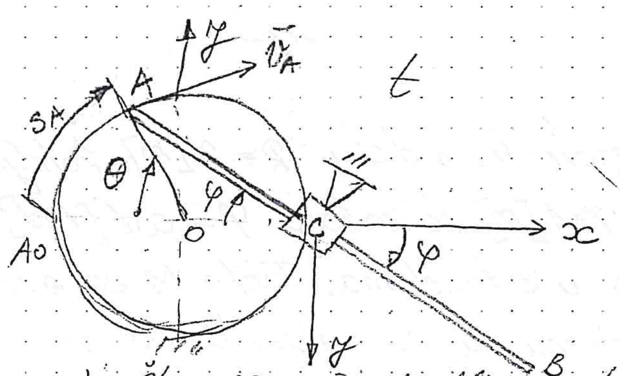
8



$\overline{AC}=\overline{CB}=2R,\ u\ t_0=0$

$v_A=2R\omega_0=const$

$R_{kB}\left(t_1=\dfrac{\pi}{2\omega}\right)=?$



Štap AB može da klizi u obrtnoj vodici C, dok se njegov kraj A kreće po kružnim nepokretnim vodicama brzinom konstantnog intenziteta $v_A=2R\omega_0$. Poluprečnik vodica je R, a dužina štapa $AB=2R$. Odrediti R_k tačke B u trenutku $t_1=\dfrac{\pi}{2\omega}$. U početnom trenutku $t_0=0$ štap je zauzimao položaj prikazan na slici.

Štap AB može u ravni slike da vrši dva kretanja: 1.- može da klizi u vodici C i 2.- može da rotira zajedno sa klizačem C oko nepokretne ose Cz, jer je klizač u tački C vezan cilindričnim nepokretnim zglobom za nepokretnu podlogu. Ova dva kretanja vrše se istovremeno. Prvo kretanje dovodi do toga da se rastojanje kraja A (kraja B) štapa od zgloba C menja tokom vremena, a drugo kretanje dovodi do promene ugla φ (ugla između štapa i pravca ose Ox). Takođe, ova dva kretanja bi bila nezavisna, ali s obzirom da se kraj A kreće u kružnim vodicama, ova dva kretanja, kao što ćemo videti nisu nezavisna. Zakon kretanja tačke A po kružnim vodicama dat je indirektno, preko brzine tačke A. Kako je linija putanje tačke kružnica, to će zakon puta tačke A biti $s_A=s_A(t)$, pa je algebarska vrednost (u ovom slučaju intenzitet) brzine tačke:

$v_A=\dot{s}_A$ i $v_A=2R\omega_0 \Rightarrow \dfrac{ds_A}{dt}=2R\omega_0 \Rightarrow \displaystyle\int_{s_{A_0}=0}^{s_A} ds_A=\int_{t_0=0}^{t}2R\omega_0\,dt \Rightarrow \boxed{s_A=2R\omega_0 t}$

Ako sa θ označimo centralni ugao kružnice nad njegovim lukom $\widehat{A_0A}=s_A$ to je:

$R\theta=s_A \Rightarrow \theta=\dfrac{s_A}{R} \Rightarrow \boxed{\theta=2\omega_0 t}$

Geometrija na slici ukazuje na činjenicu da je θ spoljašnji ugao u jednakokrakom $\triangle OAC$ kod temena O pa važi:

$\theta=2\varphi \Rightarrow \varphi=\dfrac{\theta}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi=\varphi(t)=\omega_0 t}$

Osnovica tog trougla AC iznosi: $\overline{AC}=2R\cos\varphi \Rightarrow \overline{AC}=2R\cos\omega t$

Rastojanje tačke B do C je onda: $\overline{BC}=4R-\overline{AC}$; $\boxed{\overline{BC}=4R-2R\cos\omega t}$

Ako u tački C postavimo Dekartov koordinatni sistem Cxy, koordinate tačke B biće:

$x_B=\overline{BC}\cos\varphi=4R\cos\omega_0 t-2R\cos^2\omega_0 t$; $\boxed{\dot{x}_B}=-4R\omega_0\sin\omega_0 t+2R\omega_0\sin 2\omega_0 t$

$y_B=\overline{BC}\sin\varphi=4R\sin\omega_0 t-R\sin 2\omega_0 t$; $\boxed{\dot{y}_B}=4R\omega_0\cos\omega_0 t-2R\omega_0\cos 2\omega_0 t$ $\Rightarrow$

$v_B^2=(4R\omega_0)^2+(2R\omega_0)^2-16R^2\omega_0^2\underbrace{(\cos 2\omega_0 t\cos\omega_0 t+\sin 2\omega_0 t\sin\omega_0 t)}_{\cos\omega_0 t}$

$|\vec{v}_B|=\sqrt{20R^2\omega_0^2-16R^2\omega_0^2\cos\omega_0 t} \Rightarrow \boxed{v_B=|\vec{v}_B|=2R\omega_0\sqrt{5-4\cos\omega_0 t}}$

$\boxed{v_{B_1}=v_B\left(t_1=\dfrac{\pi}{2\omega}\right)=2\sqrt{5}\,R\omega_0}$ $\boxed{\begin{aligned}\dot{x}_{B_1}&=-4R\omega_0\\ \dot{y}_{B_1}&=2R\omega_0\end{aligned}}$

(9)

ubrzanje: $\ddot{x}_B = -4R\omega_0^2 \cos\omega_0 t + 4R\omega_0^2 \cos 2\omega_0 t$

$\ddot{y}_B = -4R\omega_0^2 \sin\omega_0 t + 4R\omega_0^2 \sin 2\omega_0 t$

$\boxed{\ddot{x}_{B_1}} = \ddot{x}_B\left(t_1 = \frac{\pi}{2\omega_0}\right) = \boxed{-4R\omega_0^2}$; $\boxed{\ddot{y}_{B_1}} = y\left(t_1 = \frac{\pi}{2\omega_0}\right) = \boxed{-4R\omega_0^2}$

$|\vec{a}_{B_1}| = \sqrt{\ddot{x}_{B_1}^2 + \ddot{y}_{B_1}^2} \Rightarrow \boxed{|\vec{a}_{B_1}| = 4\sqrt{2}\, R\omega_0^2}$

Tangentno ubrzanje:

$a_{T_B} = \frac{dv_B}{dt}$; $a_{T_B} = \frac{2R\omega_0}{2\sqrt{5-4\cos\omega_0 t}} \cdot \frac{d}{dt}(5-4\cos\omega_0 t) \Rightarrow \boxed{a_{T_B} = \frac{8R\omega_0^2 \sin\omega_0 t}{\sqrt{5-4\cos\omega_0 t}}}$

$a_{TB}\left(t_1 = \frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{8R\omega_0^2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{a_{T_{B1}}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} R\omega_0^2$

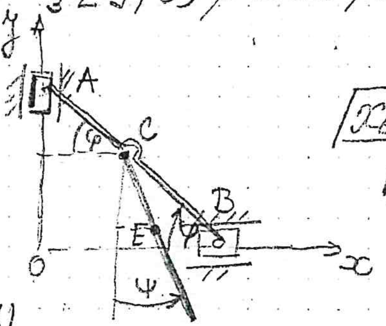
$a_N = \frac{v^2}{R_K}$ ili $\vec{a} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(\dot{y}\ddot{x} - \ddot{y}\dot{x}) \Rightarrow \boxed{|\vec{a} \times \vec{v}| = |\dot{y}\ddot{x} - \ddot{y}\dot{x}|}$

i $\vec{a} \times \vec{v} = (\vec{a}_T + \vec{a}_N) \times \vec{v} = \vec{a}_N \times \vec{v} \Rightarrow \boxed{|\vec{a} \times \vec{v}| = |\vec{a}_N \times \vec{v}| = |\vec{a}_N||\vec{v}|}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{a}_N| = \boxed{a_N = \frac{|\dot{y}\ddot{x} - \ddot{y}\dot{x}|}{|\vec{v}|}}$ $a_{NB_1} = \frac{|\dot{y}_1\ddot{x}_1 - \ddot{y}_1\dot{x}_1|}{|\vec{v}_{B1}|} \Rightarrow a_{NB_1} = \frac{|(-4)\cdot 2 - (-4)\cdot(-4)| R^2\omega_0^3}{2\sqrt{5} R\omega_0}$

$\boxed{a_{NB_1} = \frac{12\sqrt{5}}{5} R\omega_0^2}$

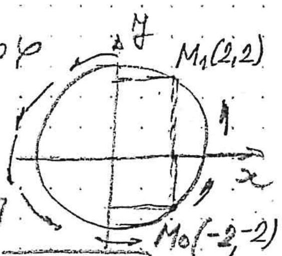
(9) Mehanizam prikazan na sl. sastoji se od dva štapa i dva klizača, pri čemu je: $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CE} = \overline{ED} = 2[m]$. Veze u tačkama A, B i C su zglobne. Klizači A i B kreću se duž osa Ox i Oy, respektivno. Uglovi φ i ψ menjaju se po zakonu: $\varphi = t\,[rad]$ i $\psi = t\,[rad]$. Odrediti za tačku E:
a) trajektoriju b) hodograf brzine c) poluprečnik krivine u trenutku $t_1 = \frac{\pi}{3}[s]$, d) pređeni put tačke od $t_0 = 0$ do $t_2 = \sqrt{2}$.



$x_C = l\cos\varphi$; $y_C = 2l\sin\varphi - l\sin\varphi = l\sin\varphi$

$\boxed{x_E = x} = x_C + l\sin\psi = \boxed{l\cos\varphi + l\sin\varphi}$

$\boxed{y_E = y} = y_C - l\cos\psi = \boxed{l\sin\varphi - l\cos\varphi}$



a) $\left.\begin{aligned} x &= l\cos t + l\sin t \\ y &= l\sin t - l\cos t \end{aligned}\right\}$ $\boxed{\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2l^2 \\ x^2 + y^2 &= 8 \end{aligned}}$ $\boxed{R_{K1} = 2\sqrt{2}}$

b)

$\dot{x} = -2\sin t + 2\cos t$; $\ddot{x} = -2\sin t - 2\cos t$

$\dot{y} = 2\cos t + 2\sin t$; $\ddot{y} = -2\sin t + 2\cos t$ $\Bigg\} \Rightarrow \boxed{v = |\vec{v}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$

$|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 8$ – hodograf brzine kružnica u ravni $O\dot{x}\dot{y}$ sa centrom u tački $O(0,0)$ i poluprečnika $R = 2\sqrt{2}$

c) $v = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \int_0^s ds = \int_{t_0=0}^{t} 2\sqrt{2}\, dt \Rightarrow \boxed{s(t) = 2\sqrt{2}\, t}$

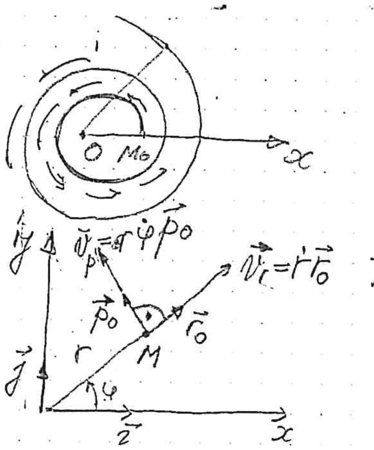
$\boxed{s_1 = s(t_2 = \sqrt{2}) = 4}$

Konačne jednačine kretanja tačke u polarnim koordinatama. Brzina i ubrzanje

(10) Konačne jednačine kretanja tačke M u polarnim koordinatama su:

$r = r(t) = r_0 e^{kt}$ i $\varphi = \varphi(t) = kt$

Odrediti poluprečnik krivine linije putanje (trajektorije) u funkciji potega r. ($R_k = R_k(r)$)



$r = \overline{OM}$; $\varphi = \angle(Ox, OM)$
O - pol, Ox - polarna osa.

$r = r_0 e^{kt}$ i $\varphi = kt \Rightarrow \boxed{r = r_0 e^{\varphi}}$ logaritamska spirala,

$\varphi_0 = 0 \Rightarrow r(\varphi_0) = r_0$ - tačka na polarnoj osi

$\varphi \uparrow \Rightarrow r \uparrow$

Trajektorija je cela logaritamska spirala

$\vec{r}_0$ i $\vec{p}_0$ - bazni vektori polarnog KS u tački M

$\vec{r}_0$ - jedinični vektor radijalne ose

$\vec{p}_0$ - jedinični vektor poprečne ose

$\vec{r}_0 \perp \vec{p}_0$; $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\varphi)$ i $\vec{p}_0 = \vec{p}_0(\varphi)$ - pravac vektora $\vec{r}_0$ i $\vec{p}_0$ zavisi od položaja tačke M u ravni Oxy:

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_0 &= \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\\ \vec{p}_0 &= -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d\vec{r}_0}{d\varphi} = \vec{p}_0 \quad i \quad \frac{d\vec{p}_0}{d\varphi} = -\vec{r}_0$$

<u>Brzina tačke M u polarnom koordinatnom sistemu u tački M</u>

$$\vec{r} = r\vec{r}_0 ; \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\dot{r}\vec{r}_0}_{v_r} + \underbrace{r\dot{\varphi}\vec{p}_0}_{v_p} ; \quad \begin{aligned}v_r &= \vec{v}\cdot\vec{r}_0 \text{ - radijalna brzina}\\ v_p &= \vec{v}\cdot\vec{p}_0 \text{ - poprečna brzina}\end{aligned}$$

$v_r = \dot{r} \Rightarrow v_r = \frac{d}{dt}(r_0 e^{kt}) \Rightarrow v_r = r_0 k e^{kt} \Rightarrow \boxed{v_r = kr}$

$v_p = r\dot{\varphi}$, gde je $\dot{\varphi} = k \Rightarrow \boxed{v_p = rk}$

$\Rightarrow \boxed{v_r = v_p}$

$\vec{v}_r \perp \vec{v}_p \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(rk)^2 + (rk)^2} \Rightarrow \boxed{|\vec{v}| = \sqrt{2}\,rk}$

$\angle(\vec{r}_0, \vec{v}) = \frac{v_r}{|\vec{v}|} \Rightarrow \angle(\vec{r}_0, \vec{v}) = \frac{kr}{\sqrt{2}\,rk} \Rightarrow \boxed{\angle(\vec{r}_0, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}}$

Brzina ima pravac tangente na putanju (trajektoriju): tj. $\vec{v} = v\vec{T}$, pa ako se lučna koordinata s meri od M_0 duž logaritamske spirale, to je: $v = |\vec{v}|$, a $\boxed{\angle(\vec{r}_0, \vec{T}) = 45^\circ}$, gde je $\vec{T}$ ort tangente na ovu krivu.

Tangentno ubrzanje tačke:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{2}\,rk \;,\; a_T = \dot{v} = \frac{d}{dt}(\sqrt{2}kr) \Rightarrow \left.\begin{aligned}a_T &= \sqrt{2}k\dot{r}\\ \dot{r} &= kr\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a_T = \sqrt{2}k^2 r}$$

<u>Ubrzanje tačke M u polarnom koordinatnom sistemu u tački M.</u>

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_0}_{\vec{a}_r} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{p}_0}_{\vec{a}_p}$$

$a_r = \vec{a}\cdot\vec{r}_0 = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ - radijalno ubrzanje

$a_p = \vec{a}\cdot\vec{p}_0 = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$ - poprečno ubrzanje

Kako je: $\left.\begin{aligned}\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(kr) \Rightarrow \ddot{r} = k\dot{r}\\ \dot{r} = kr\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\ddot{r} = k^2 r}$

i $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d}{dt}(k) \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = 0}$

to je: $\boxed{a_r = k^2 r - k^2 r = 0}$ i

i $\boxed{a_p = 2k^2 r}$

$$\vec{a}=\vec{a}_p \Rightarrow \vec{a}=(2k^2r)\vec{p}_0 \Rightarrow \boxed{|\vec{a}|=2k^2r}$$

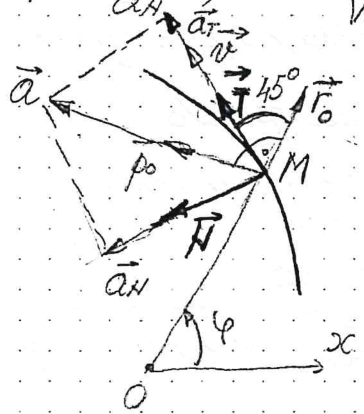
Normalno ubrzanje tačke

$$a_N=\sqrt{a^2-a_T^2}\ ;\ a_N=\sqrt{(2k^2r)^2-(\sqrt{2}k^2r)^2} \Rightarrow \boxed{a_N=\sqrt{2}k^2r}$$

$$\cos\angle(\vec{a}_N,\vec{a})=\frac{a_N}{|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{2}k^2r}{2k^2r} \Rightarrow \boxed{\angle(\vec{a}_N,\vec{a})=\frac{\pi}{4}}$$

Poluprečnik krivine logaritamske spirale

$$R_K=\frac{v^2}{a_N},\ R_K=\frac{(\sqrt{2}kr)^2}{\sqrt{2}k^2r} \Rightarrow \boxed{R_K=r\sqrt{2}}$$



(11) Konačne jednačine kretanja tačke u polarno-cilindričnim koordinatama su: $\rho=R$, $\varphi=\omega t$, $z=kt$, R, ω i k su poznate konstante. Odrediti: liniju putanje tačke, intenzitete brzine i ubrzanja tačke, kao i poluprečnik krivine putanje tačke u proizvoljnom položaju.

$\rho=R$, $\varphi=\omega t$, $z=kt$ $\left(x^2+y^2=R^2,\ x=R\cos\omega t,\ y=R\sin\omega t\right)$ linija putanje je cilindrična zavojnica $\rho=R$ i $z=\frac{k}{\omega}\varphi$

karakteristični trenuci

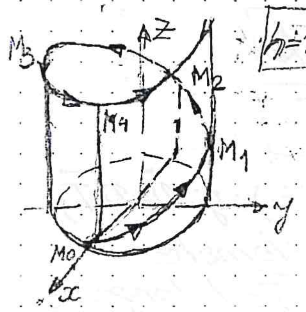
$t_0=0,\ \rho_0=R;\ \varphi_0=0,\ z_0=0\ (x_0=R,\ y_0=0)$

$t_1=\frac{\pi}{2\omega};\ \rho_1=R\ \ \varphi_1=\frac{\pi}{2},\ z_1=\frac{k\pi}{2\omega}\ (x_1=0,\ y_1=R)$

$t_2=\frac{\pi}{\omega};\ \rho_2=R\ \ \varphi_2=\pi\ \ z_2=\frac{k\pi}{\omega}\ (x_2=-R,\ y_2=0)$

$t_3=\frac{3\pi}{2\omega};\ \rho_3=R\ \ \varphi_3=\frac{3\pi}{2}\ \ z_3=\frac{3k\pi}{2\omega}\ (x_3=0,\ y_3=-R)$

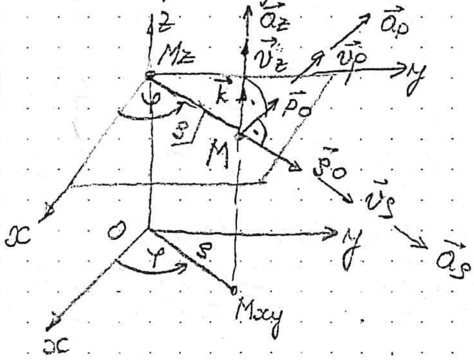
$t_4=\frac{2\pi}{\omega},\ \rho_4=R\ \ \varphi_4=2\pi\ \ z_4=\frac{2\pi k}{\omega}\ (x_4=R,\ y_4=0)$



$\boxed{h=z_4-z_0=k\frac{2\pi}{\omega}}$ korak zavojnice

Intenzitet brzine

$\dot{\rho}=0,\ \dot{\varphi}=\omega,\ \dot{z}=k$; $v_\rho=\dot{\rho}=0,\ v_p=\rho\dot{\varphi}=R\omega,\ v_z=\dot{z}=k$; $\vec{v}=\vec{v}_\rho+\vec{v}_p+\vec{v}_z$, $\vec{v}_\rho\perp\vec{v}_p\perp\vec{v}_z$, $v=\sqrt{v_\rho^2+v_p^2+v_z^2}$; $\boxed{|\vec{v}|=\sqrt{k^2+R^2\omega^2}}$, $\boxed{|\vec{v}|=const}$



Intenzitet ubrzanja

$\ddot{\rho}=0,\ \ddot{\varphi}=0,\ \ddot{z}=0\ ;\ \vec{a}=\vec{a}_\rho+\vec{a}_p+\vec{a}_z\ (\vec{a}_\rho\perp\vec{a}_p\perp\vec{a}_z)$

$a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2;\ \boxed{a_\rho=-R\omega^2}$

$a_p=2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi};\ \boxed{a_p=0}$

$a_z=\ddot{z}\ ;\ \boxed{a_z=0}$

$|\vec{a}|=\sqrt{a_\rho^2+a_p^2+a_z^2}$; $\boxed{|\vec{a}|=R\omega^2}$

Tangentno ubrzanje

$a_T=\frac{dv}{dt},\ v=|\vec{v}|=\sqrt{k^2+R^2\omega^2};\ \boxed{a_T=0}$

Normalno ubrzanje

$a_N=\sqrt{a^2-a_T^2}\ ;\ \boxed{a_N=R\omega^2}$

Poluprečnik krivine ~~tr~~ zavojnice

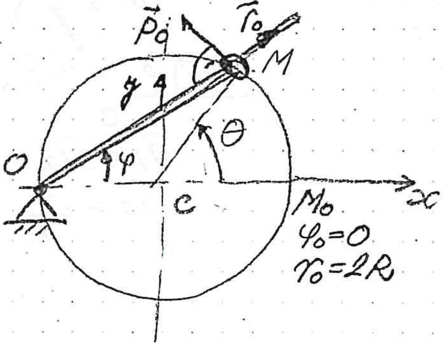
$R_K=v^2/a_N\ ;\ \boxed{R_K=R+\frac{k^2}{R\omega^2}}$

(12) Štap OA dužine $\overline{OA} > 2R$ rotira oko ose Oz u naznačenom smeru po zakonu $\varphi = \omega t$ [rad], ω = const. i pri tome dovodi u kretanje prsten M, koji je istovremeno namaknut na polugu OA i kružni obruč poluprečnika R. Odrediti: $\vec{v}_M$, $\vec{a}_M$, $\vec{a}_{MT}$ i $\vec{a}_{MN}$ koristeći:

a) polarni koordinatni sistem

b) prirodni triedar

c) Dekartov koordinatni sistem



a) Polarna osa – osa Ox koja prolazi kroz zglob O i centar C kružnog obruča. Polarne koordinate su:

$r = \overline{OM}$ – poteg (tetiva kružnice)

$\varphi = \omega t$ – polarni ugao = uglu rotacije poluge.

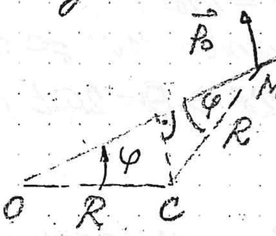
Zakon kretanja tačke (prstena) M u radijalnom pravcu: $r = r(t)$ može se dobiti iz geometrijskog uslova da je:

$r = \overline{OM} = 2R\cos\varphi$

i kinematskog uslova

$\varphi = \omega t$,

tako da je:



ΔOMC – jednakokraki

$\overline{OC} = \overline{CM} = R$

$r = 2R\cos\omega t$. Jednačina kružnice poluprečnika R sa centrom u tački C(R,0) u polarnim koordinatama: $\boxed{r = 2R\cos\varphi}$.

Brzina tačke M u polarnom koordinatnom sistemu u položaju M tačke. – Radijalna brzina v_r, brzina tačke u radijalnom pravcu OM:

$v_r = \dot{r} \Rightarrow v_r = \frac{d}{dt}(2R\cos\omega t)$, $\boxed{v_r = -2R\omega\sin\omega t}$

Vektor radijalne brzine je: $\vec{v}_r = v_r\vec{r}_0 = (-2R\omega\sin\omega t)\vec{r}_0$,

gde je $\vec{r}_0$ jedinični vektor radijalne ose.

Poprečna brzina v_p, brzina tačke u poprečnom pravcu koji je upravan na radijalan:

$v_p = r\dot{\varphi} \Rightarrow \boxed{v_p = 2R\omega\cos\omega t}$

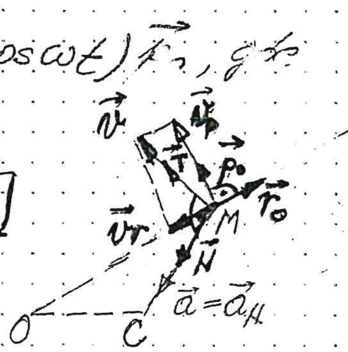
Vektor poprečne brzine je: $\vec{v}_p = v_p\vec{p}_0 = (2R\omega\cos\omega t)\vec{p}_0$, gde je $\vec{p}_0$ jedinični vektor poprečne ose ($\vec{p}_0 \perp \vec{r}_0$)

Ukupna brzina $\vec{v}$ tačke je:

$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_r \\ \vec{v}_p \perp \vec{v}_r\end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} \Rightarrow \boxed{|\vec{v}| = 2R\omega}$

$\vec{v} \perp CM$ (pravac poluprečnika CM kružnice)

$\vec{v}$ nije u poprečnom pravcu



Ubrzanje tačke M u polarnom koordinatnom u tački M

Radijalno ubrzanje

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$

$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(-2R\omega\sin\omega t) = -2R\omega^2\cos\omega t$

$\dot{\varphi} = \omega$

$\boxed{a_r} = -4R\omega^2\cos\omega t$

$\vec{a}_r = (-4R\omega^2\cos\omega t)\vec{r}_0$

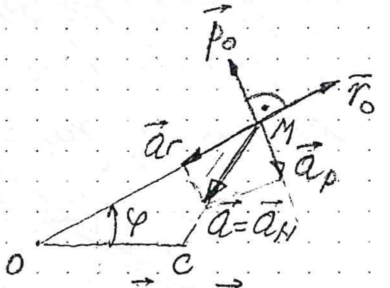
Poprečno ubrzanje

$a_p = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$

$\ddot{\varphi} = 0$

$\Rightarrow a_p = -4R\omega^2\sin\omega t$

$\vec{a}_p = (-4R\omega^2\sin\omega t)\vec{p}_0$



$\vec{a}_N \neq \vec{a}_r$

$\vec{a}_T \neq \vec{a}_p$

Ukupno ubrzanje

$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p$

$\vec{a}_r \perp \vec{a}_p$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_p^2}$

$\boxed{|\vec{a}| = 4R\omega^2}$

Ubrzanje u prirodnom triedru

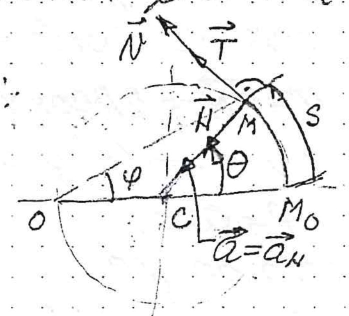
Lučna koordinata koja se meri duž linije trajektorije u smeru kretanja tačke je: $s = \overset{\frown}{M_0M}$

Centralni ugao luka kružnice M_0M je θ, pa važi:

$s = R\cdot\theta$, gde je $\theta = 2\varphi \Rightarrow \theta = 2\omega t$,

pa je zakon puta:

$\boxed{s(t) = 2R\omega t}$



Brzina tačke: $v = v_T = \dot{s} \Rightarrow v = 2R\omega$

Tangentno ubrzanje: $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$

Normalno ubrzanje: $a_N = v^2/R_K$; $a_N = 4R\omega^2$

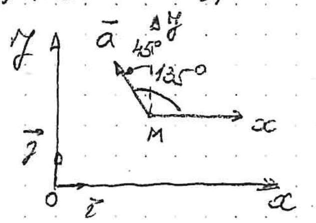
Ukupno ubrzanje: $\vec{a} = \vec{a}_N \Rightarrow |\vec{a}| = a_N = 4R\omega^2$

Inverzni zadatak – poznata brzina, ubrzanje tačke, odrediti konačne jednačine kretanja tačke u odgovarajućem koordinatnom sistemu.

(13) Tačka se kreće konstantnim ubrzanjem $\vec{a}$, pri čemu intezitet ubrzanja iznosi $a=\sqrt{2}$, dok je ugao između ose Ox i vektora ubrzanja $\measuredangle(Ox,\vec{a})=135°$. Ako je tačka u početnom trenutku $t_0=0$ bila u položaju $M_0(0,0)$ u kome je imala brzinu $\vec{v}_0=\vec{v}(t_0)=4\vec{i}$, odrediti:

a) liniju putanje tačke

b) trenutak t_1 u kome intezitet brzine tačke ima **minimalnu vrednost**



Na osnovu uslova zadatka $|\vec{a}|=a=\sqrt{2}$ i $\cos\measuredangle(Ox,\vec{a})=135°$, moguće je odrediti projekcije $a_x=\ddot{x}$ i $a_y=\ddot{y}$ vektora $\vec{a}$ na ose KS Oxy:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a\cos\measuredangle(Ox,\vec{a}) \\ a_y &= a\cos\measuredangle(Oy,\vec{a}) \end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_x &= \sqrt{2}\cos 135° \\ a_y &= \sqrt{2}\cos 45° \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} a_x &= -1 \\ a_y &= 1 \end{aligned}, \text{ odnosno}$$

$$\boxed{\ddot{x}=-1}\ (1), \quad \boxed{\ddot{y}=1}\ (2)$$

Izrazi (1) i (2) za projekcije $\vec{a}$ na ose KS Oxy, u matematičkom smislu predstavljaju diferencijalne jednačine drugog reda i to jednačina (1) po funkciji $x=x(t)$ (konačnoj jednačini kretanja tačke u pravcu ose Ox), a jednačina (2) po funkciji $y=y(t)$ (konačnoj jednačini kretanja u pravcu ose Oy). To znači da se **konačne jednačine kretanja** kretanja tačke u ravni Oxy u Oxy dobijaju integracijom jednačina (1) i (2), tj. rešavanjem ovih diferencijalnih jednačina. S obzirom da ove jednačine nisu spregnute ni po funkcijama $x=x(t)$ i $y=y(t)$, ni po prvim izvodima ovih funkcija po vremenu $\dot{x}=\dot{x}(t)$ i $\dot{y}=\dot{y}(t)$, to se svaka od jednačina (1) i (2) rešava nezavisno od one druge. Dif. jednačine (1) i (2) predstavljaju specijalni slučaj diferencijalnih jednačina oblika: $\ddot{x}=f(t,x,\dot{x})$ i $\ddot{y}=g(t,y,\dot{y})$. Pošto su u ovom zadatku funkcije $f=f(t,x,\dot{x})$ i $g=g(t,y,\dot{y})$ konstante ($f(t,x,\dot{x})=-1$ i $g(t,y,\dot{y})=1$), to se svaka od ove dve jednačine može rešiti **dvema uzastopnim integracijama** koje se nalaze u osnovi **metode razdvajanja promenljivih**. **Opšte rešenje** svake od jednačina (1) i (2) je funkcija vremena t, kao nezavisne promenljive, i dve integracione konstante (dif. jed. (1) i (2) su drugog reda): $x=x(t,C_1,C_2)$ i $y=y(t,C_3,C_4)$. **Da bi se iz opštih rešenja dobila partikularna, tj. da bismo iz familija funkcija kretanja u ravni Oxy** koja zadovoljavaju diferencijalne ~~diferencijalne~~ **jednačine kretanja** ((1) i (2)) **izdvojili** jedno, **konkretno kretanje, potrebno je dati dopunska ograničenja, uslove na funkcije kretanja, koje predstavljaju opšte integrale dif. jednačina kretanja**. Ti uslovi ~~se~~ u klasičnoj mehanici najčešće imaju formu **početnih uslova**. **Početni uslovi daju vrednosti veličina položaja u početnom trenutku:**

$\vec{r}_0=\vec{r}(t_0=0)$; $\vec{r}_0=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}$, gde je $x_0=x(t_0)$ i $y_0=y(t_0)$ – vrednosti funkcija $x=x(t)$ i $y=y(t)$ u $t_0=0$

i početne brzine:

$\vec{v}_0=\vec{v}(t_0)$: $\vec{v}_0=\dot{x}_0\vec{i}+\dot{y}_0\vec{j}$, gde je $\dot{x}_0=\dot{x}(t_0)$ i $\dot{y}_0=\dot{y}_0(t_0)$ – vrednosti funkcija prvih izvoda: $\dot{x}=\dot{x}(t)$ i $\dot{y}=\dot{y}(t)$ u $t_0=0$

U ovom zadatku početni uslovi su:

$t_0=0;\ M_0(0,0) \Rightarrow x_0=x(t_0=0)=0$ i $y_0=y(t_0=0)=0$

i $\vec{v}_0=4\vec{i}$ i $\vec{v}_0=\dot{x}_0\vec{i}+\dot{y}_0\vec{j} \Rightarrow \dot{x}_0=v_{x0}=4$ i $\dot{y}_0=v_{y0}=0$

Dakle, rešenje dif. jednačine (1): $\ddot{x}=-1$ za početne uslove $x_0=0$ i $\dot{x}_0=4$:

I $\boxed{\ddot{x}=-1} \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt}=-1 \Rightarrow \int d\dot{x}=-\int dt \Rightarrow \dot{x}=-t+C_1,\ \dot{x}(0)=4 \Rightarrow 4=C_1,\ \boxed{\dot{x}(t)=-t+4}$

II $\frac{dx}{dt}=-t+4 \Rightarrow \int dx=\int(-t+4)dt \Rightarrow x=-\frac{t^2}{2}+4t+C_2,\ x(0)=0 \Rightarrow C_2=0,\ \boxed{x(t)=-\frac{t^2}{2}+4t}$

Rešenje dif. jednačine kretanja u pravcu ose Oy, (2), za početne uslove $y_0=0$ i $\dot{y}_0=0$ je:

I integracija:

$\boxed{\ddot{y}=1} \Rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt}=1 \Rightarrow \int d\dot{y}=\int dt \Rightarrow \dot{y}=t+C_3,\ \dot{y}(0)=0 \Rightarrow C_3=0,\ \boxed{\dot{y}(t)=t}$

II integracija:

$\frac{dy}{dt}=t \Rightarrow \int dy=\int t\,dt \Rightarrow y=\frac{t^2}{2}+C_4,\ y(0)=0 \Rightarrow C_4=0,\ \boxed{y(t)=\frac{t^2}{2}}$

a) linija putanje:

$y=\frac{t^2}{2} \Rightarrow t=\sqrt{2y},\ y\geq 0$ i $x=-\frac{1}{2}(\sqrt{2y})^2+4\sqrt{2y} \Rightarrow \boxed{x=-y+(4\sqrt{2})\sqrt{y}}$

b) $\dot{x}=-t+4,\ \dot{y}=t \Rightarrow \boxed{|\vec{v}|=v}=\sqrt{2t^2-8t+16}$; $\boxed{\dot{v}}=\frac{2t-4}{v}$

u trenucima t_1 kada je $\dot{v}(t_1)=0$ brzina tačke ima ekstremnu vrednost

$\boxed{\dot{v}(t_1)=0 \quad (\ddot{v}(t_1)\neq 0)} \Rightarrow 2t_1-4=0 \Rightarrow \boxed{t_1=2}$

i $v_1=v(t_1)=\sqrt{2\cdot 2^2-8\cdot 2+16} \Rightarrow \boxed{v_1=2\sqrt{2}}$

Ako je $\frac{d^2v}{dt^2}\Big|_{t_1}>0 \Rightarrow v_1=v_{min}$,

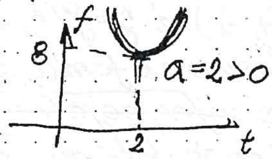
ako je $\frac{d^2v}{dt^2}\Big|_{t_1}<0 \Rightarrow v_1=v_{max}$

U razmatranom slučaju je:

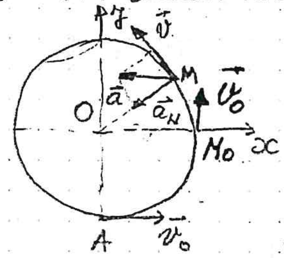
$v\dot{v}=2t-4 \Rightarrow \frac{d}{dt}(v\dot{v})=\frac{d}{dt}(2t-4) \Rightarrow \boxed{\dot{v}^2+v\ddot{v}=2}$ jednačina koja važi u svakom trenutku

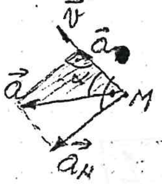
Za $t_1=2 \Rightarrow \overset{\to 0}{\dot{v}_1^2}+v_1\ddot{v}_1=2 \Rightarrow \ddot{v}_1=\frac{2}{v_1}=\frac{2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\ddot{v}_1>0 \Rightarrow v_1=v_{min}}$

($f=2t^2-8t+16$



(14) Tačka M se kreće po kružnici poluprečnika R tako da je ugao između brzine i ubrzanja za sve vreme kretanja konstantan i jednak α. U početnom trenutku $t_0=0$ tačka je bilo u položaju M_0 i imala početnu brzinu $\vec{v}_0$. Odrediti zakon kretanja tačke po kružnici.





$$\boxed{\measuredangle(\vec{a},\vec{v})=\alpha \Rightarrow \measuredangle(\vec{a},\vec{a}_T)=\alpha}$$ (Pretpostavka: $\vec{a}_T$ i $\vec{v}$ su istog smera)

$$tg\alpha=\frac{a_N}{a_T} \Rightarrow tg\alpha=\frac{v^2/R}{\dot{v}} \Rightarrow \boxed{\dot{v}=\frac{v^2}{R\,tg\alpha}} \quad (1)$$

iz Δ ubrzanja $(\vec{a}_T,\vec{a}_N,\vec{a})$

Jednačina (1) predstavlja dif. jednačinu prvog reda po funkciji brzine (projekcije brzine na pravac tangente na trajektoriji tačke) $v=v(t)$. Može se rešiti metodom razdvajanja promenljivih.

$$(1)\Rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{v^2}{R\,tg\alpha} \Rightarrow \int\frac{dv}{v^2}=\frac{1}{R\,tg\alpha}\int dt \Rightarrow -\frac{1}{v}=\frac{t}{R\,tg\alpha}+C_1 \quad t_0=0,\ v_0=v(t_0=0) \Rightarrow \boxed{C_1=-\frac{1}{v_0}} \text{ i } -\frac{1}{v}=\frac{t}{R\,tg\alpha}-\frac{1}{v_0} \Rightarrow$$

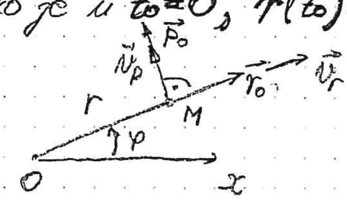
$$\Rightarrow \boxed{v=\frac{v_0 R\,tg\alpha}{R\,tg\alpha-v_0 t}},\ v=\dot{s} \Rightarrow \boxed{\frac{ds}{dt}=\frac{v_0 R\,tg\alpha}{R\,tg\alpha-v_0 t}}$$ – dif. jednačina prvog reda po funkciji $s=s(t)$ (zakonu puta)

$$\frac{ds}{dt}=\frac{v_0 R\,tg\alpha}{R\,tg\alpha-v_0 t} \Rightarrow \int ds=\int\frac{(v_0 R\,tg\alpha)t}{R\,tg\alpha-v_0 t} \Rightarrow s=-(R\,tg\alpha)\int\frac{d(R\,tg\alpha-v_0 t)}{R\,tg\alpha-v_0 t}$$

i $\boxed{s=-(R\,tg\alpha)\ln|R\,tg\alpha-v_0 t|+C_2}$

Za $t_0=0$, $s_0=s(t_0)=0 \Rightarrow \boxed{C_2=R\,tg\alpha\ln(R\,tg\alpha)} \Rightarrow \boxed{s(t)=R\,tg\alpha\ln\frac{R\,tg\alpha}{|R\,tg\alpha-v_0 t|}}$

(15) Kretanje tačke u polarnim koordinatama određeno je brzinom $\vec{v}=r\vec{r}_0-r\varphi\vec{p}_0$. Odrediti jednačinu linije putanje $r=r(\varphi)$ i poluprečnik krivine putanje $R_k=R_k(s)$, ako je u $t_0=0$, $r(t_0)=\frac{4}{\pi}$ i $\varphi(t_0)=\frac{\pi}{4}$



$$\vec{v}=r\vec{r}_0-r\varphi\vec{p}_0 \Rightarrow v_r=r \Rightarrow \boxed{\dot{r}=r} \rightarrow (1)$$

$$v_p=r\varphi \Rightarrow r\dot{\varphi}=-r\varphi \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}=-\varphi} \rightarrow (2)$$

(1) predstavlja diferencijalnu jed. kretanja tačke u radijalnom pravcu i ona predstavlja dif. jednačinu prvog reda po funkciji potega $r=r(t)$; pošto desna strana jednačine ne sadrži funkciju $\varphi=\varphi(t)$ (zakon promene polarnog ugla φ u vremenu), ona se može rešavati nezavisno od jednačine (2):

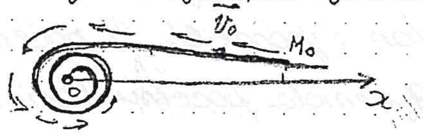
$$\dot{r}=r \Rightarrow \frac{dr}{dt}=r \Rightarrow \int\frac{dr}{r}=\int dt \Rightarrow \ln r=t+C_1,\ r(0)=4/\pi \Rightarrow C_1=\ln 4/\pi \text{ i } \ln r=t+\ln\frac{4}{\pi}\ (r>0) \quad \ln\frac{r}{4/\pi}=t \text{ i } \boxed{r=\frac{4}{\pi}e^{t}} \rightarrow (3)$$

(2) predstavlja dif. jednačinu prvog reda po funkciji $\varphi=\varphi(t)$ (dif. jednačina kretanja tačke u poprečnom pravcu.

$$\dot{\varphi}=-\varphi \Rightarrow \int\frac{d\varphi}{\varphi}=-\int dt \Rightarrow \ln\varphi=-t+C_2,\ \varphi(0)=\frac{\pi}{4} \Rightarrow C_2=\ln\pi/4 \text{ i } \ln\varphi=-t+\ln\frac{\pi}{4}\ (\varphi>0) \Rightarrow \boxed{\varphi=\frac{\pi}{4}e^{-t}} \rightarrow (4)$$

Iz (3) i (4) se dobija <u>linija putanje u polarnim koordinatama</u>:

$\boxed{r=\frac{1}{\varphi}}$



$\Downarrow$

$\varphi=\frac{1}{r}$

(<u>hiperbolička spirala</u>
- polarna osa Ox – asimptota ($\varphi \to 0,\ r \to +\infty$)
- pol O – asimptotska tačka ($\varphi \to \infty,\ r \to 0$))

Iz:

$$r=\frac{4}{\pi}e^{t} \Rightarrow \dot{r}=\frac{4}{\pi}e^{t}, \boxed{\dot{r}=r} \Rightarrow \ddot{r}=\dot{r}, \boxed{\ddot{r}=r}$$

$$\varphi=\frac{\pi}{4}e^{-t} \Rightarrow \dot{\varphi}=-\frac{\pi}{4}e^{-t}, \boxed{\dot{\varphi}=-\varphi} ; \boxed{\dot{\varphi}=-\frac{1}{r}} \Rightarrow \ddot{\varphi}=\frac{\dot{r}}{r^2}=\frac{r}{r^2} \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi}=\frac{1}{r}}$$

$$\left(\varphi=\frac{1}{r}\right)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\dot{r}}{r^2}\right)$$

<u>Brzina tačke</u>: $|\vec{v}|=\sqrt{(\dot{r})^2+(r\dot{\varphi})^2}=\sqrt{r^2+(r\cdot\frac{1}{r})^2} \Rightarrow \boxed{v=|\vec{v}|=\sqrt{1+r^2}}$

<u>Ubrzanje tačke</u>:

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2=r-r\left(-\frac{1}{r}\right)^2 \Rightarrow \boxed{a_r=r-\frac{1}{r}}$$

$$a_p=2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}=2r\left(-\frac{1}{r}\right)+r\frac{1}{r} \Rightarrow \boxed{a_p=-1}$$

$$\Rightarrow a^2=1+\left(r-\frac{1}{r}\right)^2$$

$$\boxed{a^2=r^2+\frac{1}{r^2}-1=\frac{r^4-r^2+1}{r^2}}$$

<u>Tangentno ubrzanje</u>

$$a_T=\frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{a_T=\frac{d}{dt}\sqrt{1+r^2}} \Rightarrow a_T=\frac{r\dot{r}}{\sqrt{1+r^2}} \Rightarrow \boxed{a_T=\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}}$$

<u>Normalno ubrzanje</u>

$$a_N^2=a^2-a_T^2\ ;\ a_N^2=\frac{r^4-r^2+1}{r^2}-\frac{r^4}{1+r^2} \Rightarrow \boxed{a_N=\frac{1}{r\sqrt{1+r^2}}}$$

<u>Poluprečnik krivine krive</u>

$$R_k=\frac{v^2}{a_N} \Rightarrow \boxed{R_k=r(r^2+1)\sqrt{1+r^2}}$$

Zadaci sa sektorskom brzinom

(16) Tačka se kreće u ravni po liniji putanje $r=\dfrac{1}{\sqrt{1+2\varphi}}$ konstantnom sektorskom brzinom, tako da je u početnom trenutku $t_0=0$, $\varphi_0=0$, $v_0=2$ $(\dot{\varphi}_0>0)$

Odrediti konačne jednačine kretanja tačke i ubrzanje u funkciji potega r.

Prethodno je potrebno analizirati početne uslove, s obzirom da je $\dot{S}=C$ i da važi: $r^2\dot{\varphi}=2C$, tj. $\boxed{r^2\dot{\varphi}=r_0 v_{p0}}$

Određivanje r_0.– Dato $\varphi_0=0$ pa iz jednačine linije putanje sledi da je:

$r_0=\dfrac{1}{\sqrt{1+2\cdot 0}} \Rightarrow \boxed{r_0=1}$

Određivanje v_{p0}.– $r=\dfrac{1}{\sqrt{1+2\varphi}} \Rightarrow \dot{r}=\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+2\varphi}}\right)\cdot\dot{\varphi} \Rightarrow \boxed{\dot{r}=\dfrac{-\dot{\varphi}}{(1+2\varphi)^{3/2}}}$ $\boxed{\dot{r}=-\dot{\varphi}r^3}$ $\boxed{\dot{r}_0=-v_{p0}r^2}$ $\boxed{v_{r_0}=-v_p}$

U $t_0=0$ iz gornje jednačine je: $\dot{r}_0=\dfrac{-\dot{\varphi}_0}{(1+2\varphi)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{\dot{r}_0=-\dot{\varphi}_0}$

Kako je:

$v_{p0}=r_0\dot{\varphi}_0=\dot{\varphi}_0$ i $v_{r0}=\dot{r}_0=-\dot{\varphi}_0 \Rightarrow \boxed{v_{r0}=-v_{p0}}$

Intezitet brzine je sada: $v_0^2=v_{r0}^2+v_{p0}^2 \Rightarrow v_0^2=2v_{p0}^2 \Rightarrow 4=2v_{p0} \Rightarrow \boxed{v_{p0}=\sqrt{2}}$

Može se primetiti da važi: $v_{p0}=v_{r0}\sqrt{2} \Rightarrow \angle(\vec{r}_0,\vec{v}_0)=135°$ $\boxed{v_{r0}=-\sqrt{2}}$

Uslov konstantnosti sektorske brzine sada ima formu jednačine:

$\boxed{r^2\dot{\varphi}=\sqrt{2}} \Rightarrow \dot{\varphi}=\sqrt{2}/r^2$ (1)

Ovoj jednačini treba dodati jednačinu linije putanje $\boxed{r=\dfrac{1}{\sqrt{1+2\varphi}}}$ (2) $\boxed{1+2\varphi>0}$

Zamenom (2) u (1) dobija se:

$\boxed{\dot{\varphi}=\sqrt{2}(1+2\varphi)} \Rightarrow \dfrac{d\varphi}{dt}=\sqrt{2}(1+2\varphi) \Rightarrow \dfrac{d\varphi}{1+2\varphi}=\sqrt{2}\,dt \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{2}\ln(1+2\varphi)=t\sqrt{2}+C_1}$

Za $\varphi(0)=0 \Rightarrow C_1=0$. Konačna jednačina kretanja tačke u poprečnom pravcu $\varphi=\varphi(t)$, je:

$\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(1+2\varphi)=t\sqrt{2}} \Rightarrow 1+2\varphi=e^{2\sqrt{2}t} \Rightarrow \boxed{\varphi=\dfrac{e^{2\sqrt{2}t}-1}{2}}$

dok je konačna jednačina kretanja u radijalnom pravcu, $r=r(t)$:

$r=\dfrac{1}{\sqrt{1+(e^{2\sqrt{2}t}-1)}} \Rightarrow \boxed{r=\dfrac{1}{e^{\sqrt{2}t}}=e^{-\sqrt{2}t}}$

Ubrzanje tačke.– $\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_p$ i $\vec{a}_p=0$ $(2\dot{S}=2C) \Rightarrow \vec{a}=\vec{a}_r$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$, gde je:

$r=e^{-\sqrt{2}t} \Rightarrow \dot{r}=-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t}$, tj. $\dot{r}=-\sqrt{2}r$, pa je $\ddot{r}=-\sqrt{2}\dot{r}=-\sqrt{2}(-\sqrt{2}r) \Rightarrow \boxed{\ddot{r}=2r}$

i $\dot{r}=\dfrac{-\dot{\varphi}}{(\sqrt{1+2\varphi})^3}=-\dot{\varphi}r^3 \Rightarrow \dot{\varphi}=-\dfrac{\dot{r}}{r^3}=\dfrac{\sqrt{2}r}{r^3} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}=\dfrac{\sqrt{2}}{r^2}}$

$a_r=2r-r\left(\dfrac{\sqrt{2}}{r^2}\right)^2=2r-\dfrac{2}{r^3} \Rightarrow |\vec{a}|=\left|2r-\dfrac{2}{r^3}\right|=\left|2e^{-\sqrt{2}t}-2e^{3\sqrt{2}t}\right|$

ili: $\left.\begin{array}{l}\dot{r}=-\dot{\varphi}r^3\\ \dot{\varphi}=\dfrac{\sqrt{2}}{r^2}\end{array}\right\}$ $\dot{r}=-\sqrt{2}r \Rightarrow \ln r\Big|_{r_0=1}^{r}=-\sqrt{2}t\Big|_0^t \Rightarrow \ln r=-\sqrt{2}t \Rightarrow \boxed{r=e^{-\sqrt{2}t}}$

$\ddot{r}=-\sqrt{2}\dot{r} \Rightarrow \boxed{\ddot{r}=2r}$

$\dot{\varphi}=\dfrac{\sqrt{2}}{r^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{e^{-2\sqrt{2}t}} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}=\sqrt{2}e^{2\sqrt{2}t}} \Rightarrow \varphi=\sqrt{2}\int_0^t e^{2\sqrt{2}t}dt \Rightarrow \boxed{\varphi=\dfrac{e^{2\sqrt{2}t}-1}{2}}$

(17) Tačka M kreće se konstantnom sektorskom brzinom po liniji putanje $x^4+y^4=b^4$. U početnom položaju $M_0(b,0)$ tačka je imala početnu brzinu $\vec{v}_0=v_0\vec{j}$. Odrediti ubrzanje tačke M u funkciji koordinata tačke, x i y.

Analiza početnih uslova: $M_0(b,0) \Rightarrow x_0=b,\ y_0=0$

$\vec{v}_0=v_0\vec{j} \Rightarrow \dot{x}_0=0,\ \dot{y}_0=v_0$

Analiza uslova kretanja $S=C$:

$$S=S_z=\frac{1}{2}(x\dot{y}-\dot{x}y) \text{ i } S=C \Rightarrow x\dot{y}-\dot{x}y=2C \text{ i } 2C=x_0\dot{y}_0-\dot{x}_0y_0,\ 2C=bv_0 \Rightarrow \boxed{x\dot{y}-\dot{x}y=bv_0} \quad (1)$$

(17) Iz jednačine linije putanje $x^4+y^4=b^4$ može se dobiti veza između brzina $\dot{x}=\dot{x}(t)$ i $\dot{y}=\dot{y}(t)$. Potrebno je potražiti izvod po vremenu leve i desne strane jednačine putanje tačke:

$$\frac{d}{dt}(x^4+y^4)=\frac{db^4}{dt} \Rightarrow 4\dot{x}x^3+4\dot{y}y^3=0 \Rightarrow \boxed{\dot{y}=-\dot{x}\frac{x^3}{y^3}} \quad (2)$$

$$\left(\frac{dx^4}{dt}=\frac{d(x^4)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=3x^4\dot{x}\right)$$

Zamenom (2) u (1) dobija se jednačina po $\dot{x}$:

$$x\left(-\dot{x}\frac{x^3}{y^3}\right)-\dot{x}y=bv_0 \Rightarrow -\dot{x}\left(\frac{x^4}{y^3}+y\right)=bv_0 \Rightarrow -\dot{x}\frac{b^4}{y^3}=bv_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{x}=-\frac{v_0}{b^3}y^3} \ (3) \xrightarrow{(2)} \boxed{\dot{y}=\frac{v_0}{b^3}x^3} \longrightarrow (4)$$

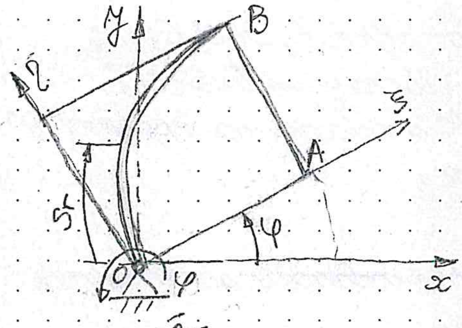
Izvod po vremenu levih i desnih strana jednačina (3) i (4) daje ubrzanja tačke $\ddot{x}$ i $\ddot{y}$ u pravcima osa Dekartovog KS Oxy:

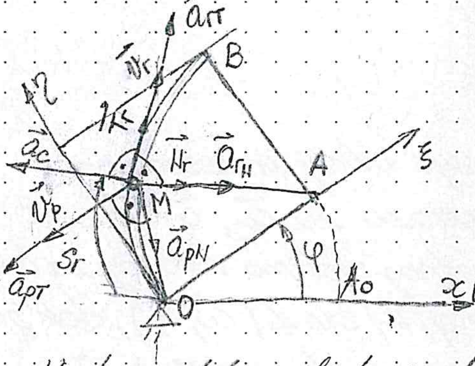
$$\ddot{x}=-\frac{v_0}{b^3}\frac{d}{dt}(y^3)=-3\frac{v_0}{b^3}y^2\dot{y} \xrightarrow{(4)} \boxed{\ddot{x}=-3\frac{v_0^2}{b^6}y^2x^3}$$

$$\ddot{y}=\frac{v_0}{b^3}\frac{d}{dt}(x^3)=3\frac{v_0}{b^3}x^2\dot{x} \xrightarrow{(3)} \boxed{\ddot{y}=-3\frac{v_0^2}{b^6}y^3x^2}$$

Kinematika složenog kretanja tačke

① Kvadratna ploča stranice R obrće se po zakonu $\varphi = \frac{\pi t^2}{2}$ oko ose upravne na ravan ploče, koja prolazi kroz nepokretnu tačku O ploče. U ploči je urezan žljeb poluprečnika R sa centrom u temenu A ploče. Duž žljeba se kreće tačka M po zakonu: $s_r = \overset{\frown}{OM} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\pi t^2$. Naći apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku njenog izlaska iz žljeba (u položaju B)





Kretanje tačke M po (na) telu, koje se i samo kreće u odnosu na nepokretan referentni objekat predstavlja primer složenog kretanja tačke. To znači da se kretanje tačke M u odnosu na nepokretan DKS Oxyz, apsolutno kretanje tačke, može razložiti na komponentalna kretanja:
– relativno kretanje tačke M – kretanje tačke po (na) telu, tj. u odnosu na pokretan DKS (Aξηζ) vezan za telo;
i – prenosno kretanje tačke M – kretanje koje telo prenosi tački M, (kretanje koje je posledica kretanja tela), a koje je u celini određeno kretanjem tela.

Kretanje tela i kretanje tačke M po (na) telu, tj. relativno kretanje tačke M, su međusobno nezavisna kretanja, što znači da je broj stepeni slobode posmatranog mehaničkog sistema telo-tačka jednak zbiru broja stepeni slobode relativnog i broja stepeni slobode kretanja tela u odnosu na (nepok.) DKS Oxyz. Ovo ima za posledicu da se kinematske veličine relativnog kretanja (relativna brzina tačke $\vec{v}_r$ i relativno ubrzanje tačke $\vec{a}_r$) mogu odrediti nezavisno od kinematskih veličina prenosnog kretanja (prenosne brzine $\vec{v}_p$ i prenosnog ubrzanja tačke $\vec{a}_p$) u posmatranom trenutku t. Relativna brzina $\vec{v}_r$ (brzina relativnog kretanja) i relativno ubrzanje $\vec{a}_r$ (ubrzanje relativnog kretanja) su brzina i ubrzanje tačke M u odnosu na telo, tj. u koordinatnom sistemu vezanom za telu (Aξηζ). Linija koju tačka M opisuje tokom svog relativnog kretanja (u koordinatnom sistemu vezanom za telu (Aξηζ); tj. na telu, predstavlja trajektoriju relativnog kretanja. Prenosna brzina $\vec{v}_p$ (brzina prenosnog kretanja) i prenosno ubrzanje $\vec{a}_p$ (ubrzanje prenosnog kretanja) predstavljaju brzinu i ubrzanje one tačke M' tela sa kojom se tačka M poklapa u trenutku t, tj. $\boxed{\vec{v}_p = \vec{v}_{M'}}$ i $\boxed{\vec{a}_p = \vec{a}_{M'}}$, $\boxed{M' \equiv M}$. Ove veličine su u svakom trenutku t određene kinematikom kretanja tela (KS Aξηζ). S obzirom na napred rečeno, za veličine $\vec{v}_p$ i $\vec{a}_p$ u posmatranom trenutku t se može reći, da one predstavljaju onu brzinu i ono ubrzanje koje bi tačka M u posmatranom trenutku t imala kada bi se u tom trenutku nalazila u stanju relativnog mirovanja na telu, (u odnosu na koordinatni sistem vezan za telo $(A\xi\eta\zeta)$), kada je: $\vec{v}_r(t)=0$ i $\vec{a}_r(t)=0$

Trajektorija, odnosno, linija putanje prenosnog kretanja tačke M se, s obzirom na prethodno, ne može odrediti, jer je, ~~prema prethodnom rečenom~~, tačka M zbog svog relativnog kretanja po telu u svakom trenutku t u kontaktu sa nekom drugom tačkom M' tela.

Apsolutno kretanje tačke M kao rezultat kompozicije prenosnog i relativnog kretanja, a u odnosu na nepokretni referentni objekat, DKS Oxyz, odlikuje se apsolutnom brzinom $\vec{v}$ i apsolutnim ubrzanjem tačke $\vec{a}$.

Apsolutna brzina tačke $\vec{v}$, kao brzina tačke M u odnosu na nepokretni referentni objekat, u posmatranom trenutku t je:

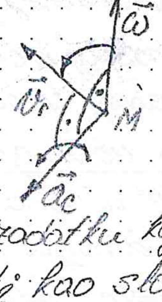
$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}_p+\vec{v}_r}$$

Apsolutno ubrzanje tačke $\vec{a}$, kao ubrzanje tačke M u odnosu na nepokretni referentni objekat u posmatranom trenutku t je:

$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_p+\vec{a}_c},$$

gde je:

$\boxed{\vec{a}_c=2\vec{\omega}\times\vec{v}_r}$ – Koriolisovo ubrzanje koje iskazuje uticaj prenosnog na relativno i relativnog na prenosno kretanje. U izrazu za $\vec{a}_c$, $\vec{\omega}=\vec{\omega}_p$ je vektor trenutne ugaone brzine tela, tj. koordinatnog sistema vezanog za telo. Intezitet Koriolisovog ubrzanja $\vec{a}_c$ je: $|\vec{a}_c|=|\vec{\omega}||\vec{v}_r|\sin\angle(\vec{\omega},\vec{v}_r)$, dok je pravac i smer vektora $\vec{a}_c$ određen pravilom desnog zavrtnja ($\vec{a}_c\perp\vec{\omega}$, $\vec{a}_c\perp\vec{v}_r$, iz vrha vektora $\vec{a}_c$ smer obrtanja vektora $\vec{\omega}$ u ravni vektora $\vec{\omega}$ i $\vec{v}_r$, a oko vektora $\vec{a}_c$, kojim se vektor $\vec{\omega}$ dovodi do poklapanja sa vektorom $\vec{v}_r$ najkraćim putem, vidi se u pozitivnom matematičkom smeru)



Ukoliko se telo kreće translatorno, to je:

$\vec{\omega}=0 \Rightarrow \vec{a}_c=0$ i $\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_p$

U zadatku koji se ovde razmatra, kretanje tačke M može se razmatrati kao složeno kretanje koje sastoji od:

1.- relativnog kretanja tačke po kružnom žljebu na telu, ploči, tako da je trajektorija (linija putanje) relativnog kretanja kružnica sa centrom u temenu A ploče, a poluprečnika R, tj. srednja linija žljeba; relativno kretanje tačke može se odrediti zakonom relativnog puta $s_r=s_r(t)$, gde je $s_r=\overset{\frown}{OM}$ relativna, lučna koordinata koja se meri od referentne tačke $O\equiv M_0$ na trajektoriji relativnog kretanja do položaja tačke M u trenutku t na toj trajektoriji (u žljebu).

2.- prenosnog kretanja tačke M koje je posledica rotacije ploče oko nepokretne ose $Oz = O\zeta$ koje je određeno zakonom obrtanja: $\varphi = \varphi(t) = \frac{1}{2}\pi t^2$; gde je ugao φ ugao obrtanja tela (ugao kojim se u bilo kom trenutku t određuje položaj ploče u nepokretnoj ravni Oxy, tj. ugao između ose Ox i ose $O\xi$ vezane za ploču u tačkama O i A ploče: $\varphi = \measuredangle(Ox, O\xi) = \measuredangle(Ox, OA)$)

Položaj tačke M u nepokretnoj ravni Oxy u bilo kom trenutku t određen je funkcijama: $s_r = s_r(t)$ i $\varphi = \varphi(t)$. U trenutku t_1 kada tačka napušta žljeb, tj. kada se nalaži u položaju $M_1 = B$, vrednost relativne lučne koordinate s_r je:

$$s_{r_1} = s_r(t_1) = \frac{\pi R}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\pi R t_1^2 = \frac{\pi R}{2},$$

pa je trenutak t_1: $\boxed{t_1 = 1}$

U tom trenutku $t_1 = 1$ položaj ploče u ravni Oxy određen je uglom:

$$\varphi_1 = \varphi(t_1) = \frac{\pi t_1^2}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \frac{\pi}{2}} \quad (\varphi_1 = \measuredangle(Ox, O\xi_1) = \measuredangle(Ox, OA_1))$$

Vektor relativne brzine $\vec{v}_r$ i vektor relativnog ubrzanja $\vec{a}_r$ u proizvoljnom trenutku t biće određeni u prirodnom triedru vezanom za trajektoriju relativnog kretanja tačke, a u posmatranom položaju tačke. Ovaj triedar čine:

-ort tangente $\vec{T}_r$ u položaju M tačke (smer $\vec{T}_r$ je u skladu sa smerom porasta lučne koordinate s_r)

-ort glavne normale $\vec{N}_r$ u položaju M tačke ($\vec{N}_r \perp \vec{T}_r$ u oskulatornoj ravni, $\vec{N}_r$ ima smer ka centru krivine relativne trajektorije (centru A kružnice)

-ort binormale $\vec{B}_r = \vec{T}_r \perp \vec{N}_r$, ($\vec{B}_r$ upravan na ravan ploče, ravan relativnog kretanja)

Vektor relativne brzine $\vec{v}_r$ u ovom triedru je:

$\boxed{\vec{v}_r = v_r \vec{T}_r}$ gde je:

$\boxed{v_r = \dot{s}_r}$ – algebarska vrednost vektora $\vec{v}_r$, tj. njegova projekcija na ort tangente $\vec{T}_r$ u trenutku t.

Kako je:

$$v_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi R t^2}{2}\right) \Rightarrow v_r = \pi R t > 0,$$ to je vektor $\vec{v}_r$ u smeru vektora $\vec{T}_r$

Vrednost relativne brzine u trenutku $t_1 = 1$, u položaju M_1, biće

$$v_{r_1} = v_r(t_1) = \pi R t_1 \Rightarrow \boxed{v_{r_1} = \pi R}$$

dok je vektor relativne brzine $\vec{v}_{r_1}$ u pravcu i smeru orta tangente $\vec{T}_{r_1}$ na trajektoriju relativnog kretanja u položaju $B = M_1$: $\boxed{\vec{v}_{r_1}} = v_{r_1}\vec{T}_{r_1} = \pi R \vec{j}$

Relativno ubrzanje $\vec{a}_r = \vec{a}_r(t)$ u prirodnom triedru vezanom za trajektoriju relativnog kretanja tačke u posmatranom položaju tačke je:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_{rT} + \vec{a}_{rN},$$

gde je:

$\vec{a}_{rT} = a_{rT}\vec{T}_r$ i $a_{rT} = \dot{v}_r$ – relativno tangentno ubrzanje

i $\vec{a}_{rN} = a_{rN}\vec{N}_r$ i $a_{rN} = \frac{v_r^2}{R_{K,r}}$ – relativno normalno ubrzanje.

Relativno tangentno ubrzanje $\vec{a}_{rT}$ posledica je promene algebarske vrednosti relativne brzine u vremenu, a vektor relativnog tangentnog ubrzanja $\vec{a}_{rT}$ je kolinearan je vektoru relativne brzine $\vec{v}_r$ u posmatranom trenutku vremena.

Relativno normalno ubrzanje a_{rN} posledica promene pravca vektora relativne brzine u vremenu. Veličina $R_{k,r}$ u izrazu za relativno normalno ubrzanje, $a_{rN}=\frac{v_r^2}{R_{k,r}}$, predstavlja poluprečnik krivine trajektorije relativnog kretanja u posmatranom položaju tačke na njoj. Vektor $\vec{a}_{rN}$ ima pravac i smer orta glavne normale na trajektoriju relativnog kretanja u posmatranom položaju tačke na njoj.

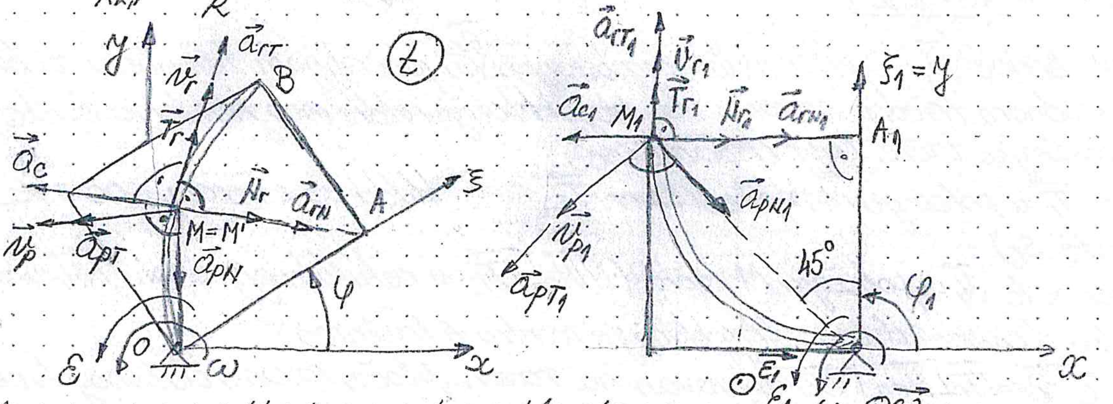
Relativno tangentno ubrzanje a_{rT} u trenucima t i t_1, u ovom zadatku, iznosi:

$$a_{rT}=\dot{v}_r=\frac{d}{dt}(\pi R t) \Rightarrow \boxed{a_{rT}(t)=\pi R} \Rightarrow \boxed{a_{rT_1}=a_{rT}(t_1=1)=\pi R} > 0$$

(Pošto je $a_{rT}(t)>0$, to su vektori $\vec{a}_{rT}=\vec{a}_{rT}$ i $\vec{v}_r=\vec{v}_r(t)$ istog smera.)

Normalno relativno ubrzanje a_{rN} u trenucima t i t_1, u ovom zadatku, a s obzirom da je $R_{k,r}=R$, iznosi:

$$a_{rN}=\frac{v_r^2}{R_{k,r}}=\frac{(\pi R t)^2}{R} \Rightarrow \boxed{a_{rN}(t)=\pi^2 R t} \quad i \quad a_{rN_1}=a_{rN}(t_1)=\frac{v_{r_1}^2}{R_{k,r}} \Rightarrow \boxed{a_{rN_1}=\frac{(\pi R)^2}{R}=\pi^2 R}$$



Na osnovu prethodnog u trenutku $t_1=1$ je:

$$\vec{a}_{rT_1}=a_{rT_1}\vec{T}_{r_1} \Rightarrow \vec{a}_{rT_1}=\pi R\vec{j}$$

$$i \quad \vec{a}_{rN_1}=a_{rN_1}\vec{N}_{r_1} \Rightarrow \vec{a}_{rN_1}=\pi^2 R\vec{i}$$

Kinematske karakteristike prenosnog kretanja tačke M posledica su činjenice da se ploča po kojoj kreće tačka M obrće oko nepokretne ose $Oz=O\zeta$ po zakonu: $\varphi=\frac{\pi t^2}{2}$.

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje ploče u trenucima t i t_1 su:

$$\omega=\omega(t)=\dot{\varphi} \Rightarrow \omega=\pi t \quad i \quad \boxed{\omega_1=\omega(t_1=1)=\pi}$$

$$i \quad \varepsilon=\varepsilon(t)=\dot{\omega} \Rightarrow \varepsilon=\pi \quad i \quad \boxed{\varepsilon_1=\varepsilon(t_1=1)=\pi}$$

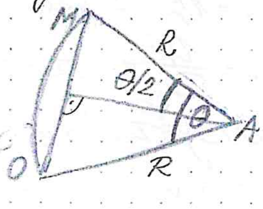
Pošto je: $\omega(t)>0$ i $\varepsilon(t)>0$, to su ugaona brzina $\omega=\omega(t)$ i ugaono ubrzanje $\varepsilon=\varepsilon(t)$ u istom smeru, tj: vektori $\vec{\omega}=\vec{\omega}(t)$ i $\vec{\varepsilon}=\vec{\varepsilon}(t)$ su kolinearni vektori istog smera.

Prenosna brzina tačke M u bilo kom trenutku t jednaka je, kao što je rečeno, brzini tačke ploče M' sa kojom se tačka M u posmatranim trenucima poklapa (M=M'):

$$\vec{v}_p=\vec{\omega}\times\overline{OM} \Rightarrow v_p=\omega\overline{OM} \quad i \quad \vec{v}_p \perp OM$$ u ravni Oxy, pri čemu je smer vektora $\vec{v}_p$ određen smerom ugaone brzine ω (pravilo desnog zavrtnja)

gde je: $\overline{OM}=2R\sin\frac{\theta}{2}$ i $\theta=s_r/R=\pi t^2/2$.

$\boxed{\overline{OM}=f(s_r)}$, tj:



U trenutku $t_1 = 1$ prenosna brzina tačke M, $\vec{v}_{p1}$, biće:

$\vec{v}_{p1} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OM_1} \Rightarrow v_{p1} = \omega_1 \cdot \overline{OM_1}$ i $\vec{v}_{p1} \perp OM_1$ u ravni slike i smer vektora $\vec{v}_{p1}$ određen pravilom desnog zavrtnja,

gde je $\boxed{\overline{OM_1} = R\sqrt{2}}$ $(\overline{OM} = 2R\sin\theta_1/2$ i $\theta_1 = \frac{\pi}{2})$, tako da je:

$\boxed{v_{p1}} = \omega_1 \overline{OM_1} = \boxed{\pi R\sqrt{2}}$ i $\vec{v}_{p1} = -v_{p1}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - v_{p1}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{p1}} = -\pi R\vec{i} - \pi R\vec{j}$

Za obrtno prenosno kretanje vektor prenosnog ubrzanje tačke M, kao ubrzanje koincidentne tačke M' ploče, u trenutku t je:

$\vec{a}_p = \vec{a}_{pN} + \vec{a}_{pT}$,

gde je:

$\vec{a}_{pT} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} \Rightarrow a_{pT} = |\varepsilon|\overline{OM}$ i $\vec{a}_{pT} \perp OM$ u ravni slike čiji je smer određen pravilom desnog zavrtnja - prenosno tangentno ubrzanje

i $\vec{a}_{pN} = \vec{\omega} \times \vec{v}_p = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}) \Rightarrow a_{pN} = \omega^2 \overline{OM}$ i vektor $\vec{a}_{pN}$ kolinearan sa vektorom $\overrightarrow{MO}$ - - prenosno normalno ubrzanje

U trenutku $t_1 = 1$ ove komponente prenosnog ubrzanja su:

$\boxed{a_{pT1}} = \varepsilon_1 \overline{OM_1} = \boxed{\pi R\sqrt{2}}$ i $\vec{a}_{pT1} = -a_{pT1}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - a_{pT1}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \Rightarrow \vec{a}_{pT1} = -\pi R\vec{i} - \pi R\vec{j}$

i $\boxed{a_{pN1}} = \omega_1^2 \overline{OM_1} = \boxed{\pi^2 R\sqrt{2}}$ i $\vec{a}_{pN1} = +a_{pN1}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - a_{pN1}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \Rightarrow \vec{a}_{pN1} = \pi^2 R\vec{i} - \pi^2 R\vec{j}$

Koriolovo ubrzanje, $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$, u trenutku t_1 biće određeno izrazom:

$\vec{a}_{c_1} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{r_1}$.

Pošto su vektori $\vec{\omega}_1$ i $\vec{v}_{r_1}$ međusobno upravni vektori, intezitet Koriolosovog ubrzanja u trenutku t_1 biće:

$|\vec{a}_{c_1}| = 2|\vec{\omega}_1||\vec{v}_{r_1}|\sin 90^\circ \Rightarrow \boxed{|\vec{a}_{c_1}| = 2\pi^2 R}$

Vektor $\vec{a}_{c_1}$ će biti upravan na vektor $\vec{v}_{r_1}$ u ravni slici, pri čemu je smer tog vektora određen pravilom desnog zavrtnja, tako da je:

$\vec{a}_{c_1} = -2\pi^2 R\,\vec{i}$.

Apsolutna brzina tačke, $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p$, u trenutku t_1 je:

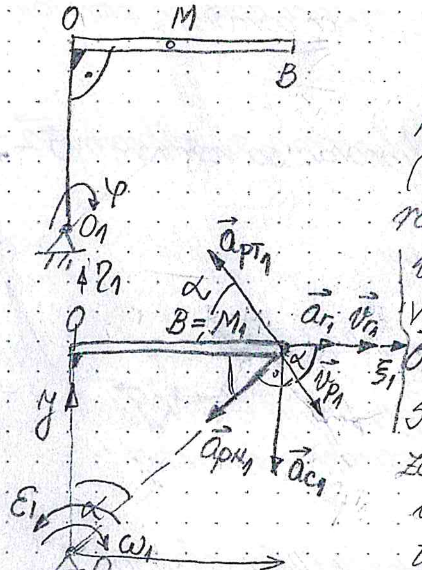
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{p1} + \vec{v}_{r_1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{v_{1x}} = -v_{p1}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi R \\ \boxed{v_{1y}} = v_{r_1} - v_{p1}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow |\vec{v}_1| = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} \Rightarrow |\vec{v}_1| = \pi R$$

Apsolutno ubrzanje tačke, $\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{c}$, u trenutku t_1 je:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{p_1} + \vec{a}_{r_1} + \vec{a}_{c_1} = \vec{a}_{pT_1} + \vec{a}_{pN_1} + \vec{a}_{rT_1} + \vec{a}_{rN_1} + \vec{a}_c \left| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{1x} = a_{pN1}\frac{\sqrt{2}}{2} - a_{pT1}\frac{\sqrt{2}}{2} - a_{c_1} + a_{rN_1} \\ a_{1y} = -a_{pN_1}\frac{\sqrt{2}}{2} - a_{pT_1}\frac{\sqrt{2}}{2} + a_{rT_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \right.$$

$a_{1x} = -\pi R$ i $a_{1y} = -\pi^2 R$

(2.) Cev OB dužine $\overline{OB}=4$ kruto je vezana u tački O pod pravim uglom za štap O_1O dužine $\overline{O_1O}=3$. Štap O_1O obrće oko ose koja prolazi kroz tačku O_1 i upravna na ravan slike, po zakonu: $\varphi = 2\ln(1+2t)$. U cevi OB, iz tačke O ka kraju B, istovremeno se kreće tačka M po zakonu: $\overline{OM}=s_r=3t^2+13/4$.
Odrediti intezitet opsolutne brzine i opsolutnog ubrzanja tačke M u trenutku kada ona stigne do kraja cevi (u tački B).



Složeno kretanje tačke M se u ovom zadatku može raščlaniti na relativno pravolinijsko kretanje po pravolinijskoj cevi OB, pri čemu je poznat zakon relativnog kretanja, i njeno prenosno kretanje usled rotacije tela (ugaonika O_1OB) oko nepokretne ose $O_1z=O_1\zeta$ upravne na ravan slike, a po poznatom zakon $\varphi=\varphi(t)$.

U trenutku t_1 tačka se nalazi u položaju $M_1=B$, pa je vrednost relativne koordinate s_r tačke M u tom trenutku:

$$\overline{OB}=s_{r_1}=s_r(t_1) \Rightarrow 4=3t_1^2+\frac{13}{4} \Rightarrow \boxed{t_1=1/2}$$

S obzirom da u zadatku nisu naznačene ose DKS vezanog za ugaonik, kao ni ose nepokretnog koordinatnog sistema u ravni slike, a u odnosu na koje se meri ugao rotacije φ tela, to se **za položaj tela u ravni slike u trenutku t_1 može usvojiti bilo koji položaj koji dozvoljava veza (nepokretni zglob u tački O_1).**

Ovakav stav je opravdan u slučaju kada se tačka kreće po telu koje rotira oko nepokretne ose, zato što **u posmatranom trenutku t geometrijski odnosi tačke M na telu prema tačkama i pravama tog tela u prostoru, ne zavise od položaja tog tela u prostoru.** To znači da **uglovi između vektorskih kinematskih veličina relativnog i prenosnog kretanja** (na pr.) tj. ugao između v_r i v_p, odnosno, odgovarajućih komponenti relativnog i prenosnog ubrzanja, **kao i inteziteti tih vektorskih veličina, u posmatranom trenutku t, ne zavise od trenutnog položaja tela koje rotira oko nepokretne ose u prostoru.**

Zbog toga je analizu brzina i ubrzanja relativnog i prenosnog kretanja tačke M, kao i apsolutne brzine i ubrzanja tačke, u trenutku t_1 moguće sprovesti u nacrtanom položaju ugaonika O_1OB (tj. tela). Ose na koje će biti projektovane vektori kinematskih veličina tačke u trenutku t_1 biće osa $O\xi_1$ vezana za cev i osa $O\eta_1$ upravna na cev, koje su u smislu prethodnih razmatranja, paralelne osama nepokretnog DKS Oxy ($\vec{\lambda}_1=\vec{i}$, $\vec{\mu}_1=\vec{j}$) (osa O_1y ima pravac OO_1, osa $O\eta_1$

Relativna brzina i relativno ubrzanje.

$v_r=\dot{s}_r=6t \Rightarrow v_{r_1}=v_r(t_1)=3$

i $a_r=a_{rT}=\dot{v}_r \Rightarrow a_{r_1}=a_r(t_1)=6$

Prenosna brzina i prenosno ubrzanje

$v_p = \omega \cdot l_z = \omega \cdot \overline{O_1M}$, gde je $\omega = \dot{\varphi} = \frac{4}{1+2t}$ i $\overline{OM} = \sqrt{\overline{OO_1}^2 + \overline{OM}^2}$

za $t_1 = 1/2 \Rightarrow \boxed{\omega_1} = \omega(t_1) = 2$, $\overline{O_1M_1} = \overline{O_1B} = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \Rightarrow \boxed{v_{p1}} = \omega_1 \cdot \overline{O_1M_1} = 10$ i

$\cos\alpha = \frac{\overline{OO_1}}{\overline{O_1B}} = \frac{3}{5}$ i $\sin\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{O_1B}} = \frac{4}{5}$

i

$\vec{a}_p = \vec{a}_{pT} + \vec{a}_{pN}$, gde je $a_{pT} = \varepsilon \cdot \overline{O_1M}$ i $a_{pN} = \omega^2 \cdot \overline{O_1M}$, $\boxed{\varepsilon = \dot{\omega}} = -\frac{8}{(1+2t)^2}$

za $t_1 = 1 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1} = \varepsilon(t_1 = \frac{1}{2}) = -2$

$\boxed{|a_{pT_1}|} = |\varepsilon_1| \overline{O_1M_1} = 2 \cdot 5 = \boxed{10}$; $\boxed{a_{pN_1}} = \omega_1^2 \overline{O_1M_1} = 20$

$\rightarrow$ vektor $\vec{a}_{pT_1}$ je suprotnog smera od vektora v_{p1} $(\omega_1 > 0, \varepsilon_1 < 0)$

Koriolisovo ubrzanje:

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$; $\vec{\omega} \perp \vec{v}_r \Rightarrow |\vec{a}_c| = 2|\vec{\omega}||\vec{v}_r| =$

i $t_1 = 1/2 \Rightarrow |\vec{a}_{c_1}| = 2|\vec{\omega}_1||\vec{v}_{r_1}| = 2 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{|\vec{a}_{c_1}|} = 12$

Apsolutna brzina

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p$
za $t_1 = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_{r_1} + \vec{v}_{p_1}$ / $\Rightarrow$ $\xi_1(x)$: $\boxed{v_{1x}} = v_{r_1} + v_{p_1}\cos\alpha = 9$
$\eta_1(y)$: $\boxed{v_{1y}} = -v_{p_1}\sin\alpha = -8$

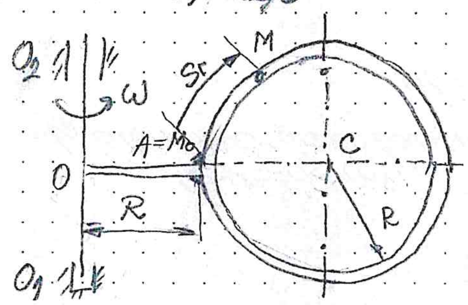
$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{145}$

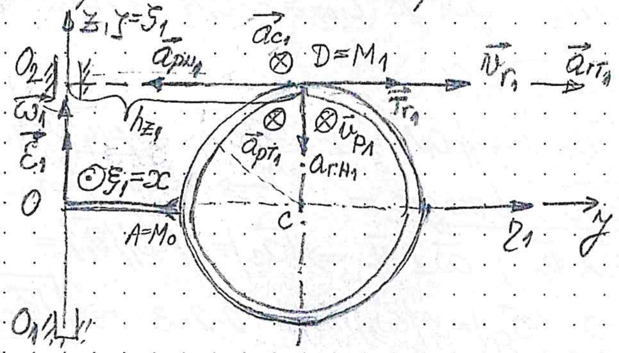
Apsolutno ubrzanje

$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c$
$t_1 = 1/2 \Rightarrow \vec{a}_1 = \vec{a}_{r_1} + \vec{a}_{p_1} + \vec{a}_{c_1}$ / $\Rightarrow$ $\xi_1(x)$: $a_{1x} = a_{r_1} - a_{pN_1}\sin\alpha - a_{pT_1}\cos\alpha$
$\boxed{a_{1x}} = -16$
$\eta_1(y)$: $a_{1y} = -a_{pN_1}\cos\alpha + a_{pT_1}\sin\alpha - a_{c_1}$
$\boxed{a_{1y}} = -16$ $12 \cdot 1.8 - 12$

$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} \Rightarrow a_1 = 16\sqrt{2}$

③ Kružna cev poluprečnika R kruto je vezana za vertikalnu osovinu pomoću poluge $\overline{OA}=R$ i može da se obrće oko te ose ugaonom brzinom $\omega=\pi t$. Istovremeno sa obrtanjem cevi kreće se u cevi tačka M polazeći iz položaja A u smeru naznačenom na slici, pri čemu se njena relativna brzina menja po zakonu $v_r = R\frac{\pi^2}{4}\cos(\pi t/4)$. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje u trenutku $t_1 = 2/3$





Brzina relativnog kružnog kretanja je:

$v_r = R\frac{\pi^2}{4}\cos(\pi t/4)$, gde je v_r projekcija vektora $\vec{v}_r$ na osu tangente na trajektoriju relativnog kretanja, tako da je zakon puta relativnog kretanja $\widehat{AM}=S_r(t)$:

$v_r = \dot{S}_r \Rightarrow R\frac{\pi^2}{4}\cos(\pi t/4) = \frac{dS_r}{dt} \Rightarrow \int_{S_{r0}=0}^{S_r} dS_r = R\frac{\pi^2}{4}\int_{t_0=0}^{t}\cos\frac{\pi t}{4}dt \Rightarrow$

$\boxed{S_r} = \widehat{AM} = R\pi\sin\frac{\pi t}{4}$,

gde je $\widehat{AM}$ lučna koordinata duž relativne trajektorije.

Nakon $t_1=\frac{2}{3}$ tačka M će se naći u položaju:

$S_{r_1} = \widehat{AM_1} = S_r(t_1=\frac{2}{3}) \Rightarrow S_{r_1} = R\pi\sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{S_{r_1} = R\frac{\pi}{2}}$,

tj. tačka M će se naći na vrhu kružne trajektorije, tj. u položaju $D=M_1$, a njena relativna brzina i njeno relativno ubrzanje iznosiće:

$v_{r_1} = v_r(t_1=\frac{2}{3}) \Rightarrow v_{r_1} = R\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{v_{r_1} = R\pi^2\frac{\sqrt{3}}{8}}$

i $\vec{a}_{r_1} = \vec{a}_{rT_1} + \vec{a}_{rH_1}$

$a_{rT} = \dot{v}_r = -R\frac{\pi^3}{16}\sin\frac{\pi t}{4} \Rightarrow \boxed{a_{rT_1} = -\frac{R\pi^3}{32}}$ ($a_{rT_1}<0$, $v_{r_1}>0$, vektori $\vec{v}_{r_1}$ i $\vec{a}_{rT_1}$ su suprotnog smera)

$a_{rH} = \frac{v_r^2}{R} \Rightarrow a_{rH_1} = \frac{v_{r_1}^2}{R} \Rightarrow \boxed{a_{rH_1} = \frac{3R\pi^4}{64}}$

Prenosno kretanje tačke je određeno rotacijom prstena oko nepokretne ose tela $Oz=O\zeta_1$, koja se nalazi u ravni slike. Ugao rotacije tela, ugaona brzina i ugaono ubrzanje tela u trenutku $t_1 = 2/3$ su:

$\omega = \dot{\varphi} \Rightarrow d\varphi = \omega dt \Rightarrow \int d\varphi = \int_0^t \pi t\,dt \Rightarrow \varphi = \frac{\pi t^2}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \varphi(t_1)} = \frac{2}{9}\pi$

$\varepsilon = \dot{\omega} \Rightarrow \varepsilon = \pi \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1) = \pi}$

i $\boxed{\omega_1 = \omega(t_1) = \frac{2}{3}\pi}$

S obzirom na činjenice iznete u zadatku 2, može se usvojiti da se ravan koja sadrži kružnu ploču i osu rotacije, tj. ravan $O\eta\zeta$ (osa $O\eta$ je na pravoj OC) u trenutku $t_1=\frac{2}{3}$ poklapa sa ravni slike Oyz: $Oy = O\eta_1$ i $Oz = O\zeta = O\zeta_1$. Osa $O\xi_1 = Ox$ upravna je na ravan slike

Prenosna brzina i prenosno ubrzanje tačke u položaju $M_1=D$ su:

$v_p=\omega h_z \Rightarrow v_{p1}=\omega_1 \cdot h_{z1}$;
gde je h_z – normalno rastojanje tačke do ose rotacije i $h_{z1}=h_z(t_1)=2R$ $\Big\}$ $\boxed{v_{p1}}=\frac{4}{3}R\pi$

i $\vec{a}_{p1}=\vec{a}_{pN1}+\vec{a}_{pT1}$, gde je:

$a_{pN}=\omega^2 h_z$ i $a_{pN1}=\omega_1^2 h_{z1} \Rightarrow \boxed{a_{pN1}}=\frac{8}{9}R\pi^2$

$a_{pT}=\varepsilon h_z$ i $a_{pT1}=\varepsilon_1 h_{z1} \Rightarrow \boxed{a_{pT1}}=2R\pi$

Apsolutna brzina i apsolutno ubrzanje

$\vec{v}_{r1} \perp \vec{v}_{p1} \Rightarrow \vec{v}_1=\vec{v}_{r1}+\vec{v}_{p1}=v_{r1}\vec{j}-v_{p1}\vec{i}$; $v_1=\sqrt{v_{r1}^2+v_{p1}^2} \Rightarrow v_1=\sqrt{\left(\frac{R\pi^2\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(\frac{4}{3}R\pi\right)^2}$

i $\vec{a}_1=\vec{a}_{r1}+\vec{a}_{p1}+\vec{a}_{c1}=\vec{a}_{r1T}+\vec{a}_{r1N}+\vec{a}_{pT1}+\vec{a}_{pN1}+\vec{a}_{c1}$

$\vec{a}_{c1}=2\vec{\omega}_1\times\vec{v}_{r1} \Rightarrow |\vec{a}_{c1}|=2\omega_1 v_{r1}=\frac{\sqrt{3}}{6}R\pi^3$ $\Bigg\} \Rightarrow$

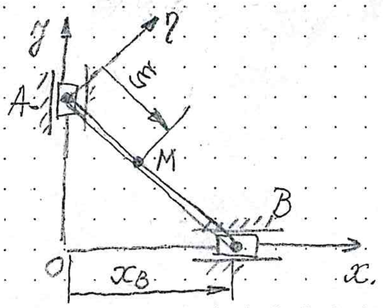
$a_{1x}=-a_{pT1}-a_{c1}=-2R\pi-\frac{\sqrt{3}}{6}R\pi^3$

$a_{1y}=a_{rT1}-a_{pN1}=-\frac{R\pi^3}{32}-\frac{8}{9}R\pi^2$

$a_{1z}=-a_{rN1}=-\frac{3R\pi^4}{64}$

$a_1=\sqrt{a_{1x}^2+a_{1y}^2+a_{1z}^2}$

4. Cev AB ($\overline{AB}=R\sqrt{2}$) kreće se u ravni Oxy. Krajevi cevi vezani su za klizače A i B koji se kreću duž koordinatnih osa, pri čemu je koordinata tačke B određena sa $x_B=R\sqrt{2}\sin(\pi t/4)$. Duž cevi, polazeći iz tačke A prema tački B, kreće se tačka M. Intenzitet relativne brzine tačke M je $v_r=2\sqrt{2}Rt$. Odrediti intenzitet apsolutne brzine i ubrzanja tačke M kada ona dođe do klizača B.



Relativno kretanje tačke M je pravolinijsko kretanje tačke u cevi AB.

Prenosno kretanje tačke M je određeno ravnim kretanjem cevi AB u ravni Oxy.

Za cev je vezan DKS $A\xi\eta\zeta$, pri čemu je osa $A\xi$ duž ose cevi (prolazi kroz tačke A i B cevi), osa $A\eta$ upravna je na cev u ravni njenog kretanja, a osa $A\zeta$ je upravna je na ravan kretanja cevi Oxy.

Ako za pol translacije cevi izaberemo tačku B cevi, onda je njegovo kretanje, zbog zglobne veze u toj tački cevi i klizača (klizač se kreće u pravolinijskim vođicama duž ose Ox), opisano jednačinama:

$x_B=x_B(t)$ i $y_B=0$.

Ugao rotacije štapa oko ose $B\zeta$, odnosno $A\zeta$ ($A\zeta \parallel B\zeta$; ugao rotacije isti za sve translatorno pokretne, međusobno paralelne ose, tj., ne zavisi od toga koja je tačka izabrana za pol translacije), kao ugao između početnog položaja ose $A\xi$ i njenog trenutnog položaja može se, s obzirom da je u tački A štap zglobno vezan drugi klizač koji se kreće u vođicama duž ose Oy čije su jednačine kretanja: $x_A=0$ i $y_A=y_A(t)$, izraziti preko zakona kretanja tačke B, $x_B=x_B(t)$. Naime, ako je:

$$\boxed{x_B}= x_B(t)= R\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}t$$

u početnom trenutku $t_0=0$, tačka B se nalazila u koordinatnom početku O, tj. $O=B_0$, pa se osa cevi poklapala sa osom $A_0\xi_0$ koja je imala isti pravac kao osa Oy, ali suprotan smer. Zakon promene ugla $\varphi=\measuredangle(A_0\xi_0, A\xi)$, s obzirom na geometrijske odnose, biće određen relacijom:

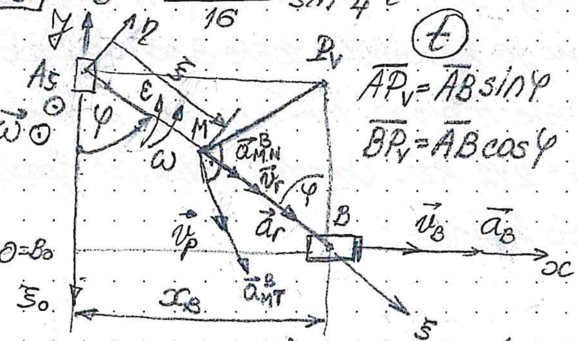
$$\sin\varphi(t)=\frac{x_B(t)}{R\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\varphi(t)=\sin\frac{\pi}{4}t \Rightarrow \boxed{\varphi}=\varphi(t)=\frac{\pi}{4}t$$

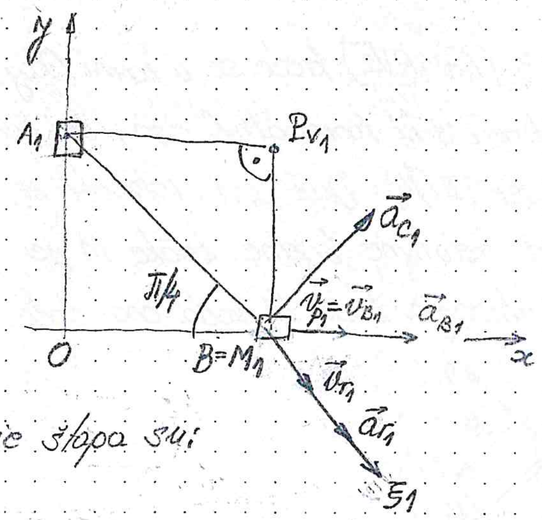
Vodeći računa o ovoj relaciji, kao i o činjenici da je $y_B=0$, sledi da je broj stepeni slobode cevi $n=3-2=1$, pa je ravno kretanje cevi AB određeno jednim zakonom kretanja njene tačke B u pravcu ose Ox: $x_B=x_B(t)$.

Iz zakona kretanja tačke B dobijaju se projekcije v_B i a_B vektora brzine $\vec{v}_B$ i vektora ubrzanja $\vec{a}_B$ na osu Ox:

$$\boxed{v_B}=\dot{x}_B=\frac{\pi R\sqrt{2}}{4}\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$\boxed{a_B}=\ddot{x}_B=\frac{-\pi^2 R\sqrt{2}}{16}\sin\frac{\pi}{4}t$$





Ugaona brzina $\omega=\dot{\varphi}$ i ugaono ubrzanje štapa su:

$$\boxed{\omega}=\dot{\varphi}=\frac{\pi}{4}=const \quad i \quad \boxed{\varepsilon}=\dot{\omega}=0$$

Relativno pravolinijsko kretanje tačke M duž cevi biće poznato ako je poznat zakon promene relativne koordinate tačke M na cevi: $\xi=\xi(t)$. U početnom trenutku $t_0=0$ vrednost ove koordinate je $\xi_0=\xi(0)=0$ $(A_0=M_0)$. Projekcija v_r vektora relativne brzine tačke, $\vec{v}_r$, na osu $A\xi$ je:

$$v_r=\dot{\xi} \Rightarrow 2\sqrt{2}Rt=d\xi/dt \Rightarrow \int_0^{\xi}d\xi=2\sqrt{2}R\int_0^t t\,dt \Rightarrow \boxed{\xi=\xi(t)}=\sqrt{2}Rt^2$$

Projekcija a_r vektora relativnog ubrzanja tačke, $\vec{a}_r$, na osu $A\xi$ je:

$$a_r=\dot{v}_r=\ddot{\xi} \Rightarrow \boxed{a_r}=2\sqrt{2}R=const$$

U trenutku t_1 pređeni put tačke je: $\overline{A_1M_1}=\xi_1=\overline{AB}$, pa je:

$$\xi_1=\xi(t_1)=R\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}Rt_1^2=R\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{t_1}=1.$$

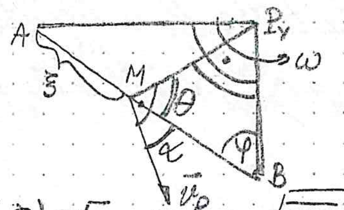
Relativna brzina i relativno ubrzanje tačke u $t_1=1$ su:

$$\boxed{v_{r_1}}=v_r(t_1)=2\sqrt{2}R \quad i \quad \boxed{a_{r_1}}=a_r(t_1)=2\sqrt{2}R$$

Prenosna brzina tačke M kao brzina koincidentne tačke cevi u trenutku t je:

$\vec{v}_p = \vec{\omega} \times \overline{P_vM} \Rightarrow v_p = \omega \overline{MP_v}, \quad \vec{v}_p \perp MP_v,$

gde je P_v trenutni pol brzina cevi AB u posmatranom trenutku t, a nalazi se u preseku normala na pravce brzina klizača A i B. Kako je:



$\overline{BP_v} = \overline{AB}\cos\varphi$

$\overline{MB} = \overline{AB} - \xi$

$\Downarrow$

$\overline{MP_v}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BP_v}^2 - 2\overline{MB}\cdot\overline{BP_v}\cos\varphi$

$\overline{MP_v}^2 = (R\sqrt{2} - \xi)^2 + 2R^2\cos^2\varphi - 2(R\sqrt{2}-\xi)R\sqrt{2}\cos^2\varphi \Rightarrow \boxed{\overline{MP_v} = f(\xi, \varphi)}$

Rastojanje tačke M od trenutnog pola brzina P_v zavisi od položaja tačke M u cevi (njene relativne koordinate ξ), ali i od položaja cevi u ravni kretanja, ugla obrtanja φ cevi. To znači da i intezitet prenosne brzine tačke, $v_p = \omega \overline{MP_v}$, predstavlja funkcije napred navedenih koordinata sistema, tj.: $v_p = v_p(\varphi, \xi)$. Ugao između ose $A\xi$ i $\vec{v}_p$ je prema slici:

$\alpha = \sphericalangle(A\xi, \vec{v}_p) = \frac{\pi}{2} - \theta$, gde je: $\frac{\overline{P_vB}}{\sin\theta} = \frac{\overline{MP_v}}{\sin\varphi} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\overline{P_vB}}{\overline{P_vM}}\sin\varphi$, pa su i

$\theta = \theta(\xi, \varphi)$ i $\alpha = \sphericalangle(A\xi, \vec{v}_p)$ funkcije ne samo relativne koordinate ξ, već je i ugla obrtanja cevi φ. Ove činjenice imaju za posledicu da se **pri određivanju kinematskih karakteristika prenosnog kretanja tačke M, pa samim tim i kinematskih veličina apsolutnog kretanja u nekom trenutku t moraju se i tačka i telo postaviti u položaj koji odgovara tom trenutku, a u odnosu na nepokretni referentni objekat.**

U trenutku $t_1 = 1$ položaj cevi u DKS Oxy određen je koordinatom $x_{B_1} = x_B(t_1 = 1) = R$, što znači da je ugao obrtanja $\boxed{\varphi_1 = \frac{\pi}{4}}$. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje cevi u tom trenutku su:

$\boxed{\omega_1} = \omega = \frac{\pi}{4}$ i $\boxed{\varepsilon_1} = \varepsilon = 0,$

a brzina i ubrzanje tačke B cevi u $t_1 = 1$ su:

$\boxed{v_{B_1}} = \frac{R\pi}{4}$ i $a_{B_1} = -\frac{R\pi^2}{16}$ ($a_{B_1} < 0, v_{B_1} > 0$, vektori $\vec{a}_{B_1}$ i $\vec{v}_{B_1}$ su suprotnog smera)

Kako je u $t_1 = 1$, $B = M_1$, to je prenosna brzina tačke u tom trenutku, $\vec{v}_{p_1}$, jednaka brzini tačke B: $\boxed{\vec{v}_{p_1} = \vec{v}_{B_1}} \Rightarrow v_{p_1} = \frac{R\pi}{4}$

Prenosno ubrzanje tačke M kao ubrzanje koincidentne tačke cevi koja vrši ravno kretanje u trenutku t iznosi:

$\vec{a}_p = \vec{a}_B + \vec{a}^B_{MN} + \vec{a}^B_{MT},$

gde je:

$a^B_{MN} = \omega^2 \cdot \overline{MB}$ i $a^B_{MT} = \varepsilon \cdot \overline{MB}$, $\overline{MB} = \overline{AB} - \xi = R\sqrt{2} - \xi$

U trenutku $t_1 = 1$ prenosno ubrzanje tačke, $\vec{a}_{p_1}$, jednako je ubrzanju tačke B cevi u tom trenutku:

$\boxed{\vec{a}_{p_1} = \vec{a}_B}$, jer je: $\overline{M_1B_1} = 0 \Rightarrow a^{B_1}_{M_1N} = 0$ i $a^{B_1}_{M_1T} = 0$

Apsolutna brzina $\vec{v}_1$ tačke M u trenutku $t_1=1$ je:

$$\vec{v}_1=\vec{v}_{r_1}+\vec{v}_{p_1}=\vec{v}_{r_1}+\vec{v}_{B_1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{v_{1x}}= v_{r_1}\frac{\sqrt{2}}{2}+v_{B_1}=2R+\frac{R\pi}{4} \\ \boxed{v_{1y}}=-v_{r_1}\frac{\sqrt{2}}{2}=-2R \end{array}\right\} v_1=\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2}$$

Apsolutno ubrzanje $\vec{a}_1$ tačke M u trenutku $t_1=1$ je:

$$\vec{a}_1=\vec{a}_{p_1}+\vec{a}_{r_1}+\vec{a}_{c_1}=\vec{a}_{B_1}+\cancel{\vec{a}^{B_1}_{M_1N}}^{\,0}+\cancel{\vec{a}^{B_1}_{M_1T}}^{\,0}+\vec{a}_{r_1}+\vec{a}_{c_1},$$

tj.:

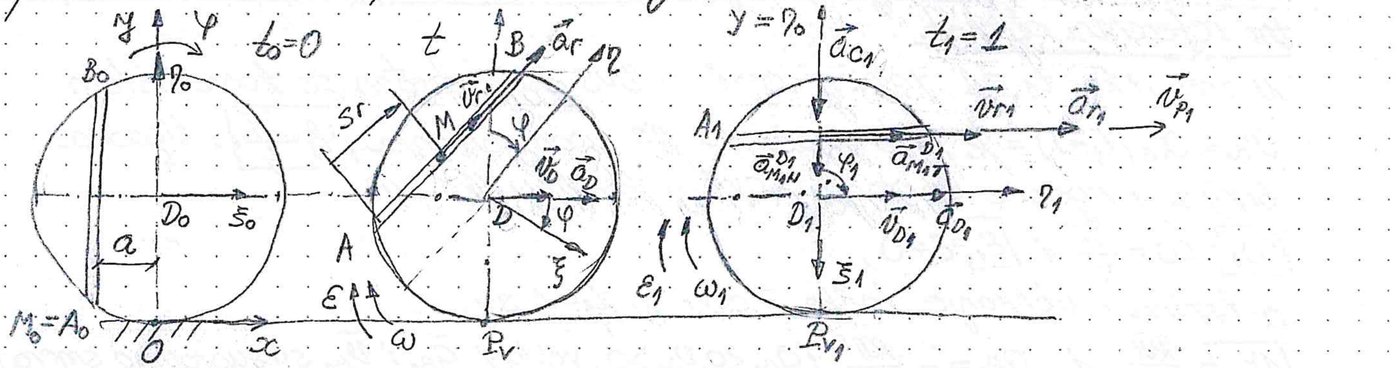
$$\vec{a}_1=\vec{a}_{B_1}+\vec{a}_{r_1}+\vec{a}_{c_1},$$

gde je: $\vec{a}_{c_1}=2\vec{\omega}_1\times\vec{v}_{r_1} \Rightarrow a_{c_1}=2\cdot\omega_1 v_{r_1}\sin 90^\circ \Rightarrow \boxed{a_{c_1}}=R\pi\sqrt{2},$

pa je:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{a_{1x}}=a_{B_1}+a_{r_1}\cos\frac{\pi}{4}+a_{c_1}\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{R\pi^2}{16}+2R+R\pi \\ \boxed{a_{1y}}=-a_{r_1}\sin\frac{\pi}{4}+a_{c_1}\cos\frac{\pi}{4}=-2R+R\pi \end{array}\right\} a_1=\sqrt{a_{1x}^2+a_{1y}^2}$$

5.) Disk poluprečnika $R=5$ kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj horizontalnoj podlozi. Položaj diska određen je uglom rotacije diska $\varphi=\pi\frac{t^2}{2}$. Istovremeno po žljebu AB diska, kreće se tačka M iz položaja A ka B po zakonu $s_r=4t^2$. U početnom trenutku žljeb je upravan na podlogu. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $t_1=1$. Dato $a=3$.



Relativno kretanje tačke M je pravolinijsko po žljebu AB sa poznatim zakonom relativnog puta, $s_r=s_r(t)$.

Prenosno kretanje tačke M određeno je kotrljanjem diska bez klizanja po nepokretnoj ravnoj podlozi, dakle, ravnim kretanjem diska koje ima jedan stepen slobode ($n=1$) i koje je zadato zakonom rotacije, $\varphi=\varphi(t)$. Koordinatni sistem vezan za disk je $D\xi\eta\zeta$, čija se osa $D\eta$ u početnom trenutku $t_0=0$ poklapa sa osom $D_0\eta_0$, odnosno, sa pravcem ose Oy nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$, koje su paralelne osi žljeba (A_0B_0) u tom trenutku. Osa $D\xi$ upravna je na osu $D\eta$ u ravni kretanja mehaničkog sistema, a osa $D\zeta$ je upravna na tu ravan (Oxy). U trenutku t, usled kretanja diska centar diska D dospeće u položaj D (koordinate tog položaj u odnosu na nepokretan DKS su: $x_D = \varphi \overline{DP_V} = \varphi R$ i $y_D = R$), a ose $D\eta$ i $D\xi$ vezane za disk će se zaokrenuti za ugao rotacije $\varphi = \varphi(t)$ oko ose $D\zeta$ u odnosu na svoje početne položaje $D_0\eta_0$, odnosno, $D_0\xi_0$. Osa žljeba u tom trenutku ostaje paralelna osi $D\eta$ ($AB \parallel D\eta$). Ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje diska su:

$\omega = \dot{\varphi} = \pi t$ i $\varepsilon = \dot{\omega} = \pi = const$ (ω i ε istog znaka, tj. istog smera),

dok su brzina i ubrzanje centra D diska:

$\vec{v}_D = \vec{\omega} \times \overrightarrow{P_V D}$, $v_D = \omega \cdot R = \pi t R$ $(\vec{v}_D \perp P_V D)$

i $\vec{a}_D = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{P_V D}$; $a_D = \varepsilon R = \pi R = const$ $(\vec{a}_D \perp P_V D)$

Položaj tačke M na žljebu u posmatranom trenutku određen je pravolinijskom koordinatom $s_r = 4t^2$ koja se meri od tačke A žljeba u smeru relativnog kretanja tačke po žljebu. Relativna brzina v_r i relativno ubrzanje tačke M u trenutku t su:

$v_r = \dot{s}_r = 8t$ i $a_r = \dot{v}_r = 8 = const.$

U trenutku $t_1 = 1$, ugao zaokretanja diska, tj. njegove ose $D\eta$ oko ose $D\zeta$, a u odnosu na njen početni položaj $D_0\eta_0$ iznosiće:

$\varphi_1 = \varphi(t_1 = 1) = \frac{\pi}{2}$, pa će se poklopi sa pravcem i smerom ose $D_1\eta_1$ $(x_{D_1} = \frac{\pi}{2} R)$

U tom trenutku žljeb zauzima položaj koji je paralelan osi $D_1\eta_1$: $A_1B_1 \parallel D_1\eta_1$.

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje diska u $t_1 = 1$ su:

$\boxed{\omega_1} = \omega(t_1) = \pi$ i $\boxed{\varepsilon_1} = \varepsilon = \pi$,

a brzina i ubrzanje centra diska iznose:

$\boxed{v_{D_1}} = \omega_1 \overline{D_1 P_{V_1}} = \boxed{5\pi}$ i $\boxed{a_{D_1}} = \varepsilon_1 \overline{D_1 P_{V_1}} = \boxed{5\pi}$

Položaj tačke M na žljebu u posmatranom je: $\overline{A_1M_1} = s_{r_1} = s_r(t_1) \Rightarrow \boxed{\overline{A_1M_1}} = 4$

Položaj M_1 je na sredini žljeba A_1B_1 (dužina žljeba AB je: $\overline{AB} = 2\sqrt{R^2 - a^2}$, tj. $\overline{AB} = 8$). Relativna brzina i relativno ubrzanje tačke u tom položaju su:

$\boxed{v_{r_1}} = 8$ i $\boxed{a_{r_1}} = a_r = 8 = cons$

Prenosna brzina v_{p_1} tačke M, kao brzina koincidentne tačke žljeba, u $t_1 = 1$ je:

$\vec{v}_{p_1} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{P_{V_1}M_1} \Rightarrow \boxed{v_{p_1}} = \omega_1 \cdot \overline{P_{V_1}M_1} = 8\pi$, $\overline{P_{V_1}M_1} = R + a = 8$ $(\vec{v}_{p_1} \perp P_{V_1}M)$

Prenosno ubrzanje a_{p_1} tačke M, kao ubrzanje koincidentne tačke žljeba (diska) u $t_1 = 1$ je:

$\vec{a}_p = \vec{a}_{D_1} + \vec{a}^{D_1}_{M_1T} + \vec{a}^{D_1}_{M_1N}$, $\boxed{a^{D_1}_{M_1T}} = \varepsilon_1 \overline{M_1D_1} = \varepsilon_1 a = 3\pi$ i $\boxed{a^{D_1}_{M_1N}} = \omega_1^2 \overline{M_1D_1} = 3\pi^2$

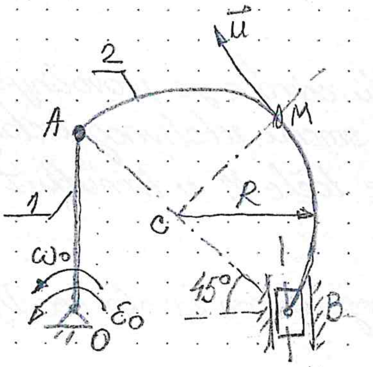
Apsolutna brzina tačke u $t_1 = 1$ je: $\vec{v}_1 = \vec{v}_{r_1} + \vec{v}_{p_1} \Rightarrow \boxed{v_{1\eta_1}} = v_{r_1} + v_{p_1} = 8 + 8\pi$

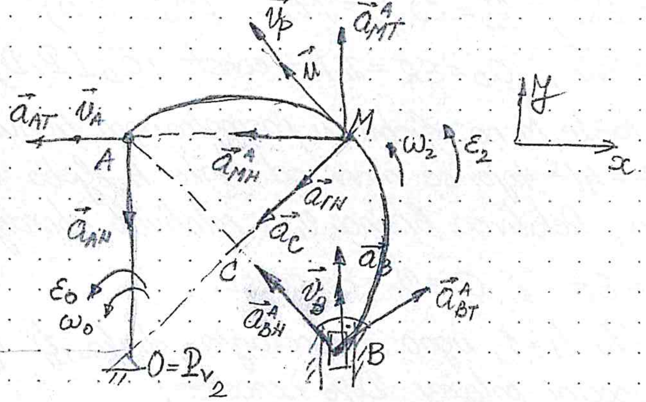
$\boxed{v_{1\xi_1}} = 0$

Apsolutno ubrzanje tačke u $t_1 = 1$ je:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{a}_{p_1} + \vec{a}_{r_1} + \vec{a}_{c_1} = \vec{a}_{D_1} + \vec{a}^{D_1}_{M_1T} + \vec{a}^{D_1}_{M_1N} + \vec{a}_{r_1} + \vec{a}_{c_1} \\ \text{gde je: } \vec{a}_{c_1} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{r_1} \text{ i } \boxed{a_{c_1}} = 2\omega_1 v_{r_1} = 16\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{a_{1\eta_1}} = a_{D_1} + a^{D_1}_{M_1T} + a_{r_1} = 8 + 8\pi \\ \boxed{a_{1\xi_1}} = -a^{D_1}_{M_1N} - a_{c_1} = -3\pi^2 - 16\pi \end{array}$$

⑥ Polukružno savijena žica poluprečnika R dovodi se u kretanje posredstvom krivaje $\overline{OA} = R\sqrt{2}$ i klizača B, koji može da se kreće po pravolinijskoj vođici. Po žici se kreće prsten M konstantnom po intenzitetu relativnom brzinom u. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje prstena u položaju prikazanom na slici, kada je: $\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$, $\omega_0 = u/R$, $\varepsilon_0 = u^2/R^2$





Relativno kretanje tačke M je po polukružno savijenoj žici, telu 2. Vektor relativne brzine $\vec{v}_r$ je u posmatranom trenutku: $\vec{v}_r = \vec{u}$, a relativno ubrzanje:

$\vec{a}_r = \vec{a}_{rT} + \vec{a}_{rN}$,

gde je: $a_{rT} = \dot{v}_r = 0$, jer je $v_r(t) = u = const$

i $a_{rN} = v_r^2/R_{k,r} \Rightarrow a_{rN} = \frac{u^2}{R}$ (Vektor $\vec{a}_{rN}$ usmeren ka centru relativne kružne trajektorije čiji je centar tačka C)

Prenosno kretanje tačke M je određeno ravnim kretanjem tela 2. Da bi se odredila prenosna brzina $\vec{v}_p$ i prenosno ubrzanje $\vec{a}_p$ prstena M kao brzine i ubrzanje koicidentne tačke M_2 tela 2 ($M = M_2$; $\vec{v}_p = \vec{v}_{M_2}$ i $\vec{a}_p = \vec{a}_{M_2}$) potrebno je analizirati ravno kretanje tela 2.

Kako je $v_A = \omega_0 \overline{OA} = u\sqrt{2}$ i $\vec{v}_A \perp OA$, dok je pravac brzine tačke B, $\vec{v}_B$, pravca vođica, to se u posmatranom trenutku trenutni pol brzina tela 2, P_{v_2}, poklapa sa tačkom O:

$O = P_{v_2} \Rightarrow v_A = \omega_2 \cdot \overline{AP}_{v_2} = \omega_2 R\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \omega_0 = u/R}$

Veza između ubrzanja tačaka A i B tela 2 je:

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^A_{BN} + \vec{a}^A_{BT}$, $\boxed{a^A_{BN} = \omega_2^2 \cdot \overline{AB} = 2\frac{u^2}{R}}$, $\boxed{a^A_{BT} = \varepsilon_2 \overline{AB} = 2\varepsilon_2 R}$ i $\vec{a}_A = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{AN}$

gde je: $\boxed{a_{AT} = \varepsilon_1 \cdot \overline{OA} = \frac{u^2}{R}\sqrt{2}}$ i $\boxed{a_{AN} = \omega_1^2 \cdot \overline{OA} = \frac{u^2}{R}\sqrt{2}}$, pa je:

x: $0 = -a_{AT} - a^A_{BN}\frac{\sqrt{2}}{2} + a^A_{BT}\sqrt{2}/2 \Rightarrow a^A_{BT} = 4\frac{u^2}{R} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = 2\frac{u^2}{R^2}}$

Prenosna brzina tačke M u posmatranom položaju mehanizma je:

$v_p = v_{M_2} = \omega_2 \cdot \overline{MP}_{v_2} = \frac{u}{R} \cdot 2R \Rightarrow \boxed{v_p = 2u}$ $\vec{v}_p \perp OM$,

dok je prenosno ubrzanje:

$\vec{a}_p = \vec{a}_{M_2} = \vec{a}_A + \vec{a}^A_{MT} + \vec{a}^A_{MN} = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{AN} + \vec{a}^A_{MT} + \vec{a}^A_{MN}$, $\boxed{a^A_{MN} = \omega_2^2 \overline{AM} = \sqrt{2}\frac{u^2}{R}}$ i $\boxed{a^A_{MT} = \varepsilon_2 \overline{AM} = \frac{2\sqrt{2}u^2}{R}}$

Apsolutna brzina tačke:

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p \Rightarrow v = v_r + v_p \Rightarrow \boxed{v = 3u}$ ($\vec{v}_r$ i $\vec{v}_p$ kolinearni vektori)

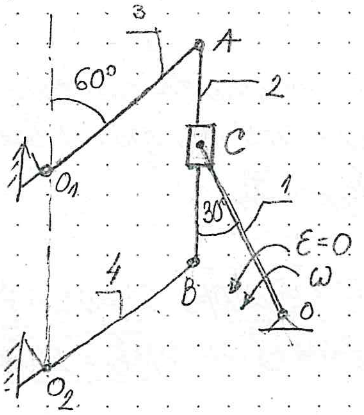
Apsolutno ubrzanje tačke:

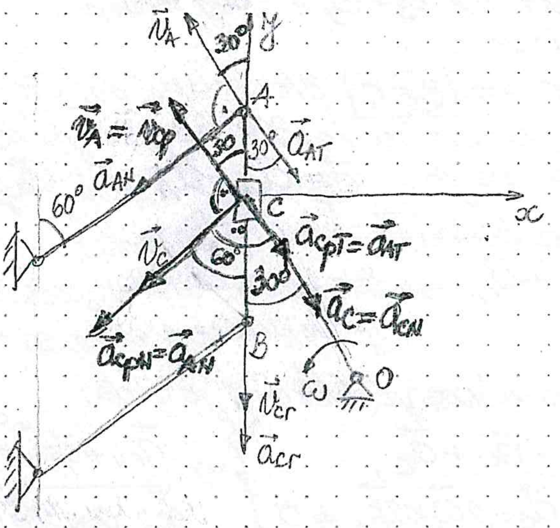
$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c = \vec{a}_{rN} + \vec{a}_c + \vec{a}_A + \vec{a}^A_{MT} + \vec{a}^A_{MN}$, gde je: $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_2 \times \vec{u}$, $\boxed{a_c = 2\frac{u^2}{R}}$

x: $a_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}a_{rN} - \frac{\sqrt{2}}{2}a_c - a_{AT} - a^A_{MN} \Rightarrow a_x = -\frac{7\sqrt{2}}{2}\frac{u^2}{R}$,

y: $a_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}a_{rN} - \frac{\sqrt{2}}{2}a_c - a_{AN} + a^A_{MT} \Rightarrow a_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{u^2}{R}$

7) Krivaja $\overline{OC}$ mehanizma obrće se oko ose kroz tačku O upravne na ravan kretanja mehanizma, a preko klizača C dovodi u kretanje zglobni četvorougaoni O_1ABO_2. U trenutku kada mehanizam zauzima položaj prikaz. slikom ugaona brzina krivaje je ω, a njeno ugaono ubrzanje $\varepsilon=0$. Odrediti relativnu brzinu i relativno ubrzanje klizača C u odnosu na štap AB, kao i ugaono ubrzanje štapa O_1A, ako je $\overline{OC}=R$ i $\overline{O_1A}=\overline{O_2B}=2R\sqrt{3}$.





Tačka C klizača zglobno je vezana za tačku C krivaje OC, pa je apsolutna brzina tačke C klizača:

$\vec{v}_C=\vec{\omega}_1\times\overline{OC} \Rightarrow v_C=\omega_1\cdot\overline{OC}=\omega R \quad (\vec{v}_C\perp\overline{OC},\ \measuredangle(AB,\vec{v}_C)=60°)$,

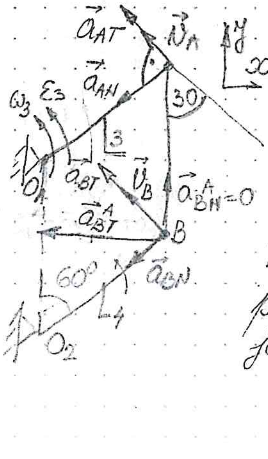
dok je njeno apsolutno ubrzanje:

$\vec{a}_C=\vec{a}_{CT}+\vec{a}_{CN}$; $\vec{a}_{CT}=\vec{\varepsilon}_1\times\overline{OC}=0$ i $a_{CN}=\omega_1^2\overline{OC}=\omega^2R$ i $\vec{a}_C=\vec{a}_{CN}$.

S druge strane, tačka C klizača se zajedno sa klizačem kreće po štapu AB zglobnog četvorougaonika O_1ABO_2, tj. tačka C vrši složeno kretanje koje se može se razložiti na pravolinijsko relativno kretanje i prenosno kretanje koje je posledica ravnog kretanja štapa AB u ravni slike.

Vektor relativne brzine $\vec{v}_{Cr}$ i vektor relativnog ubrzanja ($\vec{a}_{Cr}$ tačke C klizača) imaju pravac štapa AB u posmatranom trenutku, ali su smerovi i intenziteti ove dve kinematske veličine nepoznati. Zbog toga se smerovi vektora $\vec{v}_{Cr}$ i $\vec{a}_{Cr}$ pretpostavljaju.

Da bi se odredila prenosna brzina $\vec{v}_{Cp}$ i prenosno ubrzanje $\vec{a}_{Cp}$ tačke C klizača kao brzina i ubrzanje koincidentne tačke C_2 štapa AB ($C_2\equiv C$, $\vec{v}_{Cp}=\vec{v}_{C_2}$ i $\vec{a}_{Cp}=\vec{a}_{C_2}$) potrebno analizirati kretanje štapa AB kao člana zglobnog četvorougaonika O_1ABO_2.



Četvorougaonik O_1ABO_2 je paralelogram ($O_1A\parallel O_2B$ i $AB\parallel O_1O_2$).

Brzina i ubrzanje tačke A krivaje O_1A (telo 3) su:

$v_A=\omega_3\overline{O_1A}=2\sqrt{3}\,\omega_3R$; $\vec{a}_A=\vec{a}_{AT}+\vec{a}_{AN}$, $a_{AT}=\varepsilon_3\cdot2\sqrt{3}R$ i $a_{AN}=2\sqrt{3}\,\omega_3^2R$

Brzina i ubrzanje tačke B krivaje O_2B (telo 4) su:

$v_B=\omega_4\overline{O_2B}=2\sqrt{3}\,\omega_4R$; $\vec{a}_B=\vec{a}_{BT}+\vec{a}_{BN}$, $a_{BT}=\varepsilon_4 2\sqrt{3}R$, $a_{BN}=2\sqrt{3}\,\omega_4^2R$

Pošto je $\vec{v}_A\perp O_1A$ i $\vec{v}_B\perp O_2B$ i $O_1A\parallel O_2B \Rightarrow \vec{v}_A\parallel\vec{v}_B$, pa je trenutni pol brzina štapa AB (telo 2), P_{V_2}, u beskonačnosti, što znači da je njegova trenutna ugaona brzina $\boxed{\omega_2=0}$. To znači da je

$\vec{v}_A = \vec{v}_B$; $\vec{v}_A = \vec{v}_{C_2}$, odnosno $\boxed{\vec{v}_{cp} = \vec{v}_A}$ $(\measuredangle(C_y, \vec{v}_{cp}) = 30°)$

Kako je $v_A = v_B$ i $\overline{O_1A} = \overline{O_2B}$ to je $\omega_3 = \omega_4 \Rightarrow a_{AN} = a_{BN} = 2\sqrt{3}R\omega_4$ i $\boxed{\vec{a}_{AN} = \vec{a}_{BN}}$,
dok su vektori $\vec{a}_{AT}$ i $\vec{a}_{BT}$ međusobno paralelni $(\vec{a}_{AT} \parallel \vec{a}_{BT})$.
Veza između ubrzanja tačaka A i B, $\vec{a}_A$ i $\vec{a}_B$, kao tačaka štapa AB je:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_{BT} + \vec{a}_{BN} = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{BN} + \vec{a}_{BT}^{A} + \vec{a}_{BN}^{A}, \\ \text{gde su: } a_{BN}^{A} = \omega_2^2 \cdot \overline{AB} = 0 \;;\; a_{BT}^{A} = \varepsilon_2 \overline{AB} \text{ i } \vec{a}_{AN} = \vec{a}_{BN}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{BT} = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{BT}^{A}}$$

y: $a_{BT}\cos 30° = a_{AT}\cos 30°$
x: $-a_{BT}\sin 30 = -a_{AT}\sin 30° - a_{BT}^{A}$

Iz poslednje 2 jednačine sledi da je:
$a_{BT} = a_{AT} \Rightarrow \varepsilon_3 = \varepsilon_4$ i $\vec{a}_{BT} = \vec{a}_{AT}$
kao i da je:
$a_{BT}^{A} = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = 0}$ što znači da štap AB (2) vrši kružno translatorno kretanje, pa sve tačke štapa AB imaju ne samo jednake brzine nego i ubrzanja.
To znači da je: $\vec{a}_{cp} = \vec{a}_{C_2} = \vec{a}_A$ i $\vec{a}_{cpT} = \vec{a}_{AT}$ i $\vec{a}_{cpN} = \vec{a}_{AN}$.
Apsolutna brzina $\vec{v}_C$ tačke C je sada:

$\vec{v}_C = \vec{v}_{cp} + \vec{v}_{cr} \Rightarrow x: -v_C\cos 30° = -v_{cp}\cos 60° \Rightarrow \boxed{v_{cp} = \sqrt{3}\,v_C = \sqrt{3}\,\omega R} \Rightarrow \omega_3 = \omega_4 = \frac{\omega}{2}$

$y: -v_C\sin 30 = v_{cp}\sin 60 - v_{cr} \Rightarrow v_{cr} = \frac{3}{2}\omega R + \frac{1}{2}\omega R \Rightarrow \boxed{v_{cr} = 2\omega R}$

Apsolutno ubrzanje tačke C je sada:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_C = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_{cr} + \vec{a}_c, \\ \text{gde je } \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{cr} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}_{CN} + \overset{0}{\vec{a}_{CT}} = \vec{a}_{cpN} + \vec{a}_{cpT} + \vec{a}_{cr}$$

x: $a_{CN}\sin 30 = -a_{cpN}\cos 30° + a_{cpT}\sin 30°$

$\omega^2 R\frac{1}{2} = -\frac{\omega^2}{4}\cdot 2\sqrt{3}R\frac{\sqrt{3}}{2} + a_{cpT}\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a_{cpT} = \frac{5}{2}\omega^2 R} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_3 = \frac{5\sqrt{3}}{12}\omega}$

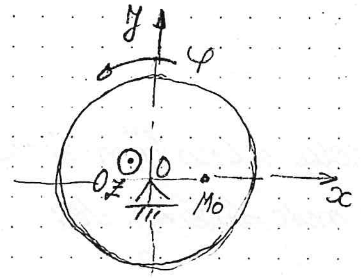
y: $-a_{CN}\cos 30 = -a_{cpN}\sin 30° - a_{cpT}\cos 30° - a_{cr}$

$\boxed{a_{cr} = -\sqrt{3}R\omega^2}$

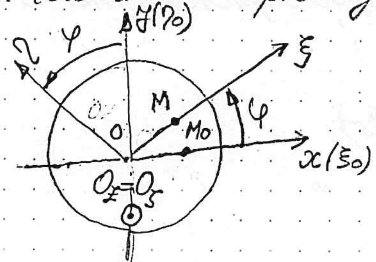
<u>Pogledati iz zbirke zadatke</u>: 5.19; 5.20; 5.21; 5.22

Rotacija tela oko nepokretne ose

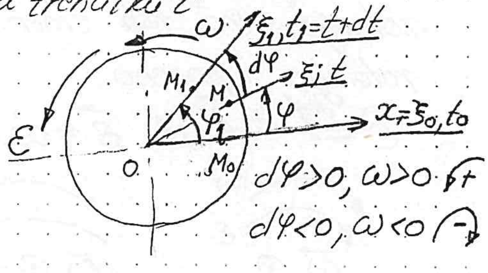
① Točak poluprečnika $R=2r$ rotira oko nepokretne ose Oz, po zakonu $\varphi=\frac{\pi}{2}t^2$. Odrediti brzinu i ubrzanje one tačke točka koja se u početnom trenutku nalazila na osi Ox na normalnom rastojanju $h=r$ od ose rotacije, u trenutku $t_1=1$.



Rotacija tela oko nepokretne ose predstavlja kretanje tela sa jednim stepenom slobode $n=1$. To znači da je položaj tela, tj. bilo koje njegove tačke, u odnosu na nepokretan DKS $Oxyz$, u bilo kom trenutku t određen jednom koordinatom koja se naziva ugao obrtanja tela φ. Rotacija tela oko nepokretne ose biće, dakle, poznata ukoliko se poznaje zakon promene ugla obrtanja tela u vremenu, $\varphi=\varphi(t)$. Ugao obrtanja predstavlja ugao između početnog položaja ose vezane za telo, a koja leži u ravni upravnoj na osu rotacije i njenog položaja u proizvoljnom trenutku vremena, ili ugao između ose nepokretnog DKS Ox (ili Oy) i položaja ose vezane za telo u ravni upravnoj na osu rotacije, $O\xi$ (ili $O\eta$), u trenutku t.



$$\varphi=\measuredangle(Ox,O\xi)=\measuredangle(Oy,O\eta)$$
$$\varphi=\measuredangle(O\xi_0,O\xi)=\measuredangle(O\eta_0,O\eta)$$
$$\varphi=\varphi(t)$$



Kinematske veličine koje karakterišu ovo kretanje su ugaona brzina tela ω i ugaono ubrzanje ε.

Ugaona brzina tela ω predstavlja brzinu promene ugla obrtanja tela. Ova veličina određena je određena prvim izvodom po vremenu konačne jednačine rotacije tela $\varphi=\varphi(t)$. Dakle:

$\omega \overset{def}{=} \frac{d\varphi}{dt}$, $\omega=\dot{\varphi}$, gde je $d\varphi$ beskonačni mali priraštaj ugla rotacije u trenutku t, a na intervalu vremena beskonačno male dužine dt ($[t, t_1=t+dt]$): $d\varphi \approx \varphi(t+dt)-\varphi(t)$.

Ugaona brzina tela predstavlja se kružnom strelicom (kao i ugao rotacije) koja prati smer porasta ugla rotacije, tj. veličine $d\varphi$ u posmatranom trenutku t. Prema konvenciji osa rotacije $Oz=O\zeta$ (osa $O\zeta$ osa vezana telo koja je nepokretna i poklapa se sa osom Oz nepokretnog DKS $Oxyz$) se orijentiše tako da se iz njenog vrha smer porasta ugla rotacije, veličina $d\varphi$, tj. smer (promene) ugaone brzine tela u vremenu, $\omega=\omega(t)$, vidi u pozitivno matematičkom smeru.

Vektor ugaone brzine je vektor koji ima pravac ose rotacije, a dat je izrazom $\vec{\omega} \overset{def}{=} \dot{\varphi}\vec{k}$ i $\vec{\omega}=\dot{\varphi}\vec{\nu}$, jer je $Oz=O\zeta$, tj. $\vec{\nu}=\vec{k}$,

odakle je: $\omega_z=\omega$ – ugaona brzina ω algebarska vrednost

U slučaju kada je ispoštovana konvencija vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ ima smer ose rotacije $O_z = O_\zeta$. Napadna tačka vektora $\vec{\omega}$ može biti bilo koja tačka ose rotacije (vektor $\vec{\omega}$ je klizni vektor).

Ugaono ubrzanje tela koje rotira oko nepokretne ose, ε, predstavlja brzinu promene ugaone brzine tela $\omega = \omega(t)$ i određeno je prvim izvodom po vremenu funkcije ugaone brzine $\omega = \omega(t)$:

$$\varepsilon \overset{def}{=} \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \varepsilon = \dot{\omega} \quad i \quad \varepsilon = \ddot{\varphi},$$

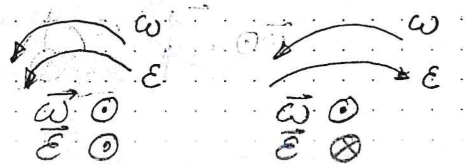
gde je $d\omega$ beskonačno mali priraštaj ugaone brzine tela u bilo kom trenutku t, $\omega = \omega(t)$, a tokom intervala vremena beskonačno male dužine dt:

$$d\omega \approx \omega(t+dt) - \omega(t).$$

Ugaono ubrzanje $\varepsilon = \varepsilon(t)$ predstavlja se kružnom strelicom koja ima isti smer kao i kružna strelica ugaone brzine $\omega = \omega(t)$, ako ugaona brzina raste raste u vremenu, a suprotan smer od smera kružne strelice ugaone brzine, ako ugaona brzina opada u vremenu.

Vektor ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ je vektor na osi rotacije koji u slučaju ubrzane rotacije ima isti smer kao i vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$, a suprotan smer ako je rotacija usporena:

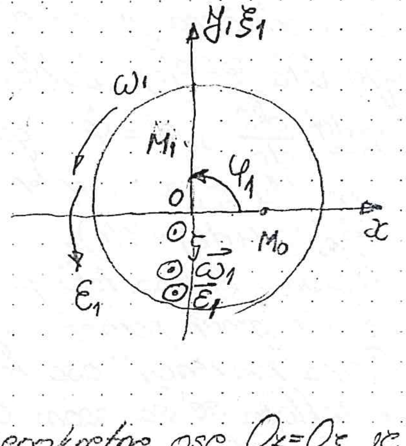
$$\vec{\varepsilon} \overset{def}{=} \dot{\omega}\vec{k} \quad ili \quad \vec{\varepsilon} = \dot{\omega}\vec{\nu} \;/\!\Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_z = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (\varepsilon_z = \varepsilon_\zeta)$$



U ovom zadatku je, za zakon rotacije tela oko nepokretne ose O_z: $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}t^2$, je

$$\omega = \dot{\varphi} \Rightarrow \omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \Rightarrow \omega(t) = \pi t$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} \Rightarrow \varepsilon = \frac{d}{dt}(\pi t) \Rightarrow \varepsilon(t) = \pi$$



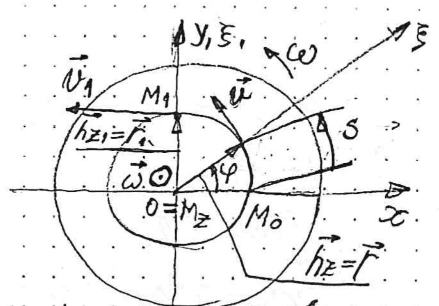
U trenutku $t_1 = 1$ vrednosti ugla rotacije $\varphi_1 = \varphi(t_1)$, ugaone brzine tela $\omega_1 = \omega(t_1)$ i ugaonog ubrzanja $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$ su:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}t_1^2, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 = \angle(Ox, O\xi_1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega_1 = \pi t_1, \quad \omega_1 = \pi$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(t) = \pi$$

Trajektorija bilo koje tačke M tela koje rotira oko nepokretne ose $O_z = O_\zeta$ je kružnica koja leži u ravni upravnoj na osu rotacije, a koja sadrži početni položaj te tačke M_0. Poluprečnik te kružnice jednak je normalnom rastojanju tačke do ose rotacije, h_z. Centar kružnice je tačka na osi rotacije koja predstavlja normalu projekciju tačke M, tj. njenog početnog



položaja M_0, M_z, na osu rotacije.
U ovom zadatku trajektorija tačke M je kružnica u ravni Oxy, sa centrom u tački O, jer je $O=M_z$ i poluprečnikom: $h_z=\overline{M_zM_0}=\overline{OM_0}$, $h_z=r=const$

Vektor brzine bilo koje tačke M tela koje rotira oko nepokretne ose određen je:
$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{h}_z}$, gde je $\boxed{\vec{h}_z=\overrightarrow{M_zM}}$ $(\vec{h}_z\perp\vec{\omega}(O_z))$
gde je $\vec{r}$ vektor položaja tačke M u odnosu na nepokretnu tačku O ose rotacije ($\vec{r}=\overrightarrow{OM}$). Vektor brzine $\vec{v}$ tačke M nalazi se u ravni kretanja te tačke, a upravan je na pravu MM_z. Smer vektora brzine $\vec{v}$ određen je pravilom desnog zavrtanja (palac desne ruke u pravcu i smeru vektora $\vec{\omega}$, koren desne šaka u pravcu i smeru vektora $\vec{h}_z$, ~~vrhovi~~ prsti desne šake se postavljaju u pravcu i smeru vektora brzine $\vec{v}$). Intezitet brzine tačke je:
$\boxed{|\vec{v}|=|\omega|h_z}$, odnosno, $\boxed{v=\omega h_z}$, ako je ispoštovana konvencija. Vektor brzine $\vec{v}$ mora da ima pravac tangente na trajektoriju, kružnicu, u posmatranom položaju tačke. Vektor $\vec{v}$ prati, u skladu sa ugaonom brzinom tela ω, jer je:
$\boxed{s=\overset{\frown}{M_0M}=h_z\varphi(t)}\Rightarrow\boxed{v=\dot{s}}=h_z\dot{\varphi}=\boxed{h_z\omega}$
Lučna koordinata s tačke na kružnici prati smer porasta ugla $\varphi=\varphi(t)$

U ovom zadatku je:
$O=M_z\Rightarrow\vec{r}=\vec{h}_z$ $(\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_zM})$,
pa je:
$v=\omega h_z\Rightarrow\boxed{v(t)=\pi r t}$, $\vec{v}\perp\vec{h}_z$
U trenutku $t_1=1$:
$v_1=\pi r$ i $\vec{v}_1=-\pi r\vec{i}$

Vektor ubrzanja bilo koje tačke M tela koje rotira oko nepokretne ose određen je u prirodnom triedru vezanom za trajektoriju (kružnicu) tačke M:
$\vec{a}=\vec{a}_T+\vec{a}_N$,
gde je $\vec{a}_T$ vektor tangentnog, a $\vec{a}_N$ vektor normalnog ubrzanja.
Vektor tangentnog ubrzanja $\vec{a}_T$ dat je izrazom:
$\boxed{\vec{a}_T}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}=\vec{\varepsilon}\times\vec{h}_z$, gde je $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ i $\vec{h}_z=\overrightarrow{M_zM}$.
Vektor $\vec{a}_T$ nalazi se u ravni kretanja tačke M i ima pravac tangente na kružnicu koja predstavlja trajektoriju tačke. Smer vektora $\vec{a}_T$ određen je, tj. prati, smer kružne strelice ugaonog ubrzanja tela ε. Intezitet vektora $\vec{a}_T$ je:
$\boxed{|\vec{a}_T|=|\varepsilon|\cdot h_z}$ i $\boxed{a_T=\varepsilon h_z}$ (algeborska vrednost, projekcija $\vec{a}_T$ na ort $\vec{T}$)
Vektor normalnog ubrzanja $\vec{a}_N$ dat je izrazom:
$\boxed{\vec{a}_N=\vec{\omega}\times\vec{v}}$, tj. $\vec{a}_N=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ ili $\vec{a}_N=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{h}_z)$
Vektor $\vec{a}_N$ je u ravni kretanja tačke M i ima pravac i smer glavne normale na trajektoriju (kružnicu) u posmatranom položaju tačke na trajektoriji, bez obzira na smer ugaone brzine tela ω.
Intezitet vektora $\vec{a}_N$ je:
$\boxed{|\vec{a}_N|=a_N=\omega^2h_z}$ $\left(a_N=\frac{v^2}{h_z}=\frac{(\omega h_z)^2}{h_z}\right)$.

U ovom zadatku je:

$a_T = \varepsilon h_z = \pi r \Rightarrow a_{T1} = a_T(t_1) = \pi r$

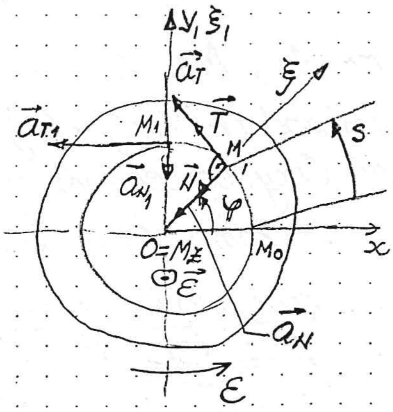
$\vec{a}_{T1} = -\pi r \vec{i}$

i $a_N = \omega^2 h_z = \pi^2 r t^2 \Rightarrow a_{N1} = a_N(t_1) = \pi^2 r$

$\vec{a}_{N1} = -\pi^2 r \vec{j}$,

pa je vektor ukupnog ubrzanja u $t_1 = 1$

$\vec{a}_1 = \vec{a}_{T1} + \vec{a}_{N1} \Rightarrow \vec{a}_1 = -\pi r \vec{i} + \pi^2 r \vec{j}$



Pređeni put tačke S od $t_0 = 0$ do $t_1 = 1$:

$S = |s_1 - s_0|$,

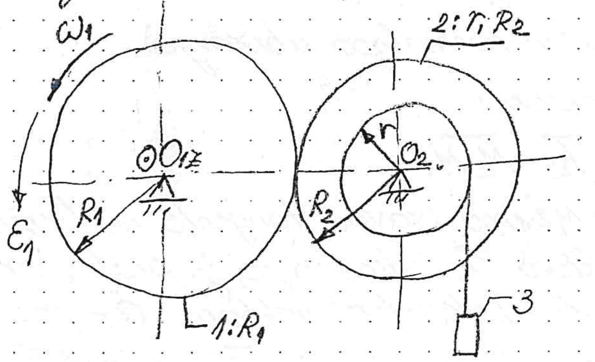
gde je:

$s_1 = s(t_1 = 1) \Rightarrow s_1 = h_z \varphi(t_1) = h_z \varphi_1 \Rightarrow s_1 = \frac{\pi r}{2}$

$s_0 = s(t_0 = 0) \Rightarrow s_0 = h_z \varphi_0 \Rightarrow s_0 = 0$,

pa je: $S = \frac{\pi r}{2}$.

2.) Točak 1 poluprečnika R_1 rotira oko nepokretne ose O_{1z} i dovodi u kretanje koaksijalni disk 2 koji može da rotira oko nepokretne ose O_{2z}. Na obod malog diska tela 2 poluprečnika r namotano je lako neistegljivo uže, a na slobodan kraj užeta okačen je teret 3. Između tela 1 i 2, kao i između tela 2 i užeta, nema proklizavanja. Ako se ugaona brzina točka 1 menja po zakonu $\omega_1 = 2t^2$, odrediti ubrzanje tereta 3 u trenutku $t_1 = 1$. Poluprečnik velikog diska tela 2 je R_2.



Zakon rotacije tela 1 oko nepokretne ose O_{1z} je: $\varphi = \varphi(t)$, gde je φ ugao rotacije tela 1 oko ose O_{1z}. Ugaona brzina tela 1 je: $\omega_1 = \dot{\varphi}$, a vektor ugaone brzine je: $\vec{\omega}_1 = \dot{\varphi}\vec{k}_1$, gde je $\vec{k}_1$ jedinični vektor ose O_{1z}. Ugaono ubrzanje tela 1 je: $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}$, a vektor ugaonog ubrzanja: $\vec{\varepsilon}_1 = \ddot{\varphi}\vec{k}_1$.

Rotacija tela 1 je poznata jer je poznat zakon promene njegove ugaone brzine u vremenu: $\omega_1 = \omega_1(t) = 2t^2$:

$\boxed{\omega_1 = \dot{\varphi}} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = 2t^2 \Rightarrow \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t 2t^2 dt \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \varphi(t) = \frac{2}{3}t^3}$

Takođe, poznato je i ugaono ubrzanje tela 1 u vremenu

$\boxed{\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1} \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{d}{dt}(2t^2) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_1(t) = 4t}$

Zakon rotacije tela 2 oko nepokretne ose O_2z je: $\theta=\theta(t)$, gde je θ ugao rotacije tela 2 oko ose O_2z. Ugaona brzina tela 2 je: $\omega_2=\dot{\theta}$, a ugaono ubrzanje: $\varepsilon_2=\dot{\omega}_2=\ddot{\theta}$. Zakon rotacije tela 2 nije poznat.

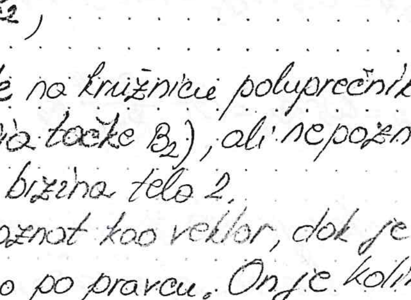
Da bi se odredio zakon rotacije tela 2, $\theta=\theta(t)$, tj. njegova ugaona brzina $\omega_2=\omega_2(t)$ i njegovo ugaono ubrzanje $\varepsilon_2=\varepsilon_2(t)$, potrebno je iskoristiti činjenicu da tela 1 i 2 nisu slobodna, već da su u kontaktu, u tački B. Zbog rotacije ovih tela uvek je druga tačka tela 1 u kontaktu sa nekom drugom tačkom tela 2, a u položaju B. Neka je u posmatranom trenutku t tačka B_1 tela 1 u dodiru sa tačkom B_2 tela 2, tako da važi:
$B_1=B_2=B$.

Vektor brzine tačke B_1 tela 1 je:
$\vec{v}_{B_1}=\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{B_1}=\vec{\omega}_1\times\vec{h}_{z_1}$, $\vec{h}_{z_1}=\vec{r}_{B_1}=\overrightarrow{O_1B_1}$, $h_{z_1}=R_1$,
pa je:
$v_{B_1}=\omega_1 h_{z_1}=\omega_1 R_1$ i vektor $\vec{v}_{B_1}$ pravca tangente na kružnicu poluprečnika $h_{z_1}=R_1$ sa centrom u tački $O_1=B_{1z_1}$ (trajektorija tačke B_1), smer određen smerom ugaone brzine $\omega_1=\omega_1(t)$.

Vektor ~~ugaone~~ brzine tačke B_2 tela 2 je, analogno:
$\vec{v}_{B_2}=\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{B_2}=\vec{\omega}_2\times\vec{h}_{z_2}$, $\vec{h}_{z_2}=\vec{r}_{B_2}=\overrightarrow{O_2B_2}$, $h_{z_2}=R_2$,
pa je:
$v_{B_2}=\omega_2 h_{z_2}=\omega_2 R_2$ i vektor $\vec{v}_{B_2}$ pravca tangente na kružnicu poluprečnika $h_{z_2}=R_2$ sa centrom u tački $O_2=B_{2z_2}$ (trajektorija tačke B_2), ali nepoznatog smera i intenziteta, jer je nepoznata ugaona brzina tela 2.

Dakle, vektor brzine $\vec{v}_{B_1}$ tačke B_1 tela 1 je poznat kao vektor, dok je vektor brzine $\vec{v}_{B_2}$ tačke B_2 tela 2 poznat samo po pravcu. On je kolinearan sa vektorom $\vec{v}_{B_1}$, ali mu je nepoznat smer i intenzitet, tj. algebarska vrednost, jer je nepoznata ugaona brzina ω_2 tela 2.

Primetimo da vektori $\vec{v}_{B_1}$ i $\vec{v}_{B_2}$ imaju pravac ose zajedničke tangente $B\tau$ na konturne linije tela 1 i 2 u tački B, tj.:
$\vec{v}_{B_1}=v_{B_1}\vec{\tau}$ i $\vec{v}_{B_2}=v_{B_2}\vec{\tau}$, gde je $\vec{\tau}$ jedinični vektor ose $B\tau$, koji je, u ovom slučaju istovremeno i ort tangente $\vec{T}$ na trajektorije tačaka B_1 i B_2 u posmatranom trenutku (konturne linije tela 1 i 2 su istovremeno i linije putanja tačaka B_1 i B_2)



Činjenica da nema proklizavanja između tela 1 i 2 znači da su projekcije brzina dodirnih tačaka B_1 i B_2 na osu zajedničke tangente $B\tau$ jednake:
$\vec{v}_{B_1}\cdot\vec{\tau}=\vec{v}_{B_2}\cdot\vec{\tau} \Rightarrow \boxed{v_{B_1\tau}=v_{B_2\tau}} \Rightarrow \boxed{v_{B_1}=v_{B_2}}$ (1)

pa je: $\boxed{\omega_1 R_1=\omega_2 R_2} \Rightarrow \omega_2=\frac{R_1}{R_2}\omega_1$, odnosno: $\omega_2=\frac{R_1}{R_2}\cdot 2t^2$ (2)

i $\omega_2(t_1=1)=2\frac{R_2}{R_1}$

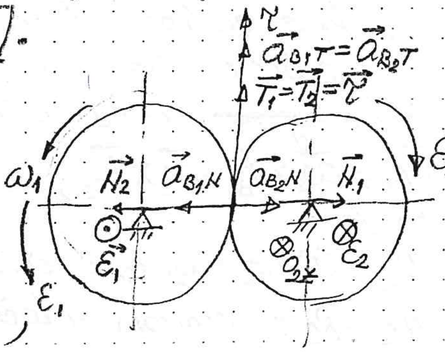
Relacija (1) ima za posledicu da je vektor brzine $\vec{v}_{B_2} = v_{B_2}\vec{\tau}$ jednak vektoru brzine tačke B_1: $\vec{v}_{B_1} = v_{B_1}\vec{\tau}$, pa je: $\boxed{\vec{v}_{B_2} = \vec{v}_{B_1}}$ (projekcije brzina $\vec{v}_{B_1}$ i $\vec{v}_{B_2}$ na pravac ose zajedničke normale Bn su nula: $v_{B_1n} = v_{B_2n} = 0$).

Vektorom brzine tačke B_2: $\vec{v}_{B_2} = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{B_2}$, određen je sada i smer ugaone brzine $\omega_2 = \omega_2(t)$ tela 2. To je smer u kome bi telo 2 rotiralo oko ose O_2z pod „dejstvom" vektora $\vec{v}_{B_2}$. To je negativno matematički smer gledano iz vrha ose O_1z. (Osa O_2z prema tome ima smer suprotan od smera ose O_1z).

Iz (2): $\omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\omega_1(t)$ moguće je sada odrediti i ugaono ubrzanje tela 2:

$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = \frac{R_1}{R_2}\varepsilon_1(t)} \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{R_1}{R_2}4t \Rightarrow \varepsilon_2(t_1=1) = 4\frac{R_1}{R_2}$. (3)

Relacija (3) je posledica jednakosti tangentnih ~~tangentnih~~ ubrzanja tačaka B_1 i B_2. Naime, kako je: $v_{B_1}(t) = v_{B_2}(t) \Rightarrow \dot{v}_{B_1} = \dot{v}_{B_2} \Rightarrow \boxed{a_{B_1T} = a_{B_2T}}$, tj.: $\varepsilon_1 h_{z_1} = \varepsilon_2 h_{z_2} \Rightarrow \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2$ što je ekvivalentno sa (3). Takođe, kako je $\vec{T}_1 = \vec{T}_2 = \vec{\tau} = \vec{T}$, to je i: $\boxed{\vec{a}_{B_1T} = \vec{a}_{B_2T}}$.



Normalna ubrzanja tačaka B_1 i B_2 su:

$a_{B_1N} = \omega_1^2 \cdot h_{z_1} = (2t^2)^2 \cdot R_1 \Rightarrow \boxed{a_{B_1N} = 4t^4R_1}$, $\vec{a}_{B_1N} = 4t^4R_1\vec{N}_1$

i $a_{B_2N} = \omega_2^2 h_{z_2} = \left(2t^2\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot R_2 \Rightarrow \boxed{a_{B_2N} = 4t^4\frac{R_1^2}{R_2}}$, $\vec{a}_{B_2N} = 4t^4\frac{R_1^2}{R_2}\vec{N}_2$,

što pokazuje da je $\boxed{a_{B_1N} \neq a_{B_2N}}$. Ovo je posledica činjenice da su poluprečnici trajektorija tačaka B_1 i B_2 različiti ($a_{B_1N} = \frac{v_{B_1}^2}{R_1}$ i $a_{B_2N} = \frac{v_{B_2}^2}{R_2}$, $v_{B_1} = v_{B_2}$)

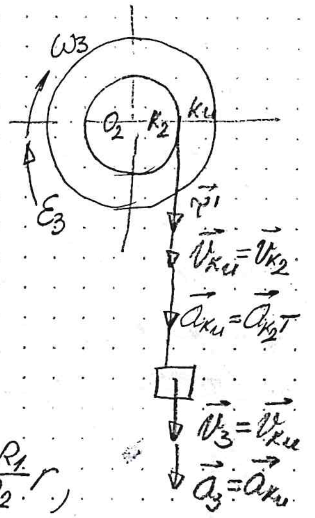
Na bazi gornjeg sledi da je: $\boxed{\vec{a}_{B_1} \neq \vec{a}_{B_2}}$, jer je $\vec{a}_{B_1T} = \vec{a}_{B_2T}$, ali $\vec{a}_{B_1N} \neq \vec{a}_{B_2N}$.

Smer ugaonog ~~brzine~~ ubrzanja ε_2 je smer u kome bi se telo 2 rotiralo oko ose O_2z pod „dejstvom" vektora $\vec{a}_{B_2T}$ ($\vec{a}_{B_2T} = \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{O_2B_2}$). Kao i u slučaju ugaone brzine tela 2, to je negativno matematički smer gledano iz vrha ose O_1z, a pozitivan matematički smer gledano iz vrha ose O_2z.

Koristeći zaključke prethodnog dela zadatka moguće je odrediti sada brzinu i ubrzanje one tačke užeta K_u koja je u kontaktu sa tačkom K_2 tela 2. Pošto nema proklizavanja između užeta i tela 2, u posmatranom trenutku vremena biće jednake projekcije brzina $\vec{v}_{K_u}$ i $\vec{v}_{K_2}$ na osu zajedničke tangente tela 2 i užeta u tački $K_2 = K_u = K$, koja ima pravac užeta u okolini tačke K. Kako je: $\vec{v}_{K_2} = v_{K_2}\vec{\tau}'$ i $v_{K_2} = \omega_2 h_{z_{K_2}} = \omega_2 r$,

biće: $\boxed{v_{K_2} = v_{K_u}} \Rightarrow v_{K_u} = \omega_2 r$

i $\boxed{\vec{v}_{K_2} = \vec{v}_{K_u}} = \omega_2 r\vec{\tau}'$ ($\vec{v}_{K_u}$ - ima pravac užeta u okolini tačke K_u, $\vec{v}_{K_2}$ - ima pravac normale na O_2K_2, a smer određen sa $\omega_2 = \omega_2(t)$)



Sve tačke užeta koje slobodno visini od tačke K_2 do tela 3 imaju iste brzine, jer je uže neistegljivo i ne menja pravac, pa je brzina tereta 3:

$$\boxed{\vec{v}_3 = \vec{v}_{K_u}} \Rightarrow \boxed{v_3 = v_{K_u}} \Rightarrow v_3 = \omega_2(t) r \quad i \quad v_3(t_1=1) = 2\frac{R_1}{R_2} r$$

Trajektorija tačke užeta K_u je prava linija, pa je:

$\vec{a}_{K_u} = \vec{a}_{K_uT}$, pri čemu je:

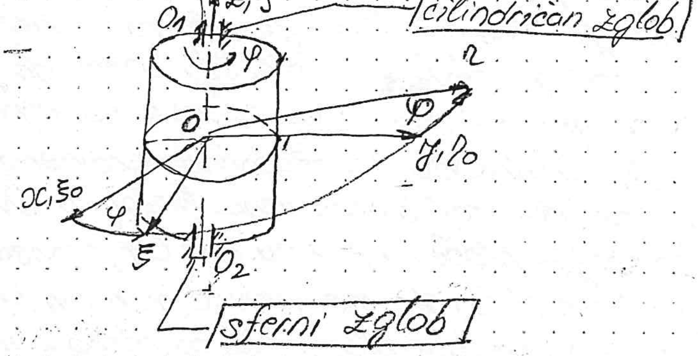
$$\boxed{a_{K_uT} = a_{K_2T} = \varepsilon_2 r} \Rightarrow a_{K_u} = a_{K_uT} = 4t\frac{R_1}{R_2} r$$

Takođe, pošto je $v_3 = v_{K_u} \Rightarrow \dot{v}_3 = \dot{v}_{K_u} \Rightarrow \boxed{a_3 = a_{K_uT}} = 4t\frac{R_1}{R_2} r$,

i $a_3(t_1=1) = 4\frac{R_1}{R_2} r$

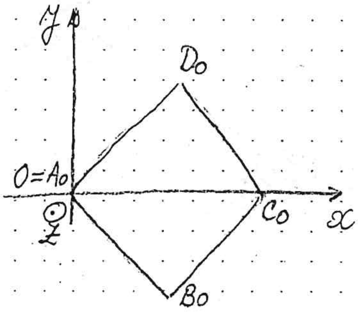
Telo 3 se kreće pravolinijski translatorno ($a_{3N} = a_{K_uN} = 0$).

Napomena -



Ravno kretanje krutog tela -

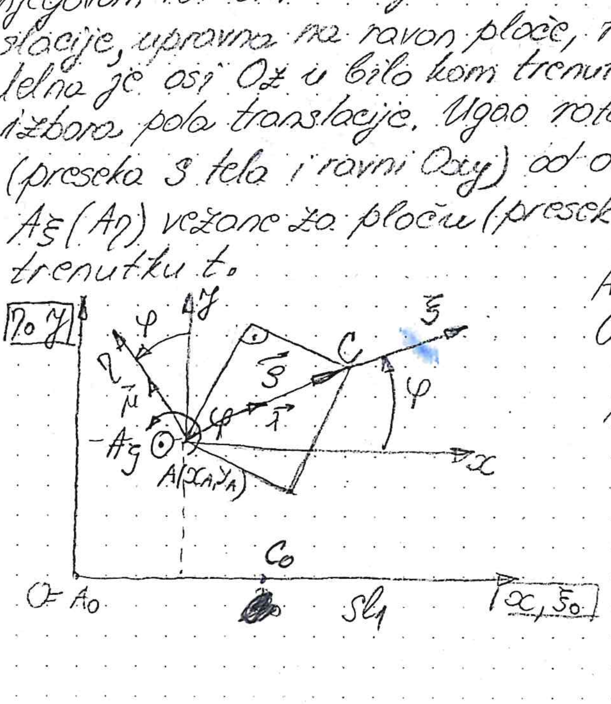
① Kvadratna ploča ABCD dužine strane $a\sqrt{2}$ kreće se u ravni Oxy, pri čemu poznate konačne kretanja temena A ploče: $x_A = 2t$ i $y_A = \frac{t^2}{2}$ i ugao rotacije ploče oko ose Az upravne na ravan ploče $\varphi = \frac{\pi}{2} t^2$. Odrediti brzinu i ubrzanje temena C ploče u trenutku $t_1 = 1$



Ploča ABCD je slobodno telo koje vrši ravno kretanje u ravni, koja je određena početnim položajem ploče, tj. ravni Oxy. Ovo znači da se trajektorije tačaka ploče ABCD nalaze u ravni Oxy. Slobodno telo koje vrši ravno kretanje ima 3 stepena slobode; n=3, što znači da je položaj tela (svih njegovih tačaka) u odnosu na nepokretan DKS Oxy u bilo kom trenutku t određen vrednošću 3 međusobno nezavisna parametra, tj. sa 3 koordinate i da ono može da vrši 3 nezavisna kretanja. Ova međusobno nezavisna kretanja su: translacija ploče u pravcu ose Ox, translacija ploče u u pravcu ose Oy i rotacija ploče (tela) oko ose upravne na ravan ploče u bilo kojoj tački ploči. Ovo znači da je ravno kretanje ploče tela određeno kretanjem jedne njegove tačke, tačke A, u ravni Oxy i zakonom rotacije oko ose Az ($A\zeta$ vezane za telo, $A\zeta \parallel Oz$). Konačne jednačine ravnog kretanja ploče u ravni Oxy su, dakle: $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$ i $\varphi = \varphi(t)$.

Jednačine (funkcije): $x_A = x_A(t)$ i $y_A = y_A(t)$ predstavljaju konačne jednačine translacije ploče u ravni Oxy, a tačka A čije kretanje opisuje ovo translaciju naziva se pol translacije. Pol translacije može biti bilo koja tačka tela čije je kretanje poznato.

Funkcija $\varphi = \varphi(t)$ predstavlja konačnu jednačinu rotacije ploče (tela) pri njegovom ravnom kretanju oko translatorno pokretne ose koja je, u polu translacije, upravna na ravan ploče, ravan kretanja Oxy. Ova osa $Az = A\zeta$ paralelna je osi Oz u bilo kom trenutku t. Zakon rotacije ploče ne zavisi od izbora pola translacije. Ugao rotacije φ meri se u ravni kretanja ploče (preseka S tela i ravni Oxy) od ose Ox (Oy) nepokretnog DKS Oxy do ose $A\xi$ ($A\eta$) vezane za ploču (presek S tela i ravni Oxy) u posmatranom trenutku t.



$A, C \in A\xi$,
$Ox \parallel Ax$ $\Big\}$ $\boxed{\varphi = \angle(Ax, A\xi) = \angle(Ox, A\xi)}$

i

$A_0, C_0 \in A_0\xi_0 = Ox \Rightarrow \varphi = \angle(A_0\xi_0, A\xi)$

i

$A\zeta = Az \parallel Oz$ - osa rotacije

Koordinatni sistem Axyz se kreće translatorno brzinom $\vec{v} = \vec{v}_A$ u odnosu na nepokretni DKS Oxyz.

Opisana kretanja (translacija i rotacija) su međusobno nezavisna komponentalna kretanja koja se odvijaju istovremeno, ali se na posmatranom, ~~besk~~ bilo kom intervalu vremena $[t, t_1 = t + dt]$ mogu misaono razdvojiti i posmatrati kao da se odvijaju sukcesivno (jedno pa drugo kretanje).

Kinematske karakteristike ravnog kretanja ploče (tela) prvog reda su:

1. brzina pola translacije, kao brzina translacije ploče (preseka S tela i ravni Oxy i tela u celini) pri ravnom kretanju:
$\vec{v}_A = \dot{x}_A \vec{i} + \dot{y}_A \vec{j}$

2. ugaona brzina ploče (preseka S tela i ravni Oxy i tela u celini)
$\omega = \dot{\varphi}$ i $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{\nu} \Rightarrow \omega_z = \omega = \dot{\varphi}$ — pravac ose rotacije $Az (A\zeta)$

Veličine $\dot{x}_A, \dot{y}_A$ i $\dot{\varphi}$ su međusobno nezavisne

Kinematske karakterike ravnog kretanja ploče (tela) drugog reda su:

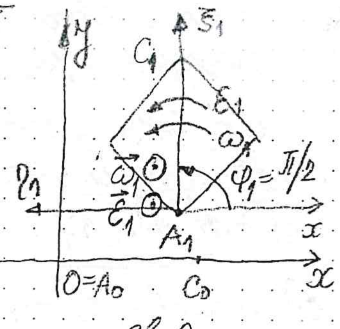
1.- ubrzanje pola translacije, kao ubrzanje translacije ploče (preseka S tela i ravni Oxy i tela u celini) pri ravnom kretanju:
$\vec{a}_A = \ddot{x}_A \vec{i} + \ddot{y}_A \vec{j}$

2.- ugaono ubrzanje ploče (preseka S tela i ravni Oxy i tela u celini):
$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ i $\vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{\nu} \Rightarrow \varepsilon_z = \varepsilon = \ddot{\varphi} \rightarrow$ pravac ose rotacije $Az (A\zeta)$

Pri određivanju smera ugaone brzine i ugaonog ubrzanja ploče (preseka S tela i ravni Oxy, odnosno tela u celini), ω i ε, kao vektora ugaone brzine i vektora ugaonog ubrzanja, $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$, važe ista pravila kao i kod rotacije tela oko nepokretne ose.

U posmatranom zadatku, položaj ploče u trenutku $t_1 = 1$ je određen koordinatama
$x_{A1} = x_A(t_1 = 1) = 2$, $y_{A1} = y_A(t_1 = 1) = \frac{1}{2}$ i $\varphi_1 = \varphi(t_1 = 1) = \frac{\pi}{2}$

Kinematske karakteristike ploče su:
$\dot{x}_A = 2, \dot{y}_A = t \Rightarrow \dot{x}_{A1} = 2, \dot{y}_{A1} = 1 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{A1} = 2\vec{i} + 1\cdot\vec{j}}$
$\ddot{x}_A = 0, \ddot{y}_A = 1 \Rightarrow \ddot{x}_{A1} = 0, \ddot{y}_{A1} = 1 \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{A1} = \vec{j}}$
$\omega = \dot{\varphi} = \pi t \Rightarrow \omega_1 = \omega(t_1 = 1) = \pi, \quad \vec{\omega}_1 = \pi\vec{k}$
$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \pi \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon(t_1 = 1) = \pi, \quad \vec{\varepsilon}_1 = \pi\vec{k}$



Sl. 2

Konačne jed. kretanja kretanja tačke C u DKS Oxyz

Na osnovu konačnih jednačina ravnog kretanja ploče mogu se odrediti konačne jednačine kretanja bilo koje tačke ploče, a u nepokretnom DKS. Konačne jednačine kretanja tačke C su (sl. 1):

$\vec{r}_C = \vec{r}_A + \vec{s}$, gde je $\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$, a
vektor $\vec{s} = \vec{AC}$, vektor položaja tačke C u odnosu na pol A. Ovaj vektor je za ravan ploče i poznat je DKS vezanom za telo $A\xi\eta\zeta$. Koordinate tačke $C(\xi_C, \eta_C)$ u koordinatnom sistemu $A\xi\eta\zeta$ su:
$\xi_C(t) = \overline{AC} = 2a$ i $\eta_C(t) = 0$
i one se ne menjaju tokom vremena, jer se geometrijski odnosi ploče prema

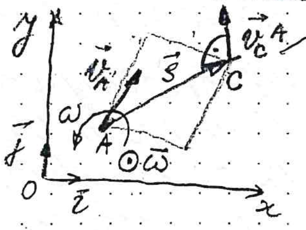
osama koordinatog sistema vezanog za ploču ne menjaju. Vektor $\vec{s}$ u KS $A\xi\eta\zeta$ je: $\vec{s} = \xi_C\vec{\lambda} + \eta_C\vec{\mu} \Rightarrow \vec{s} = 2a\vec{\lambda}$, gde su $\vec{\lambda}$ i $\vec{\mu}$ jedinični vektori osa $A\xi$ i $A\eta$: $\vec{\lambda} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$ i $\vec{\mu} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$. Imajući sve ovo u vidu sledi da je: $\vec{r}_C = \overrightarrow{OC} = x_A(t)\vec{i} + y_A\vec{j} + 2a(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j})$, pa su konačne jed. kretanja C u DKS Oxyz: $x_C = x_A(t) + 2a\cos\varphi(t) \Rightarrow x_C = 2t + a\pi\cos\frac{\pi t^2}{2}$

$$y_C = y_A(t) + 2a\sin\varphi(t) \Rightarrow y_C = \frac{1}{2}t^2 + a\pi\sin\frac{\pi t^2}{2}$$

<u>Brzina tačke C – metoda rastavljanja.</u>- Kako su translacija i rotacija oko translatorno pokretne ose komponentalna kretanja ravnog kretanja tela, to će se i brzina bilo koje tačke ploče, pa samim tim i tačke C, sastojati od 2 komponente:

1.- komponente brzine usled translatornog kretanja ploče; pošto su pri translaciji brzine svih tačaka tela jednake, to će ova komponenta brzine tačke C biti jednaka brzini pola translacije, $\vec{v}_A$.

2.- komponente brzine usled rotacije ploče oko translatorno pokretne ose $Az = A\zeta$, tzv., obrtna komponentna brzina tačke označava se sa $\vec{v}_C^A$ (čita se $\vec{v}$ tačke C oko A); ova komponenta brzine je data izrazom:

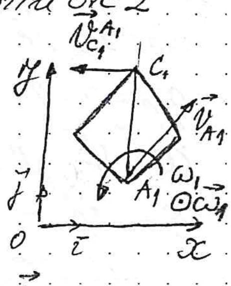


$\vec{v}_C^A = \vec{\omega} \times \vec{s}$, tj., $\vec{v}_C^A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AC}$,
koji je po formi analogan izrazu za brzinu tačke tela koje rotira oko nepokretne ose ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$); za vektor komponente brzine $\vec{v}_C^A = \vec{\omega} \times \vec{s}$ važi da je:

a) pravac vektora $\vec{v}_C^A$ – upravan na $\vec{s}$ (pravu AC) u ravni ploče (slike)
b) smer vektora $\vec{v}_C^A$ – određen smerom ugaone brzine ploče
c) intezitet vektora v_C^A – $v_C^A = \omega \cdot |\vec{s}| \Rightarrow \boxed{v_C^A = \omega\overline{AC}}$

Ukupna brzina tačke C, $\vec{v}_C$, u svakom trenutku jednaka je, vektorskom zbiru ove 2 komponente brzine, pa je:

$$\boxed{\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_C^A}$$



U trenutku $t_1 = 1$ gornji izraz glasi: $\vec{v}_{C_1} = \vec{v}_{A_1} + \vec{v}_{C_1}^{A_1}$, gde je:
$\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_A(t_1) = 2\vec{i} + \vec{j}$,
a $\vec{v}_{C_1}^{A_1} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{A_1C_1} \Rightarrow \vec{v}_{C_1}^{A} \perp A_1C_1$ i $v_{C_1}^{A_1} = \omega_1\overline{A_1C_1} = 2\pi a \Rightarrow \vec{v}_{C_1}^{A_1} = -2\pi a\vec{i}$,

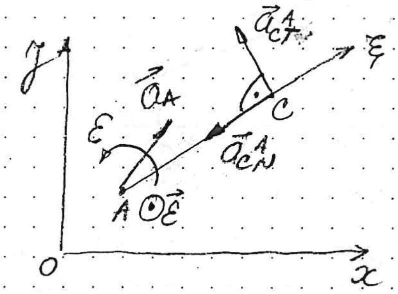
Brzina tačke C u trenutku t_1 (položaju C_1) je:

$$\vec{v}_{C_1} = \vec{v}_{A_1} + \vec{v}_{C_1}^{A_1} = (2-2\pi a)\vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_{C_1x} = 2-2\pi a \\ v_{C_1y} = 1 \end{array}\right\} |\vec{v}_C| = \sqrt{(2-2\pi a)^2 + 1}$$

<u>Ubrzanje tačke C – metoda rastavljanja.</u>- Analiza ubrzanja tačke C ploče (bilo koje tačke tela koje vrši ravno kretanje) analogna je analizi brzini te tačke, što znači da se ubrzanje tačke C ploče, $\vec{a}_C$, sastoji iz dve komponente:

1.- komponente ubrzanja usled translatornog kretanja ploče; pošto su pri translaciji tela ubrzanja svih tačaka tela jednaka, to deova komponenta ubrzanja tačke C biti jednaka ubrzanju pola translacije A, $\vec{a}_A$.

2.- komponente ubrzanja usled rotacije ploče oko translatorno pokretne ose $A_z = A_\zeta$, tzv. obrtna komponenta ubrzanja tačke, $\vec{a}_C^A$ (čita se: ubrzanje tačke C oko (u odnosu) na tačku A); ova komponenta ubrzanja, kao i u slučaju ~~rotaciju~~ ubrzanja tačke tela koje rotira oko nepokretne ose, sastoji se od odgovarajućeg obrtnog tangencijalnog ubrzanja:



$$\vec{a}_{CT}^A = \vec{\varepsilon} \times \vec{s} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AC}$$

i obrtnog normalnog ubrzanja;

$$\vec{a}_{CN}^A = \vec{\omega} \times \vec{v}_C^A, \quad tj: \vec{a}_{CN}^A = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{s}),$$

tako da važi:

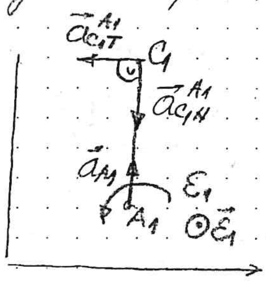
$$\vec{a}_C^A = \vec{a}_{CT}^A + \vec{a}_{CN}^A. \quad (\vec{a}_{CT}^A \perp \vec{a}_{CN}^A)$$

Vektor obrtnog tangencijalnog ubrzanja, $\vec{a}_{CT}^A = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AC}$, upravan je na na vektoru $\vec{s} = \overrightarrow{AC}$ u ravni slike, smer mu je određen smerom ugaonog ubrzanja ε, a intezitet ove komponente ubrzanja je: $|\vec{a}_{CT}^A| = a_{CT}^A = |\varepsilon| \overline{AC}$. Vektor $\vec{a}_{CT}^A$ kolinearan je sa vektorom $\vec{v}_C^A$.

Vektor normalnog tangencijalnog ubrzanja $\vec{a}_{CN}^A = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AC})$ je vektor koji ima pravac AC, sa smerom ka polu translacije (osi rotacije A_ζ), dok mu je intezitet: $|\vec{a}_{CN}^A| = a_{CN}^A = \omega^2 \overline{AC}$; zbog navedenog vektor $\vec{a}_{CN}^A$ može se napisati u obliku: $\vec{a}_{CN}^A = -\omega^2 \overrightarrow{AC}$

Ukupno ubrzanje tačke C, $\vec{a}_C$, jednako je vektorskom zbiru njegovih komponenti:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_C^A = \vec{a}_A + \vec{a}_{CT}^A + \vec{a}_{CN}^A.$$



U trenutku $t_1 = 1$ je:

$$\vec{a}_{A_1} = \vec{j}$$

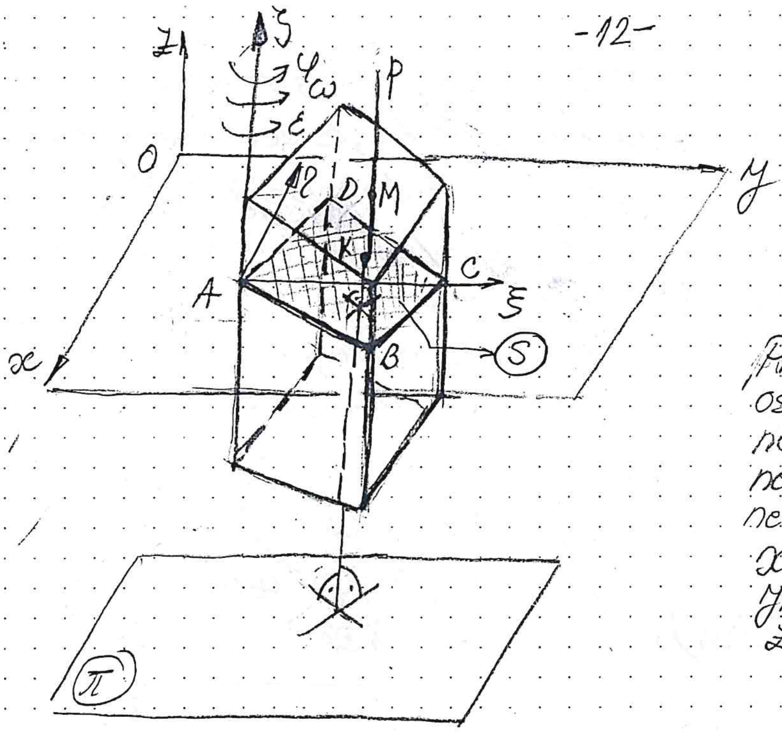
$$\vec{a}_{C_1T}^{A_1} = \vec{\varepsilon}_1 \times \overrightarrow{A_1C_1}, \quad a_{C_1T}^{A_1} = \varepsilon_1 \overline{A_1C_1} = 2a\pi, \quad \vec{a}_{C_1T}^{A_1} = -2a\pi\vec{i}$$

$$\vec{a}_{C_1N}^{A_1} = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{A_1C_1}), \quad a_{C_1N}^{A_1} = \omega_1^2 \overline{A_1C_1} = 2a\pi^2, \quad \vec{a}_{C_1N}^{A_1} = -2a\pi^2\vec{j},$$

pa je:

$$\vec{a}_{C_1} = -2a\pi\vec{i} + (1 - 2a\pi^2)\vec{j}$$

Napomena.- U zadatku je razmatrano (ravno) kretanje ravne ploče koja predstavlja dvo-dimenzionalno telo, u 2D-prostoru, ravni Oxy. Međutim, s obzirom na definiciju ravnog kretanja, ovo kretanje ploče, kao preseka S tro-dimenzionalnog tela i ravni Oxy koja je paralelna ravni π u odnosu na koju se to telo ravno kreće u 3D-prostoru, u potpunosti reprezentuje ravno kretanje 3D-tela. Ovo sledi iz činjenice da sve tačke tela koje leže na pravoj koja je upravna na presek S (ravan



p - prava, $p \perp S(Oxy, \pi)$

$p \cap S = \{K\}$ - K <u>tačka preseka prave p i ravni S</u>

$M \in p$ - <u>M tačka tela na pravoj p</u>

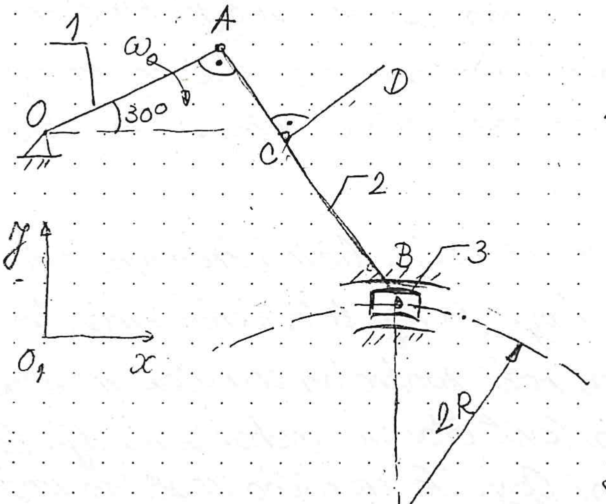
„Prava p tokom ravnog kretanja tela ostaje paralelna osi Oz, tj. ostaje upravna na ravan Oxy, pa su zbog toga konačne jednačine kretanja tačke M koja ne pripada preseku S:

$$x_M(t) = x_K(t)$$
$$y_M(t) = y_K(t)$$
$$z_M(t) = z_M(t_0) = const.$$

Oxy) kreću na isti način kao tačka preseka te prave i preseka S. Razlog za to je činjenica da se takva prava kreće translatorno.

<u>ZAKLJUČAK.</u>- Ravno kretanje 3D tela u 3D-euklidskom prostoru određeno je kretanjem ravnog preseka S u ravni Oxy tog preseka S, tj. ravni u odnosu na koju se vrši ravno kretanje tela. Ravno kretanje tela se, dakle, može posmatrati kao kretanje 2D-geometrijskog tela, <u>ravne figure</u> u 2D-ravnom prostoru.

(2) Za dati mehanizam u položaju prikazanom na slici odrediti intenzitet brzine i ubrzanja tačke D. Veze u tačkama O, A i B su zglobne. Štap OA obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω_0. Klizač B kreće se po kružnoj vođici poluprečnika 2R. Štap CD kruto je spojen pod pravim uglom za štap AB. Dato je: $\overline{OA}=R$, $\overline{AB}=2\sqrt{3}R$, $\overline{AC}=\overline{CD}=R$



Mehanizam se sastoji od 3 tela, pri čemu se kretanje svakog tela može predstaviti kretanjem njegovog odgovarajućeg preseka i ravni Oxy, a u ravni Oxy.

Štap OA, telo 1, rotira oko ose Oz upravne na ravan Oxy (ravan slike). Rotacija tela 1 biće poznata ukoliko je poznat zakon rotacije $\varphi=\varphi(t)$ ili ugaona brzina štapa $\boxed{\omega_1=\omega_1(t)}$ $(\omega_1=\dot{\varphi})$

Štap AB nijednom svojom tačkom nije vezan za nepokretan cilindričnim zglobom pa njegovo kretanje predstavlja najopštiji slučaj kretanja njegovog preseka u ravni, tj. ravno kretanje. Kretanje štapa AB biće poznato ukoliko poznajemo kretanje jedne njegove tačke (najčešće jednog njegovog kraja) i ugao rotacije $(\theta=\theta(t))$ oko ose kroz pol translacije, upravne na ravan slike. U indirektnom obliku, kretanje štapa biće poznato ukoliko poznajemo brzinu jedne tačke štapa (pola translacije) i ugaonu brzinu štapa. Za pol translacije, u ovom zadatku treba izabrati kraj A štapa, jer je za njega zglobno vezan kraj A pogonskog štapa OA, (telo čije je kretanje poznato). Kretanje štapa AB biće, dakle, po određeno funkcijama: $\boxed{\vec{v}_A=\vec{v}_A(t)}$ i $\boxed{\omega_2=\omega_2(t)}$, $(\omega_2=\dot{\theta}$

gde je $\boxed{\vec{v}_A=\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{OA}}$, $v_A=\omega_1(t)\cdot\overline{OA}$. $(\vec{\omega}_1=\omega_1\vec{k},\ \omega_1=\omega_{1z}=\dot{\varphi})$

Kretanje klizača 3 (klizač 3 vrši translatorno kretanje u kružnim vođicama) biće poznato ukoliko poznajemo kretanje jedne tačke klizača, npr. tačke B u kojoj je klizač zglobno vezan za kraj B štapa 2, ili ukoliko je poznata brzina tačke B, $\boxed{\vec{v}_B=\vec{v}_B(t)}$. Ova brzina mora imati pravac tangente na srednju liniju kružnih vođica, tj. na kružnicu poluprečnika 2R: $\vec{v}_B=v_B\vec{\tau}$. Taka brzina tačke B, kao tačke štapa AB koji vrši ravno kretanje iznosi:

$\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{v}_B^{\,A}\Rightarrow\vec{v}_B=\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{OA}+\vec{\omega}_2\times\overrightarrow{AB}$, gde je: $\vec{\omega}_2=\omega_2\vec{k}$ i $\omega_2=\omega_{2z}=\dot{\theta}$

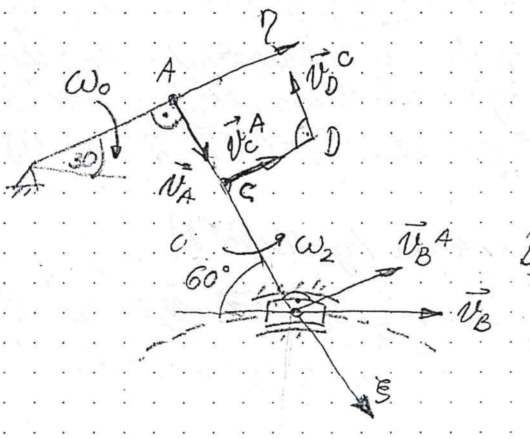
(θ – ugao rotacije štapa AB), pa je:

$\boxed{v_B\vec{\tau}=\omega_1\vec{k}\times\overrightarrow{OA}+\omega_2\vec{k}\times\overrightarrow{AB}}$, $\vec{\tau}$ ort tangente na trajektoriju (1)

U gornjoj vektorskoj jednačini vektori brzina $\vec{v}_B=v_B\vec{\tau}$, $\vec{v}_A=\omega_1\vec{k}\times\overrightarrow{OA}$ i $\vec{v}_B^{\,A}=\omega_2\vec{k}\times\overrightarrow{AB}$ nalaze u ravni slike, ravni O_1xy, pa se iz vektorske jednačine (1) dobijaju 2 skalarne jednačine projektovanjem vektora na levoj i desnoj strani te jednačine na ose, npr., Dekartovog koordinatnog sistema O_1xy (umesto KS O_1xy može se koristiti i neki drugi Dekartov KS, npr. onaj čije su ose vezane za štap AB, tj. KS $A\xi\eta$ čija osa $A\xi$ ima pravac štapa AB, dok je osa $A\eta$ tada upravna na pravac štapa AB). Iz ove dve jednačine određuju se dve nepoznate funkcije (veličine): $v_B=v_B(t)$ i $\omega_2=\omega_2(t)$, a preko ugaone brzine štapa OA: $\omega_1=\omega_1(t)$. Činjenica da se samo preko jedne funkcije kretanja, (ugla rotacije štapa OA; $\omega_1=\dot\varphi$) mogu odrediti kinematske veličine kretanja svih drugih tela mehanizma, znači da posmatrani mehanizam ima jedan stepen slobode kretanja, tj. $n=1$.

Opisani postupak određivanja karakterističnih veličina kretanja tela, članova, mehanizma, a za zadato kretanje jednog tela mehanizma, tzv., pogonskog člana, biće ilustrovan za neki konkretan trenutak vremena kada je poznat položaj mehanizma (svih članova mehanizma, tj., tačaka mehanizma) u ravni kretanja, ravni O_1xy. To praktično znači da vrednosti uglova između pravaca štapova, ili uglova između karakterističnih pravaca na telima i referentnih osa, kao i zadate kinematske veličine ~~veličina~~ pogonskog člana (ugaona brzina, brzina karakteristične tačke), važe samo za položaj mehanizam u posmatranom trenutku, iz priložen položaj mehanizma na slici. Specijalno, ako je za neku kinematsku veličinu rečeno da je njena vrednost konstantna, onda je na taj način indirektno ukazano na njenu promenu u vremenu, pa se od te veličine mogu tražiti izvodi po vremenu (u svim drugim slučajevima, kada se govori o konkretnim vrednostima kinematskih veličina u posmatranom položaju, izvodi po vremenu tih veličina se ne mogu tražiti).

<u>Određivanje brzina (i ubrzanja) tačaka i ugaonih brzina i ugaonih ubrzanja članova mehanizma metodom rastavljanja.-</u>



$\omega_1=\omega_{OA}=\omega_0=const$

$\boxed{v_A}=\omega_{OA}\cdot\overline{OA}=\boxed{\omega_0 R}$, $\vec{v}_A\perp OA$,

smer $\vec{v}_A$ određen (prati) smer $\omega_{OA}=\omega_0$.

<u>Brzina tačke B i ugaona brzina štapa AB</u>

Ugaona brzina $\vec{\omega}_2=\vec{\omega}_{AB}$ štapa AB nepoznatog intenziteta i smera, a pravac vektora $\vec{\omega}_2$ upravan na ravan slike. Smer $\vec{\omega}_2$ se pretpostavlja, tako što se pretpostavi smer kružne strelice za ω_2 u ravni slike.

Pošto štap AB vrši ravno kretanje, brzina drugog kraja štapa, tačke B, u kome je štap vezan za klizač biće:

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^{\,A}$; $v_B^A = \omega_2 \overline{AB}$, $\vec{v}_B^{\,A} \perp AB$, smer vektora $\vec{v}_B^{\,A}$ određen prethodno pretpostavljenim smerom ugaone brzine štapa ω_2; veličina v_B^A (može biti i pozitivna negativna, što zavisi od toga da li je smer ω_2 dobro pretpostavljen) je nepoznata. $\vec{v}_B^{\,A}$ je posledica rotacije štapa oko ose $A\zeta$.

Pravac vektora $\vec{v}_B$ je određen činjenicom da se tačka B, kao tačka klizača, kreće u kružnim vođicama, što znači da vektor $\vec{v}_B$ ima pravac tangente na kružne vođice u posmatranom položaju klizača; smer vektora $\vec{v}_B$ se pretpostavlja; algebarska vrednost v_B vektora $\vec{v}_B$ je nepoznata, a može biti pozitivna ili negativna, s obzirom na činjenicu da li je pretpostavljen smer $\vec{v}_B$ tačan ili nije.

Jednačinu $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^{\,A}$, tj. njenu levu i desnu stranu projektujemo na ose Dekartovog koordinatnog sistema. S obzirom na pravce ~~ovih~~ vektora u posmatranoj vektorskoj jednačini, biramo KS $A\xi\eta$ čija osa $A\xi$ ima pravac štapa AB (osa $A\eta \perp AB$):

$$v_{B\xi} = v_{A\xi} \Rightarrow \frac{1}{2} v_B = v_A \Rightarrow \boxed{v_B = 2R\omega_0}$$

$$v_{B\eta} = v_B^A \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} v_B = \omega_2 \cdot \overline{AB} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \omega_0/2}$$

Brzina tačke D

$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_D^{\,C}$; $v_D^C = \omega_2 \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}\omega_0 R$

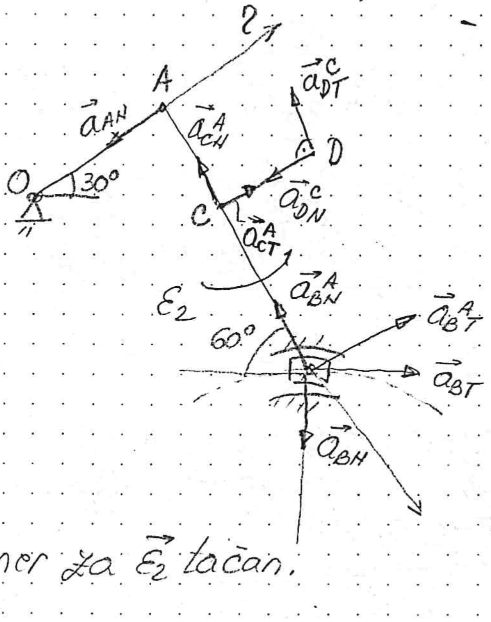
$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_C^{\,A}$, $v_C^A = \omega_2 \overline{AC} = \frac{1}{2}\omega_0 R$

$\Downarrow$

$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_C^{\,A} + \vec{v}_D^{\,C} \Rightarrow$ $v_{D\xi} = v_A - v_D^C \Rightarrow \boxed{v_{D\xi} = \frac{1}{2}\omega_0 R}$

$v_{D\eta} = v_C^A \Rightarrow \boxed{v_{D\eta} = \frac{1}{2}\omega_0 R}$

Brzina tačke B štapa AB i ugaono ubrzanje štapa AB



Ubrzanje tačke A na štapu OA:

$\vec{a}_A = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{AN}$, gde je

$a_{AT} = \varepsilon_1 \cdot \overline{OA}$, $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1(t)$, $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_0 = 0$

$a_{AT} = 0$

i $a_{AN} = \omega_1^2 \overline{OA} = \omega_0^2 R$

Ugaono ubrzanje štapa $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{\varepsilon}_{AB}$ nepoznatog inteziteta i smera, a pravac $\vec{\varepsilon}_2$ upravan na ravan slike. Smer vektora $\vec{\varepsilon}_2$ se pretpostavlja, tako što se pretpostavi smer kružne strelice za ε_2 u ravni slike. Veličina ε_2 može biti pozitivna ili negativna, s obzirom da li je pretpostavljen smer za $\vec{\varepsilon}_2$ tačan.

Ubrzanje kraja B štapa AB koji vrši ravno kretanje biće:

$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A}$, gde su: (1)

- $\vec{a}_{BN}^A$ - vektor koji ima pravac štapa AB, smer od B ka A, intezitet vektora je:

$\boxed{a_{BN}^A = \omega_2^2 \overline{AB}} \Rightarrow a_{BN}^A = (\frac{1}{2}\omega_0)^2 \cdot 2\sqrt{3}R$, $\boxed{a_{BN}^A = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0^2 R}$,

- $\vec{a}_{BT}^A$ - vektor je upravan na štap AB, smer određen smerom pretpostavljenog ~~ugaonog~~ ugaonog ubrzanja štapa ε_2, algebarska vrednost ovog vektora $\boxed{a_{BT}^A = \varepsilon_2 \overline{AB}}$ je nepoznata i može biti pozitivna ili negativna, što zavisi od da li je pretpostavljeni smer za ε_2 tačan ili netačan.

Komponente $\vec{a}_{BT}^A$ i $\vec{a}_{BN}^A$ ubrzanja tačke B štapa AB posledica su rotacije štapa AB oko ose $A\zeta$ u posmatranom trenutku.

Ubrzanje tačke B kao tačke klizača određeno je činjenicom da se tačka B kreće po kružnici, tako da važi:

$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_{BT} + \vec{a}_{BN}}$, gde su: (2)

- $\vec{a}_{BT}$ - vektor tangentnog ubrzanja tačke B koji ima pravac tangente na kružnici u tački B, nepoznat smer i nepoznat intezitet; algebarska vrednost a_{BT} može biti pozitivna ili negativna u zavisnosti od toga da li je pretpostavljeni smer vektora $\vec{a}_{BT}$ tačan ili pogrešan.

- $\vec{a}_{BN}$ - vektor normalnog ubrzanja tačke B koji je poznat; intezitet vektora $\vec{a}_{BN}$ je:

$\boxed{a_{BN} = v_B^2/2R} \Rightarrow a_{BN} = \frac{(2R\omega_0)^2}{2R} \Rightarrow \boxed{a_{BN} = 2\omega_0^2 R}$

Kombinovanjem (1) i (2) dobija se jednačina:

$$\vec{a}_{BN} + \vec{a}_{BT} = \vec{a}_{AN} + \cancel{\vec{a}_{AT}}^{\,0} + \vec{a}_{BT}^A + \vec{a}_{BN}^A, \qquad (3)$$

u kojoj su nepoznate algebarske vrednosti vektora $\vec{a}_{BT}$ i $\vec{a}_{BT}^A$.

Projektovanjem leve i desne strane jednačine (3) na osu $A\xi$, a zatim na osu $A\eta$ dobijaju se 2 skalarne jednačine u kojima su nepoznate a_{BT} i a_{BT}^A:

$A\xi$: $a_{BT}\cos 60° + a_{BN}\sin 60 = -a_{BN}^A \Rightarrow a_{BT}\frac{1}{2} = -a_{BN}\frac{\sqrt{3}}{2} - a_{BN}^A \Rightarrow$

$$\boxed{a_{BT} = -3\sqrt{3}R\omega_0^2}$$

$A\eta$: $a_{BT}\sin 60 - a_{BN}\cos 60 = -a_A + a_{BT}^A \Rightarrow a_{BT}\frac{\sqrt{3}}{2} - a_{BN}\frac{1}{2} + a_A = a_{BT}^A$

$$\boxed{a_{BT}^A = -\frac{9}{2}\omega_0^2 R} \quad \boxed{\varepsilon_{AB} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\omega_0^2}$$

Ubrzanje tačke D

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_D &= \vec{a}_C + \vec{a}_{DN}^C + \vec{a}_{DT}^C \\ \vec{a}_C &= \vec{a}_A + \vec{a}_{CN}^A + \vec{a}_{CT}^A \end{aligned}\right\} \quad \vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}_{CN}^A + \vec{a}_{CT}^A + \vec{a}_{DN}^C + \vec{a}_{DT}^C \qquad (4)$$

$a_{CN}^A = \omega_2^2\overline{AC} = \frac{1}{4}\omega_0^2 R$; $a_{DN}^C = \omega_2^2\overline{DC} = \frac{1}{4}\omega_0^2 R$

$a_{CT}^A = \varepsilon_2\overline{AC} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\omega_0^2 R$; $a_{DT}^C = \varepsilon_2\overline{DC} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\omega_0^2 R$

$(4) \Rightarrow a_{D\xi} = -a_{CN}^A - a_{DT}^C \Rightarrow \boxed{a_{D\xi} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4}R\omega^2}$

$a_{D\eta} = -a_A + a_{CT}^A - a_{DN}^C \Rightarrow \boxed{a_{D\eta} = -\frac{3\sqrt{3}+5}{4}R\omega^2}$

Metoda trenutnog pola brzine i metoda trenutnog pola ubrzanja

Koriste se određivanje brzina i ubrzanja tačaka ravne figure, tj. tela koje vrši ravno kretanje u posmatranom, konkretnom trenutku. Ove metode baziraju na kinematskoj i geometrijskoj anali ravne figure za taj trenutak.

Metod trenutnog pola brzine.-

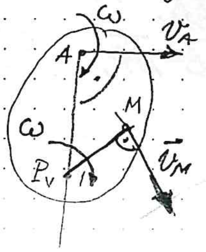
Teorema.- U svakom trenutku u kome je $\omega \neq 0$ postoji jedna i samo jedna tačka ravne figure čija je brzina jednaka nuli. Ta tačka zove se trenutni pol brzina i označa se sa P_V.

Prema teoremi trenutni pol brzina P_V je tačka čija je brzina u posmatranom trenutku jednaka nuli: $\vec{v}_{P_V} = 0$, ali $\vec{a}_{P_V} \neq 0$.

Ako su u posmatranom trenutku poznati brzina tačke A ravne figure, $\vec{v}_A$, i njena ugaona brzina $\omega \neq 0$, tada je položaj tačke P_V u odnosu tačku P_V određen relacijom:

$$\boxed{\overrightarrow{AP_V} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}},$$

Relacija pokazuje da je $\overrightarrow{AP_V}$ u ravni figure (ravni Oxy) i da je $\overrightarrow{AP_V} \perp \vec{v}_A$, a da se smer vektora $\overrightarrow{AP_V}$ poklopa sa smerom vektora koji se dobija kada se vektor $\vec{v}_A$ zaokrene za 90° u smeru ω. Na tako dobijenoj polupravi u tački A, tačka P_V je na rastojanju od tačke A: $\overline{AP_V} = \frac{v_A}{\omega}$.



Brzina bilo koje tačke M ravne figure je tada:

$$\vec{v}_M = \overset{0}{\vec{v}_{P_V}} + \vec{v}_M^{P_V} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_M^{P_V}}; \; i \; \boxed{\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \overrightarrow{P_V M}}$$

Poslednja relacija pokazuje da je: $\vec{v}_M \perp \vec{\omega}$ (leži u ravni figure) i $\vec{v}_M \perp P_V M$; smer vektora $\vec{v}_M$ određen smerom ω; algebarska vrednost (intezitet) vektora $\vec{v}_M$ iznosi: $v_M = \omega \overline{P_V M}$ (dužina $\overline{P_V M}$, rastojanje između M i P_V određeno iz geometrije ravne figure u posmatranom trenutku; tačka P_V ne mora leži u ravni preseka tela i ravni Oxy). Važi: $\frac{v_A}{v_M} = \frac{\overline{AP_V}}{\overline{MP_V}} = \omega$

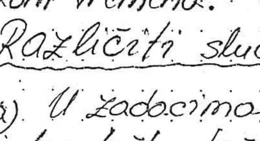
Iz činjenice da je brzina tačke M u posmatranom trenutku određena samo rotacionom komponentom brzine, $\vec{v}_M^{P_V}$, može se izvesti sledeći zaključak.

Raspodela brzina tačaka tela koje vrši ravno kretanje je kao da telo u posmatranom trenutku rotira oko trenutne ose rotacije $P_{V\zeta} = P_{Vz}$, tj. oko ose prolazi kroz tačku P_V i koja je upravna na ravan figure.

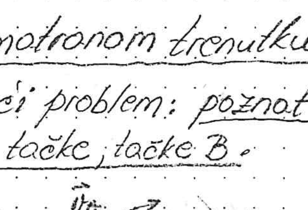
Svakom trenutku odgovara nova osa trenutne rotacije, jer se tačka P_V menja tokom vremena.

Različiti slučajevi određivanja P_V u posmatranom trenutku:-

a). U zadacima najčešće nailazimo na sledeći problem: poznat vektor brzine jedne tačke, tačke A, $\vec{v}_A$, i pravac brzine druge tačke, tačke B.

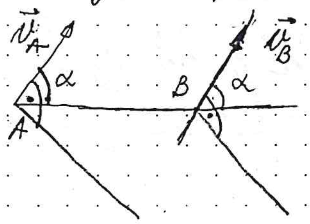


Presek normala na napadne linije vektora $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ određuje P_V $\Longrightarrow$



$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\frac{v_A}{v_B} = \frac{\overline{AP_V}}{\overline{BP_V}} = \omega \\ &\omega = \frac{v_A}{\overline{AP_V}} \\ &v_B = \omega \cdot \overline{BP_V} = v_A \frac{\overline{BP_V}}{\overline{AP_V}} \end{aligned}}$$

Ako je $\vec{v}_A$ paralelno napadnoj liniji vektora $\vec{v}_B$



$\boxed{\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B} \Rightarrow$ normale na napadne linije vektora $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ se seku u beskonačnosti, pa je $\overline{AP_V} = \infty$ što znači da je $\boxed{\omega = \frac{v_A}{\overline{AP_V}} = 0} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \underbrace{\vec{v}_B^{A}}_{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A}$

Ovo je slučaj, tzv., trenutne translacije ravne figure

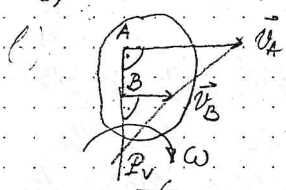
Za nju važi da sve tačke tela imaju jednake iste brzine: $\boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_A}$. Takođe važi: $\boxed{\omega = 0, \text{ ali } \varepsilon \neq 0}$ - za posmatrani trenutak.

b). Poznate brzine 2 tačke ravne figure, A i B, $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$, pri čemu su one upravne na pravu AB: $\vec{v}_A \perp AB$ i $\vec{v}_B \perp AB$. Razlikuju se sledeći slučajevi:

b_1) $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ istog smera, ali $|\vec{v}_A| \neq |\vec{v}_B|$

b_2) $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ istog smera i $|\vec{v}_A| = |\vec{v}_B|$

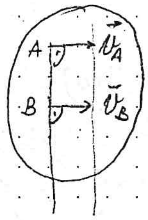
b_3) $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ suprotnog smera



$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\overline{AP_V}}{\overline{BP_V}} = \omega$$

$$\overline{AP_V} = \overline{BP_V} + \overline{AB}$$

b_1)

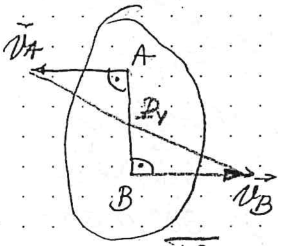


$P_V \Rightarrow \infty$

$\omega = 0$

slučaj trenutne translacije

b_2)

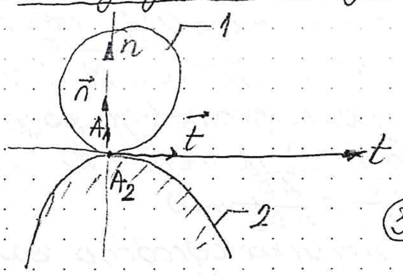


$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\overline{AP_V}}{\overline{BP_V}} = \omega$$

$$\overline{BP_V} = \overline{AB} - \overline{AP_V}$$

b_3)

c) Kotrljanje bez klizanja po nepokretnoj površi



① $\vec{v}_{A_1t} = \vec{v}_{A_2t}$ – uslov kotrljanja bez klizanja

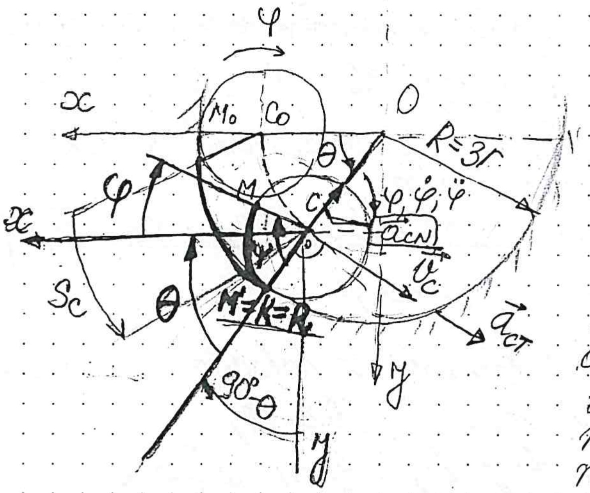
② $\vec{v}_{A_1n} = \vec{v}_{A_2n}$ – uslov da se tela 1 i 2 nalaze u kontaktu

③ $\left.\begin{array}{l}\vec{v}_{A_2} = \vec{v}_{A_2n} + \vec{v}_{A_2t} \\ \vec{v}_{A_2} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{v}_{A_2n} = 0 \\ \vec{v}_{A_2t} = 0\end{array}\right\}$ A_2 tačka tela 2 (nepokretnog)

Zamenom ③ u ① i ② sledi:

$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_{A_1t} = 0 \text{ i } \vec{v}_{A_1n} = 0 \\ \text{i } \vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{A_1t} + \vec{v}_{A_2n}\end{array}\right\}$ $\boxed{\vec{v}_{A_1} = 0}$ – $\boxed{\text{tačka } A_1 \text{ tela 1 predstavlja trenutni pol brzina: } A_1 = P_V}$

3. Disk poluprečnika r kotrlja se bez klizanja po unutrašnjosti nepokretne cilindrične površi poluprečnika $R=3r$. Zakon rotacije diska $\varphi=\frac{\pi}{k^2}t^2$. Odrediti brzinu i ubrzanje one tačke M diska koja u trenutku $t_1=k$ zauzima krajnje desni položaj na disku.



Kotrljanje bez klizanja spada u grupu ravnih kretanja, pa disk vrši istovremenu translaciju u ravni slike (Oxy) i rotaciju oko translatorno pokretne ose koja prolazi kroz trenutni pol translacije i koja je upravna na ravan figure (diska), tj. ravan Oxy. Zakon rotacije diska (tela) $\varphi=\varphi(t)$ oko navedene ose koja je vezana za posmatrano telo ne zavisi od tačke tela čije kretanje reprezentuje translaciju tog tela pri njegovom ravnom kretanju.

U ovom zadatku za trenutni pol translacije biće izabran geometrijski centar diska, tačka C, s obzirom da je trajektorija tačke C poznata. Naime, rastojanje tačke C do tačke dodira diska i cilindra (tačka $K=M'$), $\overline{KM}$, se ne menja tokom kretanja, $\overline{KM}=r$, pa je trajektorija tačke C kružnica poluprečnika: $R_C=\overline{OK}-\overline{KM}=3r-r$, $\boxed{R_C=2r}$, sa centrom u tački O, centrom traga cilindrične površi. Kretanje tačke C je poznato ukoliko je poznat zakon puta tačke C po opisanoj kružnici:

$S_C=S_C(t)$ i $S_C=\overset{\frown}{C_0C}$, (1)

ili zakon promene centralnog ugla θ te kružnice koji odgovara luku kružnice:

$\overset{\frown}{C_0C}=S_C=R_C\cdot\theta \Rightarrow \theta=\frac{S_C(t)}{2r} \Rightarrow \theta=\theta(t)$. (2)

Brzina tačke C ima pravac tangente na trajektoriju putanje i iznosi:

$\boxed{v_C=\dot S_C}$, odnosno, $\boxed{v_C=R_C\dot\theta}$ tj. $\boxed{v_C=2r\dot\theta}$ (3)

S druge strane, pošto tačka C pripada disku koji se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj podlozi i pošto je tačka dodira diska i nepokretne cilindrične površi po kojoj se disk kotrlja bez klizanja, u bilo kom trenutku trenutni pol brzina P_v diska: $K=P_v$ ($\vec{v}_K=\vec{v}_{P_v}=0$), to važi:

$\boxed{v_C=\overline{CP_v}\,\omega}$, (4)

gde je:

$\boxed{\overline{CP_v}(t)=r=const}$ (5)

a ω ugaona brzina diska, tj. $\boxed{\omega=\dot\varphi}$ (6)

S obzirom na (3) i (4) može se uspostaviti veza između zakona rotacije diska $\varphi=\varphi(t)$ i zakona kretanja tačke C, $S_C=S_C(t)$, odnosno $\theta=\theta(t)$:

$$\boxed{R_C\dot{\theta} = \overline{CP_V}\,\dot{\varphi}} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{\overline{CP_V}}{R_C}\dot{\varphi}} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{2}\dot{\varphi} \qquad (7)$$

Integracijom jednačine (7) dobija se zakon kretanja tačke C:

$$\int\limits_{\theta_0=0}^{\theta} d\theta = \int\limits_{\varphi_0=0}^{\varphi} \frac{\overline{CP_V}}{R_C} d\varphi \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\overline{CP_V}}{R_C}\varphi} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{1}{2}\varphi(t)} \quad \boxed{\theta = \frac{r}{R-r}\varphi} \qquad (8)$$

$$S_C = R_C\theta \Rightarrow S_C(t) = \overline{CP_V}\,\varphi(t)$$

Relacija (8) posledica je činjenice (vidi sliku) da važi:
$\boxed{\varphi = \psi - \theta}$, gde je: $\psi = \measuredangle M'CM$, ugao nad lukom kružnice $\widehat{M'M}$ poluprečnika r sa centrom u tački C: $\widehat{M'M} = r\psi$, a koji je, zbog toga što se disk kotrlja bez klizanja, jednak luku kružnice $M_0M' = 3r\theta$ koji bi prebrisala tačka M_0 diska pri čistom klizanju diska po cilindru. Kako je, dakle:
$\boxed{\widehat{M'M} = \widehat{M_0M'}} \Rightarrow r\psi = 3r\theta \Rightarrow \boxed{\psi = 3\theta}$ pa je ugao rotacije $\varphi = \measuredangle(C\xi, \overline{CM})$:
$\varphi = \psi - \theta \Rightarrow \varphi = 3\theta - \theta \Rightarrow \varphi = 2\theta$, odnosno $\theta = \frac{1}{2}\varphi$

Činjenica da između zakona kretanja tačke C, kao pola translacije, i zakona rotacije diska $\varphi = \varphi(t)$ oko ose $C_\zeta = C_z$ postoji veza u obliku (8) ($\theta = \frac{1}{2}\varphi(t)$ ili $S_C = r\varphi(t)$) ima za posledicu da je broj stepeni slobode diska koji se kotrlja po nepokretnoj cilindričnoj podlozi: $n=1$. Ovo znači da je kretanje diska opisano jednom jednačinom, funkcijom i to: ili zakonom rotacije $\varphi = \varphi(t)$, ili zakonom puta tačke C, $S_C = S_C(t)$ $(\theta = \theta(t))$.

Ubrzanje tačke C je: $\vec{a}_C = \vec{a}_{CN} + \vec{a}_{CT}$,

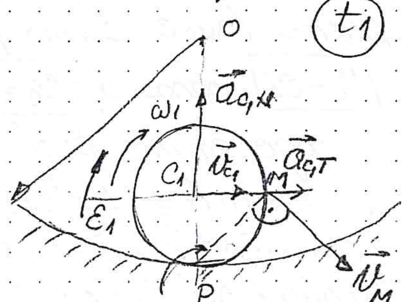
gde je: $\boxed{a_{CN} = \frac{v_C^2}{R_C}} \Rightarrow a_{CN} = \frac{(\overline{CP_V}\,\omega)^2}{R_C} \Rightarrow \boxed{a_{CN} = \frac{(\overline{CP_V})^2}{R_C}\omega^2} \Rightarrow a_{CN} = \frac{1}{2}r\omega^2 \quad (9)$

dok je $\boxed{a_{CT} = \dot{v}_C} \Rightarrow a_{CT} = \frac{d}{dt}(\overline{CP_V}\,\omega)$ i $\overline{CP_V}(t) = r = const \Rightarrow \boxed{a_{CT} = \overline{CP_V}\,\varepsilon} \quad (10)$

odnosno $a_{CT} = r\varepsilon$,

gde je $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ ugaono ubrzanje diska.

U trenutku $t_1 = k$ je: $\varphi_1 = \pi$ i $\theta_1 = \frac{1}{2}\varphi_1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}$, što znači da je centar diska na osi Oy (položaj C_1).



Ugaona brzina i ugaono ubrzanje diska su:
$\omega = \dot{\varphi} = 2\frac{\pi}{k^2}t$ i $\boxed{\omega_1 = \omega(t_1 = k) = 2\frac{\pi}{k}}$

i $\boxed{\varepsilon = \dot{\omega} = 2\frac{\pi}{k^2}}$

Brzina tačke C je:
$v_{C_1} = \overline{CP_{V_1}}\cdot\omega_1 \Rightarrow v_{C_1} = 2\frac{\pi}{k}r$

Brzina tačke M je: $v_M = \overline{MP_{V_1}}\cdot\omega_1 = 2\frac{\pi}{k}r\sqrt{2}$

Ubrzanje tačke C je: $\vec{a}_{C_1} = \vec{a}_{C_1T} + \vec{a}_{C_1N}$, gde je: $\boxed{a_{C_1T}} = \overline{CP_{V_1}}\,\varepsilon_1 = 2\frac{\pi}{k^2}r$

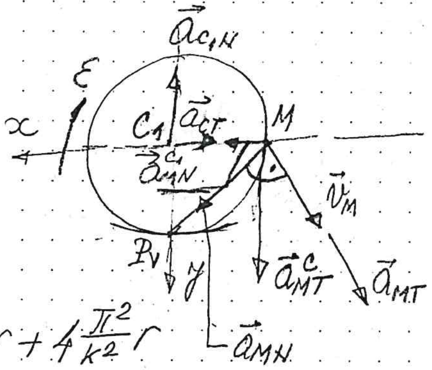
i $\boxed{a_{C_1N}} = \frac{v_{C_1}^2}{2r} = 2\frac{\pi^2}{k^2}r$

Ubrzanje tačke M:

$\vec a_M = \vec a_{C_1} + \vec a_{MN}^{C_1} + \vec a_{MT}^{C_1}$

$a_{MN}^{C_1} = \omega_1^2 \overline{C_1M} = 4\frac{\pi^2}{k^2} r$

$a_{MT}^{C_1} = \varepsilon_1 \overline{C_1M} = 2\frac{\pi}{k^2} r$



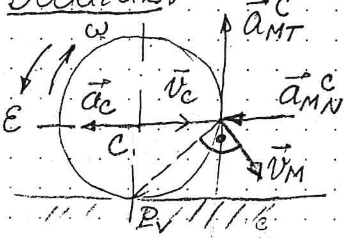
⇓

$a_{Mx} = -a_{C_1T} + a_{MN}^{C_1} = -2\frac{\pi}{k^2}r + 4\frac{\pi^2}{k^2}r$

$a_{My} = -a_{C_1N} + a_{MT}^{C_1} = -2\frac{\pi^2}{k^2}r + 2\frac{\pi}{k^2}r$

Napomena.- Ubrzanje tačke M: $\vec a_M = \vec a_{MT} + \vec a_{MN}$, ne može se odrediti po formulama koje važe za tačku C, zbog toga što $\overline{MP_v} \neq const$, tj. $\overline{MP_v} = \overline{MP_v}(t)$, sledi da je $\boxed{a_{MT} \neq \varepsilon \cdot \overline{MP_v}}$, a zbog toga što P_v nije centar krivine trajektorije tačke M u posmatranom trenutku sledi da je $\boxed{a_{MN} \neq \frac{v_C^2}{\overline{MP_v}}}$. $a_{MN} \neq \omega^2 \overline{MP_v}$

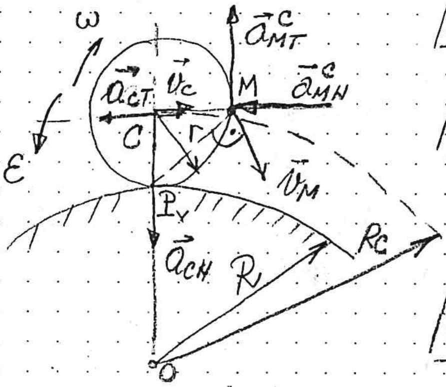
Dodatak.-



$v_C = \omega \overline{CP_v} = \omega r$

$a_C = a_{CT} = \varepsilon \overline{CP_v} = \varepsilon r$

$\vec a_M = \vec a_C + \vec a_{MN}^C + \vec a_{MT}^C$



$\boxed{v_C} = \omega \overline{CP_v} = \omega r$

$v_M = \omega \overline{MP_v} = \omega r\sqrt{2}$

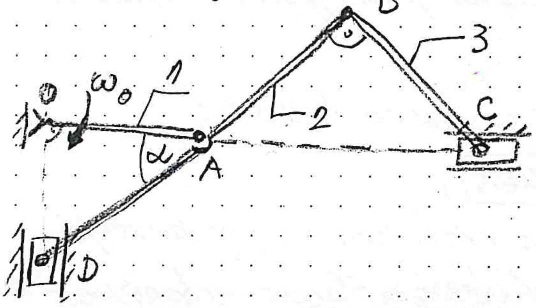
$\boxed{a_{CT}} = \varepsilon \overline{CP_v} = \varepsilon r$

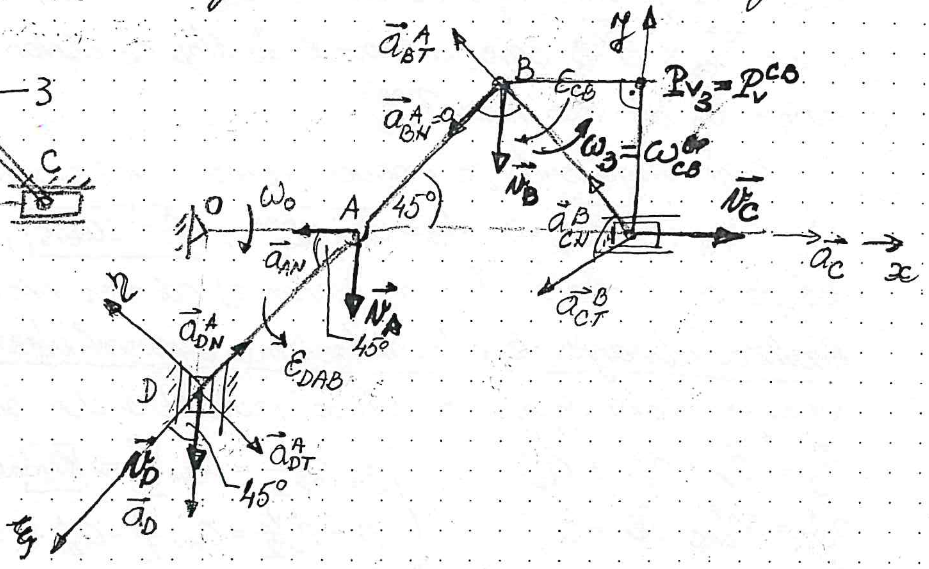
$\boxed{a_{CN} = \frac{v_C^2}{R_C}}$, $R_C = R + r$

$\vec a_M = \vec a_C + \vec a_{MN}^C + \vec a_{MT}^C$

$\boxed{\theta = \frac{r}{R+r}\varphi}$

(4) Za dati mehanizam (3 štapa i 2 klizača) u datom položaju ($\alpha=45°$) odrediti brzinu i ubrzanje klizača C. Veze u tačkama O, A, B, C i D su zglobne, pri čemu je: $\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{CB}=R_0$. Krivaja OA obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω_0





$\omega_{OA}=\omega_0=const \Rightarrow \varepsilon_{OA}=\dot{\omega}_{OA}=0 \Rightarrow v_A=\omega_0 R$, $\vec{a}_A=\vec{a}_{AT}+\vec{a}_{AN}$; $a_{AT}=\varepsilon_{OA}\cdot R=0$

$a_{AN}=\omega_{OA}^2\cdot R=\omega_0^2 R$

<u>Analiza brzina tačaka štapa DAB i njegova ugaona brzina.</u> – Brzinu točke A treba povezati sa brzinom tačke D štapa, s obzirom da je pravac brzine tačke D štapa poznat. U tački D štapa zglobno je vezan klizač koji se kreće u pravolinijskim vođicama (Pravac brzine tačke B, kao drugog kraja štapa DAB je nepoznat jer je za nju zglobno vezan štap CD koji vrši ravno kretanje). Kako je:

$\vec{v}_D \parallel \vec{v}_A$ sledi da se normale na napadne linije brzina $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_D$ seku u beskonačnosti pa je i trenutni pol brzina štapa DAB P_V^{ABD} u beskonačnosti, tj važi:

$\overline{DP_V^{DAB}} \to \infty$, $\overline{AP_V^{DAB}} \to \infty$ i $\omega_{DAB}=\dfrac{v_A}{\overline{AP_V^{ADB}}} \Rightarrow \boxed{\omega_{DAB}=0}$ ali $\boxed{\varepsilon_{DAB}\neq 0}$

Štap DAB vrši <u>trenutnu translaciju</u>, što znači da u posmatranom trenutku vremena sve tačke ovog štapa imaju jednake brzine:

$\boxed{\vec{v}_D=\vec{v}_A=\vec{v}_B} \Rightarrow \boxed{v_D=v_B=\omega_0 R}$, ali $\boxed{\vec{a}_D\neq\vec{a}_A}$ i $\boxed{\vec{a}_B\neq\vec{a}_A}$

<u>Analiza brzina (tačaka) štapa BC i njegova ugaona brzina.</u> – Brzina tačke C štapa BC, $\vec{v}_C$, poznatog je pravca, jer je za nju zglobno vezan klizač koji se kreće u pravolinijskim vođicama. Trenutni pol brzina ovog štapa, P_V^{CB}, nalazi se u presecu normala na napadne linije brzina $\vec{v}_B$ i $\vec{v}_C$. Rastojanje tačke P_V^{CB} se određuje iz geometrijskih odnosa na slici, a koji važe samo za posmatrani trenutak, tj. za dati položaj mehanizma. Kako je $\triangle CBP_V^{CB}$ jednakokraki pravougli, to je:

$\overline{BP_V^{CB}}=\overline{CP^{CB}}=\overline{BC}\cos 45=R\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

S obzirom da je raspored brzina na štapu CB u posmatranom trenutku kao da štap CB vrši rotaciju oko ose kroz tačku P_v^{CB}, a koja je upravna na ravan kretanja štapa CB, to je:

$$v_B = \omega_{CB} \cdot \overline{CP_v^{CB}} \Rightarrow \omega_{CB} = \frac{v_B}{\overline{CP_v^{CB}}} \Rightarrow \omega_{CB} = \frac{R\omega_0}{R\sqrt{2}/2} \Rightarrow \boxed{\omega_{CB} = \omega_0\sqrt{2}}\ ,$$

pri čemu je **smer ugaone brzine ω_{CB}** određen pravilom desnog zavrtnja ($\vec{v}_B = \vec{\omega}_{CB} \times \overrightarrow{P_v^{CB}B}$, **smer u kome bi se štap CB obrtao pod "dejstvom" vektora brzine $\vec{v}_B$ oko ose kroz P_v^{CB}**)

Na bazi ovoga sada je moguće odrediti vektor brzine tačke C:

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_{CB} \times \overrightarrow{P_v^{CB}C} \Rightarrow v_C = \omega_{CB}\,\overline{CP_v^{CB}}\ ;\ \boxed{v_C = 2\omega_0 R}\ ,$$

dok je smer vektora $\vec{v}_C$ (kao i pravac) određen pravilom desnog zavrtnja.

<u>Analiza ubrzanja tačaka mehanizma i ugaonih ubrzanja članova mehanizma</u>.- Analiza ubrzanja tačaka štapa DAB prati tok (redosled) analize brzina njegovih tačaka.

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}_{DN}^A + \vec{a}_{DT}^A$$
$$a_{DN}^A = \omega_{DAB}^2 \cdot \overline{AD} = 0$$
$$a_{DT}^A = \varepsilon_{DAC} \cdot \overline{AD}\ ,$$
$\varepsilon_{DAC} = ?$ – smer se pretpostavlja
$$\overline{AD} = R\sqrt{2}$$

$$\xi:\ a_D\frac{\sqrt{2}}{2} = a_{AN}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{a_D} = a_{AN} = \boxed{\omega_0^2 R}$$
$$\eta:\ -a_D\frac{\sqrt{2}}{2} = a_{AN}\frac{\sqrt{2}}{2} - a_{DT}^A \Rightarrow a_{DT}^A = (a_{AN} + a_D)\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$a_{DT}^A = \sqrt{2}\,\omega_0^2 R$$
$$\boxed{\varepsilon_{DAC} = \omega_0^2}$$

Ubrzanje tačke B štapa DAB je:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A,\ \text{gde je}\ \boxed{a_{BN}^A = \omega_{DAB}^2 \cdot \overline{AB} = 0}\ \text{i}\ \boxed{a_{BT}^A} = \varepsilon_{DAB} \cdot \overline{AB} = \boxed{\omega_0^2 R}$$ (obratiti pažnju na smer vek. $\vec{a}_{BT}^A$)

Desna strana gornje jednačine je poznata, ali je vektor ubrzanja tačke B, $\vec{a}_B$, nepoznat, tj. nepoznate su projekcije $a_{B\xi}$ i $a_{B\eta}$ na ose KS $B\xi\eta$ ($D\xi\eta$):

$$a_{B\xi} = a_{AN}\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{ i }\ a_{B\eta} = a_{AN}\frac{\sqrt{2}}{2} + a_{BT}^A,$$

Ove veličine nije nužno odrediti, jer se ne traži ubrzanje tačke B, već se može odmah preći na određivanje **ubrzanja tačke C štapa CB i ugaonog ubrzanja tog štapa**, ε_{CB}. Smer ubrzanja tačke C, $\vec{a}_C$, i ugaonog ubrzanja ε_{CB} se pretpostavlja.

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CN}^B + \vec{a}_{CT}^B = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{a}_{BN}^A}_{0} + \vec{a}_{BT}^A + \vec{a}_{CN}^B + \vec{a}_{CT}^B$$
$$\boxed{a_{CN}^B} = \omega_{CB}^2 \cdot \overline{CB} = \boxed{2\omega_0^2 R}$$
$$a_{CT}^B = \varepsilon_{CB} \cdot \overline{CB} = \varepsilon_{CB} R$$

U ovoj jednačini nepoznate su algebarska vrednost vektora $\vec{a}_C$ i $\vec{a}_{CT}^B$ (nepoznato ε_{CB}).

Levu i desnu stranu (gornje jednačine) projektovaćemo na ose KS Cxy:

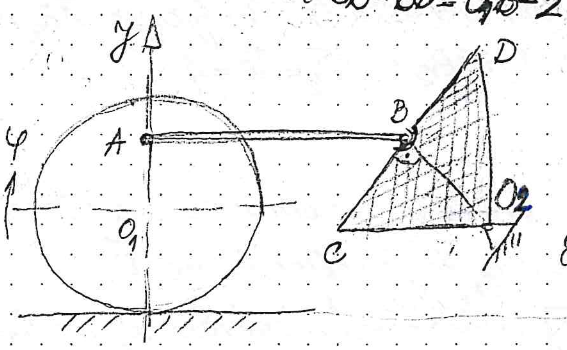
$$Cy:\ 0 = a_{BT}^A\frac{\sqrt{2}}{2} + a_{CN}^B\frac{\sqrt{2}}{2} - a_{CT}^B\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{a_{CT}^B} = a_{BT}^A + a_{CN}^B = \boxed{3\omega_0^2 R}$$

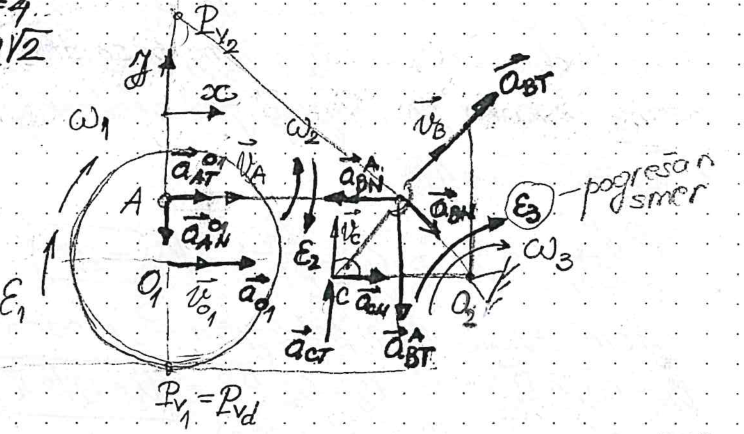
$$\text{i } Cx:\ a_C = -a_{AN} - a_{BT}^A\frac{\sqrt{2}}{2} - a_{CN}^B\frac{\sqrt{2}}{2} - a_{CT}^B\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_C = -a_{AN} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(a_{BT}^A + a_{CN}^B + a_{CT}^B\right)$$

$$a_C = -\omega_0^2 R - 3\sqrt{2}\,\omega_0^2 R;\ \boxed{a_C = -(1+3\sqrt{2})\,\omega_0^2 R}$$

?

(4) Za mehanizam (disk, štap i jednokokraka pravougaona ploča) u datom položaju (u trenutku $t_1=1$) odrediti brzinu i ubrzanje tačke C ploče. Disk poluprečnika $R=5$, kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj ravnoj podlozi po zakonu $\varphi=\frac{\pi t^2}{2}$. Dato: $\overline{O_1A}=3, \overline{AB}=4$ i $\overline{CB}=\overline{BD}=\overline{O_2B}=2\sqrt{2}$





Kretanje diska – kotrljanje bez klizanja; zadat samo zakon rotacije $\varphi=\frac{\pi t^2}{2}$ oko ose upravne na ravan slike u tački koja se usvoji za trenutni pol translacije **(kotrljanje bez klizanja je kretanje sa jednim stepenom slobode $n=1$*)**. U trenutku $t_1=1$, u kome je prikaz položaj mehanizma u ravni slike, ugaona brzina $\omega_d(t_1)=\omega_1$ i ugaono ubrzanje $\varepsilon_d(t_1)=\varepsilon_1$ diska su:

$\omega_d=\dot\varphi=\pi t \Rightarrow \omega_d(t_1=1)=\omega_1 \Rightarrow \boxed{\omega_1=\pi}$

$\varepsilon_d=\dot\omega_d=\pi \Rightarrow \varepsilon_d(t_1=1)=\varepsilon_1 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1=\pi}$

Brzina centra O diska je: $\vec v_O=\vec\omega_d\times\overline{P_{vd}O} \xrightarrow{t_1=1} v_{O_1}=\omega_1\overline{P_{v_1}O_1}=\omega_1 R$, $\boxed{v_{O_1}=5\pi}$, $\vec v_O\perp\overline{OP}$

Pošto je $\overline{P_{vd}O}=R=const \Rightarrow a_O=\dot v_O=\frac{d}{dt}(\omega_d\overline{OP_{vd}}) \Rightarrow \boxed{a_O=a_{OT}=\varepsilon_d\cdot\overline{OP_{vd}}} \Rightarrow \boxed{\vec a_O=\vec\varepsilon_d\times\overline{P_{vd}O}}$

Za $t_1=1 \Rightarrow a_{O_1}=a_{OT_1}=\varepsilon_1\cdot\overline{O_1P_{v_1}}=\varepsilon_1 R$ i $\boxed{a_{O_1}=5\pi}$ $\vec a_{O_1}\perp\overline{O_1P_{v_1}}$ i smer određen sa ε_1

Brzina tačke A diska je: $\vec v_A=\vec\omega_1\times\overline{P_{v_1}A} \Rightarrow v_A=\omega_1\overline{AP_{v_1}}$, $\boxed{v_A=8\pi}$ $(\vec v_A\perp\overline{AP_{v_1}})$

$(\overline{P_{v_d}A}\neq const \Rightarrow \vec a_A\neq\vec\varepsilon_1\times\overline{P_{v_1}A}$ i trajektorija tačke A cikloida)

Ubrzanje tačke A diska, zbog gornje relacije mora se odrediti preko ubrzanja centra O diska:

$$\left.\begin{aligned}\vec a_A&=\vec a_{O_1}+\vec a_{AN}^{O_1}+\vec a_{AT}^{O_1}\\ a_{AN}^{O_1}&=\omega_1^2\cdot\overline{O_1A}=3\pi^2\\ a_{AT}^{O_1}&=\varepsilon_1\cdot\overline{O_1A}=3\pi\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}x:&\ a_{Ax}=a_{O_1}+a_{AT}^{O_1} \Rightarrow \boxed{a_{Ax}=8\pi}\\ y:&\ a_{Ay}=-a_{AN}^{O_1} \Rightarrow \boxed{a_{Ay}=-3\pi^2}\end{aligned}$$

Pošto je komponenta ubrzanja tačke A, $\vec a_{Ax}=a_{Ax}\vec i=8\pi\vec i$ kolinearna sa $\vec v_A$, to ona predstavlja tangentno ubrzanje tačke A, tj. $a_{AT}=a_{Ax}=8\pi$.

Komponenta ubrzanja tačke A, $\vec a_{Ay}=a_{Ay}\vec j$ upravna je na $\vec v_A$ i predstavlja normalno ubrzanje $\vec a_{AN}$ tačke A: $a_{AN}=|a_{Ay}|$ tj. $a_{AN}=3\pi^2$. Poluprečnik krivine trajektorije tačke A u posmatranom trenutku $t_1=1$ je:

$R_{k_A}=\frac{v_A^2}{a_{AN}} \Rightarrow R_{k_A}=\frac{(8\pi)^2}{3\pi^2}=\frac{64}{3}$ $(R_k\neq\overline{AP_v})$

* Razlog za to je: 1.– putanja tačke O (centar diska) je prava linija ($y_O=R=const$), a i 2.– kotrljanje je bez klizanja, tačka dodira diska i podloge je P_v.

Brzine tačaka mehanizma i ugaone brzine štapa AB i ploče.—

Brzina tačke B štapa AB koji vrši ravno kretanje biće određena na iz činjenice da ona pripada ploči koja rotira oko nepokretne ose O_1z, pa je:

$\vec{v}_B = \vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{O_1B} \Rightarrow v_B = \omega_3 \overline{O_1B}$, $\vec{v}_B \perp O_1B$. (1)

Trenutni pol brzina štapa AB, P_{V_2}, nalazi se u preseku normala na napadne linije vektora brzina $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ u posmatranom trenutku t_1. Rastojanja $\overline{AP_{V_2}}$ i $\overline{BP_{V_2}}$ određuju se iz pravouglog jednakokrakog ΔABP_{V_2}: $\overline{AP_{V_2}} = \overline{AB} = 4$ i $\overline{BP_{V_2}} = \overline{AB}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Kako je:

$\vec{v}_A = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{P_{V_2}A} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_A}{\overline{AP_{V_2}}} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = 2\pi}$, pri čemu je smer ω_2 određenom smerom brzine v_A i položajem P_{V_2} u odnosu A, to je vektor brzine $\vec{v}_B$:

$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{P_{V_2}B}$ i $v_B = \omega_2 \overline{P_{V_2}B} \Rightarrow \boxed{v_B = 8\sqrt{2}\pi}$ (smer određen smerom ω_2 i položajem B u odnosu na P_{V_2}; $\vec{v}_B \perp P_{V_2}B$).

Iz (1) sledi odlje da je ugaona brzina ploče: $\omega_3 = \frac{v_B}{\overline{O_1B}} \Rightarrow \boxed{\omega_3 = 4\pi}$ sa smerom kao na slici. Brzina tačke C ploče je:

$\vec{v}_C = \vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{O_2C} \Rightarrow v_C = \omega_3 \overline{O_2C} \Rightarrow \boxed{v_C = 16\pi}$, $\vec{v}_C \perp O_2C$ sa smerom kao na slici; $\overline{O_2C} = 4$

Ubrzanje tačaka mehanizma (metoda rastavljanja) i ugaona ubrzanja štapa AB i ploče

Ubrzanje tačke B štapa biće:

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^{A} + \vec{a}_{BT}^{A}$ (2)

$\boxed{a_{BN}^{A}} = \omega_2^2 \cdot \overline{AB} = \boxed{16\pi^2}$

$a_{BT}^{A} = \varepsilon_2 \cdot \overline{AB} = 4\varepsilon_2$ (smer ε_2 ili smer $\vec{a}_{BT}^{A}$ pretpostaviti)

pri čemu je ubrzanje tačke B kao tačke ploče koja rotira oko nepokretne ose O_1z:

$\vec{a}_B = \vec{a}_{BT} + \vec{a}_{BH}$, (3)

gde je: $\boxed{a_{BT}} = \varepsilon_3 \overline{O_2B} = 2\sqrt{2}\varepsilon_3$ (smer ε_3 ili smer vektora $\vec{a}_{BT}$ pretpostaviti) i

$\boxed{a_{BN}} = \omega_3^2 \overline{O_2B} = \boxed{32\sqrt{2}\pi^2}$

Prema (2) i (3) je:

$\boxed{\vec{a}_{BT}} + \vec{a}_{BN} = \vec{a}_A + \boxed{\vec{a}_{BT}^{A}} + \vec{a}_{BN}^{A}$ (4)

U jed. (4) nepoznate algebarske vrednosti vektora $\vec{a}_{BT}^{A}$ i $\vec{a}_{BT}$, jer su nepoznata ugaona ubrzanja ε_2 i ε_3. Projektovanjem leve i desne strane jed. (4) na osu Ox dobija se:

x: $\boxed{(a_{BT} + a_{BN})\frac{\sqrt{2}}{2} = a_{Ax} - a_{BN}^{A}} \Rightarrow \boxed{a_{BT}} = 8\pi(1-6\pi)\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_3} = 4\pi(1-6\pi)$

(levu i desnu stranu jed. (4) nećemo projektovati na osu y, s obzirom na činjenicu da se ugaono ubrzanje ε_2 štapa ne traži)

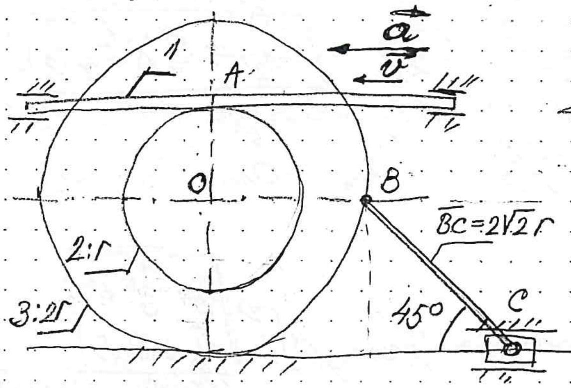
Ubrzanje tačke C ploče je:

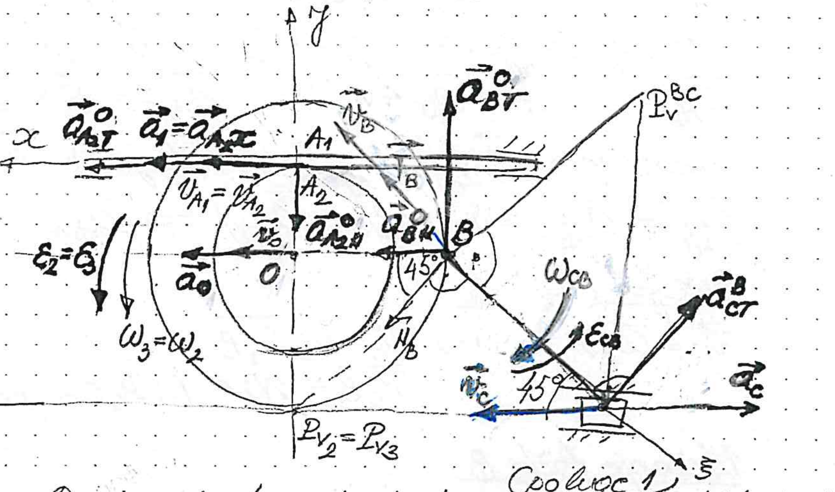
$\vec{a}_C = \vec{a}_{CT} + \vec{a}_{CH}$

$\boxed{a_{CT}} = \varepsilon_3 \cdot \overline{O_2C} = \boxed{16\pi(1-6\pi)}$ (algebarska vrednost $\vec{a}_{CT}$)

$\boxed{a_{CN}} = \omega_3^2 \cdot \overline{O_2C} = \boxed{64\pi^2}$

(5) Dati mehanizam sastoji se od poluge 1, zupčanika 2 poluprečnika r, čvrsto vezanog za točak 3 poluprečnika $2r$ koji se kotrlja bez klizanja po ravnoj podlozi, poluge BC i klizača C. Ako je zupčasta poluga u toku kretanja paralelna ravnoj podlozi i se u položaju prikazanom na slici kreće u zadatom smeru brzinom intenziteta v i ubrzanjem v^2/r, naći brzinu i ubrzanje klizača C.





Poluga 1 vrši translatorno kretanje. Brzina i ubrzanje tačke A_1 koja je u kontaktu sa tačkom A_2 zupčanika 2 na mestu A u posmatranom trenutku ($A_1=A_2=A$) je:
$\vec{v}_{A_1}=v\vec{i}$; $\vec{a}_{A_1}=a\vec{i}$

Zupčanik 2 zajedno sa točkom 3 vrši ravno kretanje, kotrljanje bez klizanja po nepokretnoj ravnoj podlozi, pa je tačka dodira tela 3 sa podlogom trenutni pol brzina: $P_{V_2}=P_{V_3}$. Brzina tačke A_2 je: $v_{A_2}=\omega_2\cdot\overline{AP_{V_2}}=3r\omega_2$ i $\vec{v}_{A_2}=3r\omega_2\vec{i}$, gde je $\omega_2=\omega_3$ ugaona brzina tela 2 i 3, čiji je intenzitet nepoznat, ali čiji je smer određen ~~iz~~ činjenice da između poluge i tela 2 na mestu A nema proklizanja i da brzine kontaktnih tačaka A_1 i A_2, $\vec{v}_{A_1}$ i $\vec{v}_{A_2}$, imaju pravac zajedničke tangente na konturne linije tela 1 i 2 u tački A (osa Ax), tako da važi:

$$\left.\begin{array}{l} v_{A_1x}=v_{A_2x} \text{ i } v_{A_1}=v_{A_2} \\ \text{i } \vec{v}_{A_1}=\vec{v}_{A_2}=\vec{v}_A \end{array}\right\} \Rightarrow v=3r\omega_2 \Rightarrow \boxed{\omega_2=\frac{v}{3r}}$$, smer ω_2 određen iz relacije $v\vec{i}=\vec{\omega}_2\times\overrightarrow{P_{V_2}A_2}$

Ubrzanje tačke A_2 je određeno relacijom:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_{A_2}=\vec{a}_O+\vec{a}^O_{A_2N}+\vec{a}^O_{A_2T} \\ a_O=\varepsilon_2\overline{OP_{V_2}}=2r\varepsilon_2 \text{ , smer } \varepsilon_2 \text{ se pretpostavlja} \\ a^O_{A_2T}=\varepsilon_2\overline{OA_2}=r\varepsilon_2 \\ \boxed{a^O_{A_2N}}=\omega_2^2\cdot\overline{OA_2}=\boxed{\frac{v^2}{9r}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{a_{A_2x}}=a_O+a^O_{A_2T}=\boxed{3r\varepsilon_2} \\ \boxed{a_{A_2y}}=-a^O_{A_2N}=\boxed{-\frac{v^2}{9r}} \end{array}$$

Komponenta ubrzanja $a_{2x}\vec{i}$ predstavlja vektor tangentnog ubrzanja, tj.: $\vec{a}_{A_2T}=a_{2x}\vec{i}$ jer ta komponenta ubrzanja $\vec{a}_{A_2}$ tačke A_2 ima pravac njene brzine, tj.: $a_{A_2T} = a_{A_2x} = 3r\varepsilon_2$.

Tangentno ubrzanje tačke A_2 je, s druge strane, jednako ubrzanju tačke A_1 (trajektorija tačke A_1 - prava linija), jer važi:

$v_{A_1} = v_{A_2} \Rightarrow \dot{v}_{A_1} = \dot{v}_{A_2} \Rightarrow a_{A_1} = a_{2T}$,

odakle je: $a = 3r\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = a/3r \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = \frac{v^2}{3r^2}}$

smer u kome bi se telo 2 obrtalo pod "dejstvom" vektora $\vec{a}_{A_2T}$

Smer ugaonog ubrzanja ε_2 određen je vektorskom relacijom:

$\vec{a}_{A_2x} = \vec{a}_{A_2T} = \vec{a}_o + \vec{a}_{A_2}^{o} \Rightarrow \vec{a}_{A_2T} = \vec{\varepsilon}_2 \times (\overrightarrow{P_{V_2}O} + \overrightarrow{OA_2}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{A_2T} = \vec{\varepsilon}_2 \times \overrightarrow{P_{V_2}A_2}}$.

Komponenta $\vec{a}_{A_2y} = a_{2y}\vec{j}$ predstavlja vektor normalnog ubrzanja tačke A_2:

$\vec{a}_{A_2y} = \vec{a}_{A_2N} \Rightarrow a_{A_2N} = |a_{A_2y}| \Rightarrow a_{A_2N} = v^2/9r$ ($a_{A_2N} \neq a_{A_1N}$, $a_{A_1N} = 0$)

Brzina tačke B

$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{P_{V_2}B} \Rightarrow v_B = \omega_2 \overline{P_{V_2}B}$

$\overline{P_{V_2}B} = 2\sqrt{2}r$ ($\Delta P_{V_2}OB$ - jednakokraki pravougli) $\Bigg\} \Rightarrow \boxed{v_B = \frac{2\sqrt{2}}{3}v}$, $\boxed{\vec{v}_B \perp \overline{P_{V_2}B}}$ (pravac štapa BC) $\measuredangle(A_2x, \vec{v}_B) = 135^\circ$

Ubrzanje tačke B

Ubrzanje tačke B kao tačke tela koje vrši ravno kretanje, a u odnosu na ubrzanje tačke O_1 kao pol translacije tog tela (za pol translacije tog tela može biti izabrana i tačka A_2 jer je i njeno ubrzanje u ovom zadatku poznato), biće:

$\vec{a}_B = \vec{a}_{o_1} + \vec{a}_{BN}^{o_1} + \vec{a}_{BT}^{o_1}$, $\quad a_{Bx} = a_{o_1} + a_{BN}^{o_1}$, $a_{By} = a_{BT}^{o_1}$ $\Big\}$ poznato ubrzanje $\vec{a}_B = \{a_{Bx}, a_{By}\}$

$\boxed{a_{BN}^{o_1}} = \omega_2^2 \overline{O_1B} = \boxed{\frac{2}{9}\frac{v^2}{r}}$ $\quad a_{Bx} = \frac{8}{9}\frac{v^2}{r}$ i $a_{By} = \frac{2}{3}\frac{v^2}{r}$

$\boxed{a_{BT}^{o_1}} \overset{||}{=} \varepsilon_2 \overline{O_1B} = \boxed{\frac{2}{3}\frac{v^2}{r}}$ i $\boxed{a_{o_1}} = 2r\varepsilon_2 = \frac{2}{3}\frac{v^2}{r}$

Napomena.- Tangentno ubrzanje $a_{BT} = \vec{a}_B \cdot \vec{T}_B$, gde je $\vec{T}_B$ ort tangente na trajektoriju tačke B u posmatranom trenutku (vektor kolinearan sa vektorom brzine tačke B, $\vec{v}_B$), je:

$a_{BT} = (\vec{a}_{Bx} + \vec{a}_{By}) \cdot \vec{T}_B = -a_{Bx}\frac{\sqrt{2}}{2} - a_{By}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{a_{BT} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(a_{o_1} + a_{BN}^{o_1} + a_{BT}^{o_1})}$ $(\vec{a}_{BT} \neq \vec{\varepsilon}_2 \times \overrightarrow{P_{V_2}O_1})$ $\boxed{a_{BT} = -\frac{7\sqrt{2}}{9}\frac{v^2}{r}}$

Normalno ubrzanje tačke B, $a_{BN} = \vec{a}_B \cdot \vec{N}_B$, gde je $\vec{N}_B$ ort glavne normale na trajektoriju tačke B u posmatranom trenutku je:

$a_{BN} = \vec{a}_B \cdot \vec{N}_B = (\vec{a}_{Bx} + \vec{a}_{By}) \cdot \vec{N}_B = (a_{o_1} + a_{BN}^{o_1})\frac{\sqrt{2}}{2} - a_{BT}^{o_1}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\boxed{a_{BN} = (a_{o_1} + a_{BN}^{o_1} - a_{BT}^{o_1})\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow a_{BN} = \frac{\sqrt{2}}{9}\frac{v^2}{r}$ $(a_{BN} \neq \omega_2^2 \overline{BP_{V_2}})$

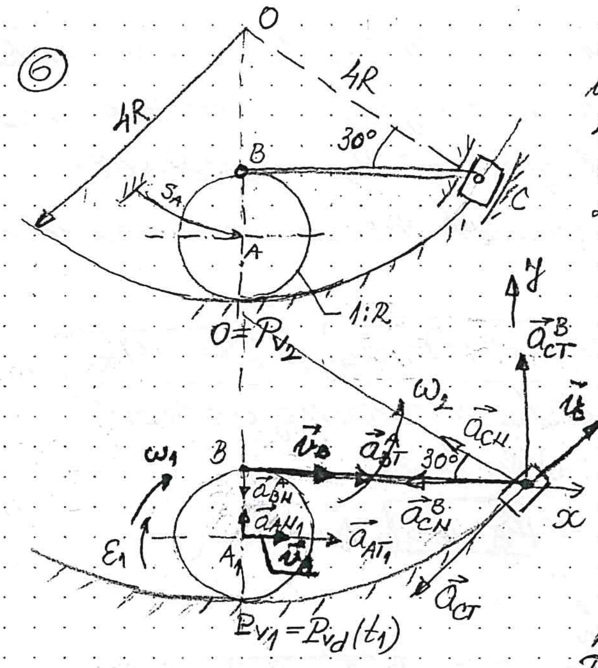
Brzina tačke C i ugaona brzina štapa BC - Pravac vektora brzine tačke C na klizaču, $\vec{v}_C$, je pravac vođica, pa se trenutni pol brzina P_V^{BC} štapa BC koji vrši ravno kretanje, nalazi u preseku normala na pravac te brzine i pravac poznatog vektora brzine njegovog drugog kraja B, $\vec{v}_B$. Kako je: $\overline{BP_V^{BC}} = \overline{BC}$ i $\overline{CP_V^{BC}} = \overline{CB}\sqrt{2}$ (ΔBCP_V^{BC} - jednakokraki pravougli trougao), to je: $\overline{BP_V^{BC}} = 2\sqrt{2}r$ i $\overline{CP_V^{BC}} = 4r$

$\omega_{BC} = \frac{v_B}{\overline{BP_V^{BC}}} \Rightarrow \boxed{\omega_{BC} = \frac{v}{3r}}$ i $v_C = \omega_{BC} \cdot \overline{CP_V^{BC}} \Rightarrow \boxed{v_C = \frac{4}{3}v}$

Ubrzanje tačke C

$\boxed{\vec{a}_C} = \vec{a}_B + \vec{a}_{CN}^{B} + \vec{a}_{CT}^{B} = \boxed{(\vec{a}_o + \vec{a}_{BN}^{o} + \vec{a}_{BT}^{o}) + \vec{a}_{CN}^{B} + \vec{a}_{CT}^{B}}$ gde je $\boxed{a_{CN}^{B}} = \omega_{CB}^2 \cdot \overline{CB} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{9}\frac{v^2}{r}}$

ξ: $a_C\frac{\sqrt{2}}{2} = -(a_o + a_{BN}^{o} + a_{BT}^{o})\frac{\sqrt{2}}{2} - a_{CN}^{B}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{a_C = -2v^2/r}$



Disk poluprečnika $R=0{,}3$ kotrlja se bez klizanja po unutrašnjosti nepokretnog cilindra poluprečnika $4R$. Štap BC zglobno je vezan jednim svojim krajem za tačku B diska, a drugim krajem za klizač C, na način prikazan slikom. Središte A diska kreće se po zakonu: $s_A(t) = 0{,}3e^{t-1}$. Odrediti intezitet brzine i ubrzanje klizača C u trenutku $t_1 = 1$.

Pošto su disk i cilindar po kome se disk kotrlja bez klizanja, kruta tela, to se rastojanje centra diska A od tačke dodira diska i cilindra ne menja u toku vremena i iznosi R. Trajektorija tačke A je zbog toga kružnica poluprečnika $R_{KA} = R_1 - R \Rightarrow R_{KA} = 4R - R = 3R$, sa centrom u tački O. Zakon puta tačke A po toj kružnici je: $s_A = s_A(t) = 0{,}3e^{t-1}$. Brzina tačke A je: $v_A = \dot{s}_A = 0{,}3e^{t-1}$; a vektor brzine je tangentan na tu kružnicu. Ubrzanje $\vec{a}_A$ tačke A je: $\vec{a}_A = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{AN}$, gde je:

$$a_{AT} = \dot{v}_A = 0{,}3e^{t-1} \quad i \quad a_{AN} = \frac{v_A^2}{R_{KA}} \Rightarrow a_{AN} = \frac{(0{,}3e^{t-1})^2}{3R}.$$

U trenutku $t_1 = 1$, kada mehanizam zauzima položaj prikazan na slici, ove veličine iznose:

$$\boxed{v_{A_1} = v_A(t_1=1) = 0{,}3}$$

$$\boxed{a_{AT_1} = a_{AT}(t_1=1) = 0{,}3} \quad i \quad a_{AN_1} = \frac{(0{,}3)^2}{3 \cdot 0{,}3} \Rightarrow a_{AN_1} = 0{,}1$$

Pošto se disk kotrlja bez klizanja po nepokretnoj cilindričnoj podlozi, tačka dodira diska i podloge je trenutni pol brzina diska, P_{Vd}, u bilo kom trenutku. To znači da je brzina tačke A diska određena izrazom:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_d \times \overrightarrow{P_{Vd}A} \Rightarrow v_A = \omega_d \cdot \overline{P_{Vd}A}$$

pa je ugaona brzina diska ω_d: $\omega_d = v_A / \overline{AP_{Vd}}$

Vodeći računa o tome se da se tokom kretanja diska rastojanje tačke A do tačke dodira diska i konturne linije cilindra u ravni slike, ne menja, to je: $\overline{AP_{Vd}} = R = const$, pa je:

$$v_A = \omega_d(t) \cdot \overline{AP_{Vd}} \quad i \quad \dot{v}_A = \dot{\omega}_d \cdot \overline{AP_{Vd}} \Rightarrow \boxed{a_{AT} = \varepsilon_d \cdot \overline{AP_{Vd}}},$$

odnosno, $\boxed{\vec{a}_{AT} = \vec{\varepsilon}_d \times \overrightarrow{P_{Vd}A}}$ u posmatranom trenutku

Označavajući u trenutku $t_1 = 1$ ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje diska sa: $\omega_1 = \omega_d(t_1=1)$ i $\varepsilon_1 = \varepsilon_d(t_1=1)$, a trenutni pol brzina sa $P_{V_1} = P_{Vd}(t_1)$, gornje formule nam omogućavaju da odredimo ω_1 i ε_1 a za poznate vrednosti brzine i tangentnog ubrzanja, v_{A_1} i a_{AT_1}, centra diska u posmatranom trenutku t_1:

$$\vec{v}_{A_1} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{P_{V_1}A_1} \Rightarrow v_{A_1} = \omega_1 R \Rightarrow \omega_1 = \frac{v_{A_1}}{R} \Rightarrow \boxed{\omega_1 = 1}$$

$$i \quad \vec{a}_{AT_1} = \vec{\varepsilon}_1 \times \overrightarrow{P_{V_1}A_1} \Rightarrow a_{AT_1} = \varepsilon_1 R \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{a_{AT_1}}{R} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = 1}$$

Smer ugaone brzine ω_1 određen je smerom brzine $\vec{v}_{A_1}$, a smer ugaonog ubrzanja ε_1 smerom tangentnog ubrzanja $\vec{a}_{AT_1}$

Kotrljanje bez klizanja diska po nepokretnoj cilindričnoj podlozi je ravno kretanje tela sa jednim stepenom slobode: $n=1$, s obzirom na činjenicu da se iz zakona puta centra diska po kružnoj liniji putanje, $S_A=S_A(t)$ može odrediti i zakon rotacije diska $\varphi=\varphi(t)$ oko translatorno pokretne ose upravne na ravan diska u polu translacije, a po formuli:

$v_A=\dot{S}_A$ i $v_A=\omega_d \overline{AP_{V_d}} \Rightarrow \dot{S}_A=\dot{\varphi}\,\overline{AP_{V_d}} \Rightarrow \boxed{S_A=\varphi(t)\cdot\overline{AP_{V_d}}}$, tj. $\boxed{S_A=\varphi(t)R}$

Brzina i ubrzanje bilo koje druge tačke diska se sada mogu odrediti u bilo kom trenutku. Za tačku B diska u trenutku t_1 je:

$\vec{v}_B=\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{P_{V_1}B} \Rightarrow v_B=\omega_1\cdot\overline{BP_{V_1}}=2R\omega_1 \Rightarrow \boxed{v_B=0{,}6}$, $\vec{v}_B\perp BP_{V_1}$

i

$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{BN}^{A}+\vec{a}_{BT}^{A}=\vec{a}_{AT_1}+\vec{a}_{AN_1}+\vec{a}_{BT}^{A}+\vec{a}_{BN}^{A}$,

gde je: $\boxed{a_{BT}^{A}}=\varepsilon_1\cdot\overline{AB} \Rightarrow \boxed{a_{BT}^{A}=0{,}3}$ i $\boxed{a_{BN}^{A}}=\omega_1^2\overline{AB} \Rightarrow \boxed{a_{BN}^{A}=0{,}3}$

$a_{Bx}=a_{AT}+a_{BT}^{A}$ i $a_{By}=-a_{BN}^{A}$

Prelazimo na štap BC koje vrši ravno kretanje. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje štapa u trenutku t_1 su: ω_2 i ε_2.

Brzina tačke C kao tačke klizača ima pravac tangente na kružne vođice. Trenutni pol brzina štapa BC, kao tačka preseka normala na brzine $\vec{v}_B$ i $\vec{v}_C$ je tačka : $O=P_{V_2}$, pa je:

$\overline{BP_{V_2}}=2R$ i $\overline{CP_{V_2}}=4R$ $\quad(\overline{BC}=4R\cos30^\circ=2\sqrt{3}R)$.

i $\omega_2=\dfrac{v_B}{\overline{BP_{V_2}}}=\dfrac{0{,}6}{0{,}6}$, $\boxed{\omega_2=1}$ – ugaona brzina štapa BC

$v_C=\omega_2\overline{CP_{V_2}}=1\cdot1{,}2$ $\boxed{v_C=1{,}2}$

Ubrzanje tačke C kao tačke klizača je:

$\vec{a}_C=\vec{a}_{CN}+\vec{a}_{CT}$, gde je: $a_{CN}=\dfrac{v_C^2}{R_{KC}}=\dfrac{(1{,}2)^2}{4R} \Rightarrow \boxed{a_{CN}=1{,}2}$ i $\boxed{a_{CT}=?}$

dok je ubrzanje tačke C kao tačke štapa BC:

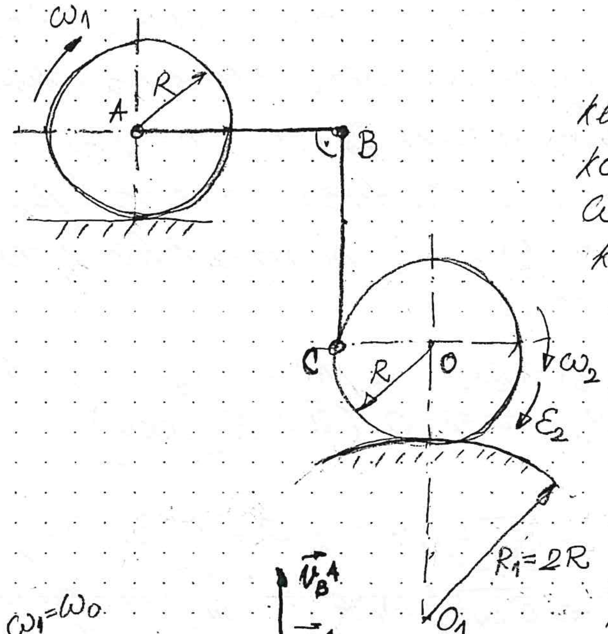
$\vec{a}_C=\vec{a}_B+\vec{a}_{CN}^{B}+\vec{a}_{CT}^{B} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{CT}+\vec{a}_{CN}=\vec{a}_{AT_1}+\vec{a}_{AN_1}+\vec{a}_{BT}^{A}+\vec{a}_{BN}^{A}+\vec{a}_{CN}^{B}+\vec{a}_{CT}^{B}}$

$\boxed{a_{CN}^{B}}=\omega_2^2\overline{CB}=\boxed{0{,}6\sqrt{3}}$ $a_{CT}^{B}=0{,}6\sqrt{3}\,\varepsilon_2$

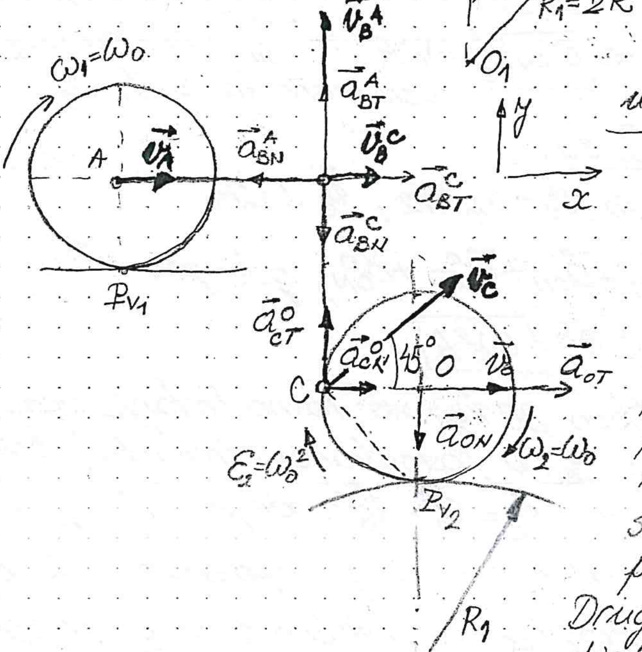
x: $-a_{CT}\cos60^\circ-a_{CN}\cos30^\circ=a_{AT_1}+a_{BT}^{A}-a_{CN}^{B} \Rightarrow \boxed{a_{CT}=1{,}2}$

y: $-a_{CT}\sin60^\circ+a_{CN}\sin30^\circ=a_{AN_1}-a_{BN}^{A}+a_{CT}^{B} \Rightarrow a_{CT}^{B}=\ldots$

7



Disk 1 poluprečnika R kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj ravnoj podlozi konstantnom ugaonom brzinom $\omega_1=\omega_0=const.$ Disk 2 poluprečnika R kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj cilindričnoj podlozi poluprečnika $R_1=2R$. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje diska 2 u položaju mehanizma prikazanom na slici su: $\omega_2=\omega_0$ i $\varepsilon_2=\omega_0^2$, respektivno. Odrediti ugaone brzine i ugaona ubrzanja štapova AB i BC u položaju mehanizma prikazanom na slici. Veze u tačkama A, B i C su zglobne. $\overline{AB}=\overline{BC}=2R$



Sistem prikazan na slici ima dva stepena slobode, tj. može da vrši 2 nezavisna kretanja. Jedno kretanje je kotrljanje bez klizanja po nepokretnoj ravnoj podlozi diska 1, pri kome disk 2 može da ostane nepokretan. Ovo kretanje ima 1 stepen slobode i biće poznato ako je, npr., poznat ugao rotacije diska 1, $\varphi=\varphi(t)$. Drugo kretanje je kotrljanje bez klizanja diska 2 po nepokretnoj cilindričnoj podlozi, pri kome disk 1 može da ostane nepokretan. Ovo kretanje, takođe, ima 1 stepen slobode i kretanje diska 2 biće poznato ako je, npr., poznat ugao rotacije diska 2, $\theta=\theta(t)$. Pošto će kretanje mehanizma, dakle, biti poznato ako su poznate 2 funkcije: $\varphi=\varphi(t)$ i $\theta=\theta(t)$, to on ima $n=2$ stepena slobode. Zbog toga su u posmatranom trenutku zadate:

1. ugaona brzina i ugaono ubrzanje diska 1: $\omega_1=\omega_0=const$ i $\varepsilon_1=\dot{\omega}_1=0$,
2. ugaona brzina i ugaono ubrzanje diska 2: $\omega_2=\omega_0$ i $\varepsilon_2=\omega_0^2$

Na bazi ovih vrednosti mogu se odrediti brzina i ubrzanje centra A diska 1, kao i brzina i ubrzanje tačke C diska 2.

Brzina i ubrzanje tačke A su:

$$\vec{v}_A=\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{P_{V_1}A} \Rightarrow v_A=\omega_1\cdot\overline{AP_{V_1}}=\omega_0 R$$

$$\vec{a}_A=\vec{a}_{AT}=\vec{\varepsilon}_1\times\overrightarrow{P_{V_1}A} \Rightarrow a_A=\varepsilon_1\overline{AP_{V_1}}=0$$

Brzina i ubrzanje tačke C diska 2 mogu se odrediti preko brzine i ubrzanja centra O diska 2. Trajektorija tačke O je kružnica poluprečnika $R_{KO}=R+R_1 \Rightarrow R_{KO}=3R$ sa centrom u tački O_1, jer se rastojanje tačke O od tačke kontakta diska 2 i nepokretne cilindrične površine koja je istovremeno i trenutni pol brzina diska 2, P_{V_2}, ne menja tokom kretanja diska: $\overline{OP_{V_2}}=R=const.$ Zbog toga je:

$\vec{V}_0=\vec{\omega}_2\times\overrightarrow{P_{V_2}O} \Rightarrow V_0=\omega_2\overline{P_{V_2}O} \Rightarrow V_0=\omega_0 R$ i $\vec{V}_0$ pravac tangente na trajektoriju tačke O $(\vec{V}_0\perp OP_{V_2}(OO_1))$

i

$\vec{a}_0=\vec{a}_{OT}+\vec{a}_{ON}$, gde je:

$\vec{a}_{OT}=\vec{\varepsilon}_2\times\overrightarrow{P_{V_2}O} \Rightarrow a_{OT}=\varepsilon_2\overline{P_{V_2}O} \Rightarrow \boxed{a_{OT}=\omega_0^2 R}$ i $\vec{a}_{OT}\perp OP_{V_2}(OO_1)$

$a_{ON}=\dfrac{V_0^2}{R_{KO}} \Rightarrow a_{ON}=\dfrac{(\omega_0 R)^2}{3R} \Rightarrow \boxed{a_{ON}=\frac{1}{3}\omega_0^2 R}$ i $\vec{a}_{ON}$ u pravcu OO_1, usmereno ka tački O_1

Brzina i ubrzanje tačke C diska su:

$\vec{V}_C=\vec{\omega}_2\times\overrightarrow{P_{V_2}C} \Rightarrow V_C=\omega_2\overline{P_{V_2}C} \Rightarrow V_C=\omega_0 R\sqrt{2}$, $\vec{V}_C\perp CP_{V_2}$

i $\vec{a}_C=\vec{a}_0+\vec{a}_{CT}^{\,0}+\vec{a}_{CN}^{\,0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_C=\vec{a}_{OT}+\vec{a}_{ON}+\vec{a}_{CT}^{\,0}+\vec{a}_{CN}^{\,0}}$, gde je:

$\boxed{a_{CT}^{0}=\varepsilon_2\overline{OC}=\omega_0^2 R}$ i $\boxed{a_{CN}^{0}=\omega_2^2\cdot\overline{OC}=\omega_0^2 R}$

Tačka C predstavlja i jedan kraj štapa BC koji vrši ravno kretanje ugaonom brzinom ω_{BC} i ugaonim ubrzanjem ε_{BC} u posmatranom trenutku. Brzina tačke B, drugog kraja štapa BC je: $\vec{V}_B=\vec{V}_C+\vec{V}_B^{\,C}$, gde je $V_B^C=\omega_{BC}\overline{BC}$ i nepoznata je po pravcu smeru i intezitetu, jer je nepoznata algebarska vrednost vektora $\vec{V}_B^{\,C}$ $(\vec{V}_B^{\,C}\perp BC)$. Zbog toga je potrebno analizirati brzinu tačke B kao tačke štapa AB koji vrši ravno kretanje ugaonom brzinom ω_{AB} i ugaonim ubrzanjem ε_{AB} u posmatranom trenutku, a s obzirom da su brzina i ubrzanje njegovog drugog kraja, tačke A, poznati.

Brzina tačke B kao tačke štapa AB je:

$\vec{V}_B=\vec{V}_A+\vec{V}_B^{\,A}$, gde je $V_B^A=\omega_{AB}\cdot\overline{AB}$ i $\vec{V}_B^{\,A}\perp AB$.

Dakle, važi:

$$\left.\begin{aligned}\vec{V}_B&=\vec{V}_C+\vec{V}_B^{\,C}\\ \text{i }\vec{V}_B&=\vec{V}_A+\vec{V}_C^{\,A}\ (\vec{V}_B^{\,A})\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{V}_C+\vec{V}_B^{\,C}=\vec{V}_A+\vec{V}_C^{\,A} \Rightarrow \begin{aligned}&x:\ V_C\frac{\sqrt{2}}{2}+V_B^C=V_A \Rightarrow V_B^C=0,\ \boxed{\omega_{BC}=0}\\ &y:\ V_C\frac{\sqrt{2}}{2}=V_C^A \Rightarrow V_C^A=R\omega_0,\ \boxed{\omega_{AC}=\frac{1}{2}\omega_0}\end{aligned}$$

Analogono analizi brzine tačke B, kao tačke i štapa AB i štapa BC, može se izvršiti analiza ubrzanja tačke B:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a}_B=\vec{a}_C+\vec{a}_{BN}^{\,C}+\vec{a}_{BT}^{\,C}=\vec{a}_{OT}+\vec{a}_{ON}+\vec{a}_{CT}^{\,0}+\vec{a}_{CN}^{\,0}+\vec{a}_{BN}^{\,C}+\vec{a}_{BT}^{\,C}\\ &\text{gde je: } \boxed{a_{BN}^{C}=\omega_{BC}^2\cdot\overline{BC}=0} \text{ i } \boxed{a_{BT}^{C}=\varepsilon_{BC}\overline{BC}}\\ &\text{i } \vec{a}_B=\overset{0}{\vec{a}_A}+\vec{a}_{BN}^{\,A}+\vec{a}_{BT}^{\,A}\\ &\text{gde je: } a_A=0 \text{ i } \boxed{a_{BN}^{A}=\omega_{AB}^2\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\omega_0^2 R} \text{ i } a_{BT}^{A}=\varepsilon_{AB}\overline{AB}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec a_{OT}+\vec a_{ON}+\vec a^{\,O}_{CT}+\vec a^{\,O}_{CN}+\vec a^{\,C}_{BT}=\vec a^{\,A}_{BT}+\vec a^{\,A}_{BN}\Rightarrow$$

$x:\ a_{OT}+a^O_{CN}+a^C_{BT}=-a^A_{BN}$

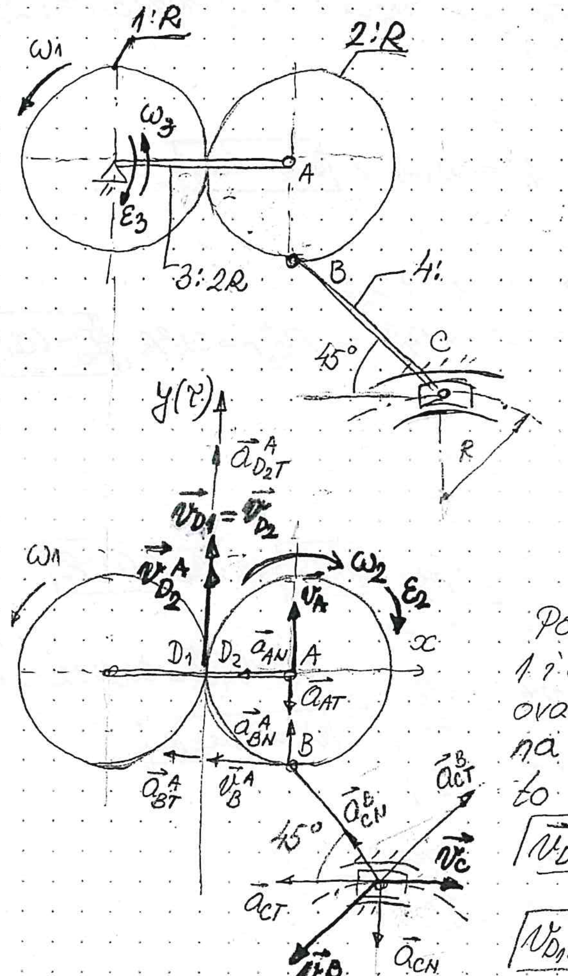
$$a^C_{BT}=-\left(a^A_{BN}+a_{OT}+a^O_{CN}\right)=-\frac{5}{2}\omega_0^2R$$

$$\boxed{\varepsilon_{BC}=-\frac{5}{4}\omega_0^2}$$

$y:\ -a_{ON}+a^O_{CT}=a^A_{BT}\Rightarrow a^A_{BT}=\frac{2}{3}\omega_0^2R$

$$\boxed{\varepsilon_{AB}=\frac{1}{3}\omega_0^2}$$

(8) Na slici je prikazan mehanizam koji se sastoji od spregnutnih zupčanika 1 i 2, krivaje ($\overline{OA}=2R$), poluge ($\overline{BC}=2\sqrt{2}R$) i klizača C. Veze u tačkama O, A, B i C su zglobne, a kružna vodica klizača C je poluprečnika R. Ugaona brzina zupčanika 1 je $\omega_1=2\omega_0=const$, a krivaje OA je $\omega_3=\frac{1}{2}\omega_0$, pri čemu je njeno ugaono ugaono ubrzanje $\varepsilon_3=\frac{1}{2}\omega_0^2$. Odrediti brzinu i ubrzanje klizača C.



Sistem ima 2 stepena slobode, a za međusobno nezavisna kretanja uvedene su rotacija oko nepokretne ose Oz zupčanika 1 i rotacija poluge OA oko iste ose Oz. Zupčanik 2 zglobno je vezan za polugu OA, a u posmatranom trenutku nalazi se u kontaktu sa zupčanikom 1 na mestu D, pri čemu između zupčanika 1 i 2 nema proklizavanje. Kotrljanje, ravno kretanje zupčanika 2 je, dakle, određeno i kretanjem zupčanika 1 i kretanjem poluge OA.

Pošto nema proklizavanja između zupčanika 1 i 2 i pošto brzine tačaka u kontaktu D_1 i D_2 ova tela imaju pravac ose zajedničke tangente na konturne linije tih tela na mestu D ($D_y=D_\tau$), to važe sledeće relacije:

$\boxed{\vec v_{D_1}=v_{D_1}\vec j}$ $\boxed{v_{D_1}=v_{D_1y}=R\omega_1}$ $\boxed{v_{D_1}=2R\omega_0}$

i $\boxed{v_{D_1x}=0}$

$\boxed{v_{D_1x}=v_{D_2x}}\Rightarrow v_{D_2x}=0\Rightarrow\boxed{\vec v_{D_2}=v_{D_2}\vec j}$

projekcije brzina na pravac zajedničke normale na konturne linije tela 1 i 2 na mestu D ($D_x=D_n$) moraju biti jednake da bi tela 1 i 2 bila u kontaktu u posmatranom trenutku.

i $\boxed{v_{D_1y}=v_{D_2y}}\Rightarrow v_{D_1}=v_{D_2}\Rightarrow\boxed{v_{D_2}=2R\omega_0}$ i $\boxed{\vec v_{D_2}=\vec v_{D_1}=2R\omega_0\vec j}$

uslov da nema proklizavanja između tela 1 i 2

Takođe, pošto jednakost brzina tačaka u kontaktu važi za svaki trenutak:
$v_{D_1}(t) = v_{D_2}(t)$ to su i tangentna ubrzanja tih tačaka jednaka, tj. važi:
$\dot{v}_{D_1} = \dot{v}_{D_2} \Rightarrow a_{D_1T} = a_{D_2T}$
Kako je: $a_{D_1T} = \varepsilon_1 \cdot \overline{OD_1}$ i $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = 0 \Rightarrow a_{D_1T} = 0$,
to je i $\boxed{a_{D_1T} = a_{D_1y} = 0}$.

Brzina i ubrzanje tačke A zupčanika 2 jednaka je brzina i ubrzanja tačke A krivaje, jer je veza između zupčanika 2 i krivaje OA zglobna:
$v_A = \omega_3 \cdot \overline{OA} \Rightarrow v_A = \frac{1}{2}\omega_0 \cdot 2R$, $\boxed{v_A = \omega_0 R}$
$\vec{a}_A = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{AN} \Rightarrow a_{AT} = \varepsilon_3 \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2}\omega_0^2 \cdot 2R$, $\boxed{a_{AT} = \omega_0^2 R}$
i $a_{AN} = \omega_3^2 \cdot \overline{OA} = \frac{1}{4}\omega_0^2 \cdot 2R \Rightarrow \boxed{a_{AN} = \frac{1}{2}\omega_0^2 R}$

Ugaonu brzinu ω_2 i ugaono ubrzanje ε_2 zupčanika 2 odrediće se iz relacija koje povezuju brzine i ubrzanja tačaka A i D_2 zupčanika 2 koji, kao što je rečeno vrši ravno kretanje:
$\vec{v}_{D_2} = \vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_D^A$; $v_D^A = \omega_2 \cdot \overline{AD} = \omega_2 R$
y: $v_D = v_A + v_D^A \Rightarrow v_D^A = v_D - v_A \Rightarrow v_D^A = \omega_0 R$ i $\boxed{\omega_2 = \omega_0}$
kao i:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a}_{D_2} = \vec{a}_A + \vec{a}_{D_2T}^A + \vec{a}_{D_2N}^A\\ &a_{D_2T}^A = \varepsilon_2 \cdot \overline{AD} = \varepsilon_2 R\\ &\boxed{a_{D_2N}^A} = \omega_2^2 \cdot \overline{AD} = \boxed{\omega_0^2 R}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&y: a_{D_2T} = -a_{AT} + a_{D_2T}^A\\ &0 = -a_{AT} + a_{D_2T}^A \Rightarrow a_{D_2T}^A = \omega_0^2 R, \boxed{\varepsilon_2 = \omega_0^2}\end{aligned}$$

Brzina i ubrzanje tačke B zupčanika 2 su:
$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A$, $\boxed{v_B^A = \omega_0 R}$
i $\vec{a}_B = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{AN} + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A$, $\boxed{a_{BN}^A} = \omega_2^2 \cdot \overline{AB} = \boxed{\omega_0^2 R}$ i $\boxed{a_{BT}^A} = \varepsilon_2 \cdot \overline{AB} = \boxed{\omega_0^2 R}$

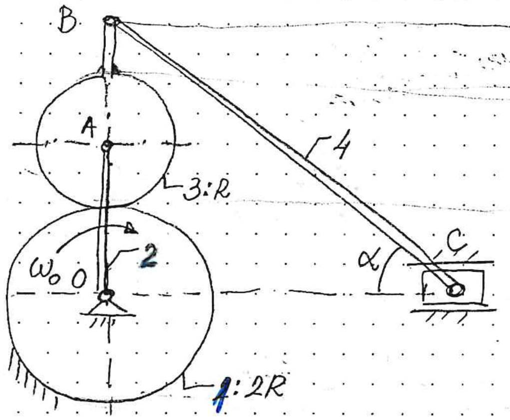
Brzina tačke C i ugaona brzina ω_4 poluge BC.-

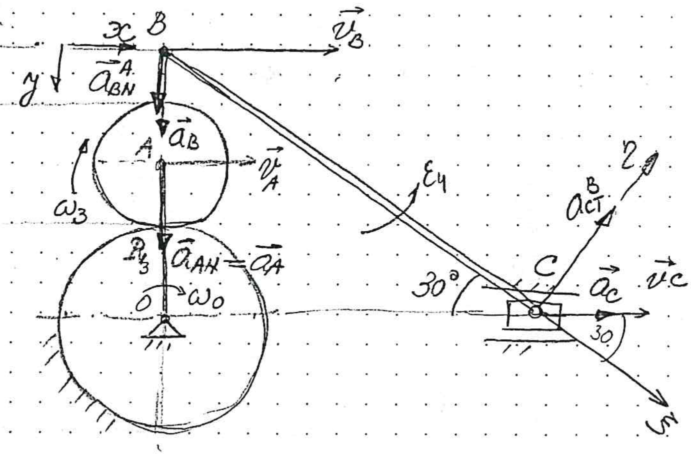
$$\left.\begin{aligned}&\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_C^B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A + \vec{v}_C^B\\ &v_C^B = \omega_4 \cdot \overline{CB} = 2\sqrt{2}\,\omega_4 R\end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned}&x: v_C = -v_B^A - v_C^B \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &y: 0 = v_A - v_C^B \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&v_C^B = v_A\sqrt{2} = \omega_0 R\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\omega_4 = \frac{1}{2}\omega_0}\\ &\boxed{v_C = -2\omega_0 R}\end{aligned}$$

Ubrzanje tačke C i ugaono ubrzanje ε_4 poluge BC.-
$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CN}^B + \vec{a}_{CT}^B = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{AN} + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A + \vec{a}_{CN}^B + \vec{a}_{CT}^B$
$a_{CN}^B = \omega_4^2 \cdot \overline{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0^2 R$
$a_{CT}^B = \varepsilon_4 \cdot \overline{CB} = 2\sqrt{2}\,\varepsilon_4 R$
i $\vec{a}_C = \vec{a}_{CT} + \vec{a}_{CN}$, $\boxed{a_{CN}} = \frac{v_C^2}{R} = 4\omega_0^2 R$

$$\left.\begin{aligned}&x: -a_{CT} = -a_{AN} - a_{BT}^A - a_{CN}^B \frac{\sqrt{2}}{2} + a_{CT}^B \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &y: -a_{CN} = -a_{AT} + a_{BN}^A + a_{CN}^B \frac{\sqrt{2}}{2} + a_{CT}^B \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&a_{CT}^B = -\frac{9\sqrt{2}}{2}\omega_0^2 R\\ &\boxed{\varepsilon_4 = -\frac{9}{4}\omega_0^2}\\ &\boxed{a_{CT} = \frac{13}{2}\omega_0^2 R}\end{aligned}$$

(9) U datom položaju mehanizma ($OC \perp OB$, $\alpha = 30^\circ$) odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje poluge BC. Veze u tačkama O, A, B, C su zglobne. Krivaja OA obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω_0 i dovodi u kretanje disk 3 (poluprečnika R, disk je sa ispustom $\overline{AB} = 2R$), koji se kotrlja bez klizanja po nepomičnom disku 1 (poluprečnika 2R). Poluga BC dovodi u kretanje klizač C.





Mehanizam ima 1 stepen stepen slobode (disk 1 je, u odnosu na prethodni zadatak, nepokretan). Kretanje mehanizma određeno je kretanjem rotacijom krivaje 2: $\omega_2 = \omega_0 = const \Rightarrow \varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 0$. Disk 3 je kotrlja bez klizanja po nepokretnom disku 1, pa je tačka kontakta diska 3 sa diskom 1 trenutni pol brzina diska P_{V_3}.

Analiza brzina tačaka i ugaonih brzina tela

$\boxed{V_A} = \omega_2 \cdot \overline{OA} = \boxed{3R\omega_0}$ $V_A = \omega_3 \cdot \overline{AP}_{V_3} = \omega_3 R$, $\omega_3 R = 3R\omega_0 \Rightarrow \boxed{\omega_3 = 3\omega_0}$

$V_B = \omega_3 \cdot \overline{BP}_V = 9R\omega_0$; $\vec{v}_C = \vec{v}_B$, $\boxed{v_C = 9R\omega_0} \Rightarrow \boxed{\omega_{CB} = \omega_4 = 0}$

Analiza ubrzanja tačaka i ugaonih ubrzanja tela

(*) $\vec{a}_A = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{AN}$; $a_{AT} = \varepsilon_2 \cdot \overline{OA} = 0$; $\boxed{a_{AN}} = \omega_2^2 \cdot \overline{OA} = \boxed{3\omega_0^2 R}$

$a_{AT} = \varepsilon_3 \cdot \overline{AP}_{V_3}$; $0 = \varepsilon_3 R \Rightarrow \boxed{\varepsilon_3 = 0}$

(*) $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A$; $\boxed{a_{BN}^A} = \omega_3^2 \cdot \overline{AB} = \boxed{18\omega_0^2 R}$, $a_{BT}^A = \varepsilon_3 \cdot \overline{AB} = 0 \Rightarrow a_{Bx} = 0$, $a_{By} = 21\omega_0^2 R$

(*) $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CN}^B + \vec{a}_{CT}^B$; $a_{CN}^B = \omega_4^2 \cdot \overline{CB} = 0$, $a_{CT}^B = \varepsilon_4 \overline{CB}$,

($\overline{CB} = \overline{OB}/\sin 30^\circ$, $\overline{CB} = 10R$)

ξ: $a_C \cos 30 = a_B \cos 60^\circ$

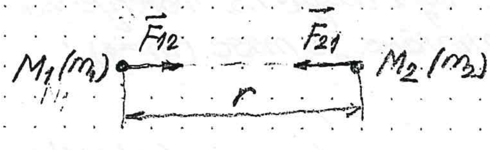
η: $a_C \sin 30 = -a_B \sin 60 + a_{CT}^B$

$a_C = 7\sqrt{3}\, R\omega_0^2$

$a_{CT}^B = 14\sqrt{3}\, R\omega_0^2$

Neke Njutnove sile

Njutnova gravitaciona sila. – Njutnova gravitaciona sila između dve materijalne tačke M_1 i M_2 masa m_1 i m_2, respektivno, (dva tela koja se mogu predstaviti materijalnim tačkama odgovarajućih masa) predstavlja silu uzajamnog privlačenja te dve tačke. Ako je $\vec{F}_{12}$ sila kojom tačka M_2 privlači tačku M_1, a $\vec{F}_{21}$ sila kojom tačka M_1 privlači tačku M_2, onda važi:



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad i \quad |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = \frac{k\, m_1 m_2}{r^2},$$

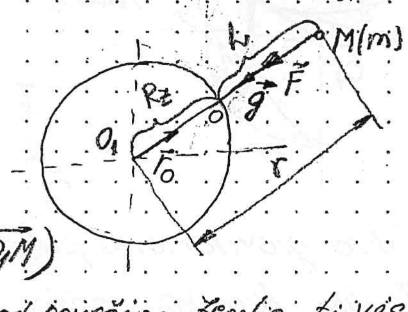
gde je:

$k = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ – univerzalna gravitaciona konstanta

i $r = \overline{M_1M_2}$ – trenutno rastojanje između tačaka M_1 i M_2.

Sila Zemljine teže. – Sila Zemljine teže predstavlja silu kojom Zemlja privlači sve materijalne tačke, (pa samim tim i tela) koje se nalaze na njoj ili ~~u njenoj ili~~ u njenoj okolini. Ova sila je po svojoj prirodi Njutnova gravitaciona sila koja deluje između Zemlje i posmatrane materijalne tačke M mase m (tj. tela koje se može predstaviti tom materijalnom tačkom). Međutim, pošto posmatrana materijalna tačka ~~ima masu koja~~ ima zanemarljivo malu masu m u odnosu na masu Zemlje, M_Z, to se umesto termina „uzajamno privlačenje tačke M i Zemlje" koristi termin „Zemlja privlači materijalnu tačku M" ili „na tačku M deluje sila Zemljine teže." Sila Zemljine teže, tj. sila teže $\vec{F}$ koja deluje na mat. tačku M mase m, a koja se nalazi nalaži na rastojanju $r = \overline{O_1M}$ od centra Zemlje O_1 je sila koja ima pravac prave O_1M, smer ka centru Zemlje, a intezitet joj iznose:

$$F = |\vec{F}| = k\,\frac{mM_Z}{r^2},$$



tako da se vektor ove sile može dati u obliku:

$$\vec{F} = -F\,\vec{r}_0,$$

gde je $\vec{r}_0$ jedinični vektor pravca O_1M. ($\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{r} = \overrightarrow{O_1M}$)

Ako se sa $h = \overline{OM}$ označi normalno rastojanje tačke M od površine Zemlje, tj. visina na kojoj se nalazi tačka M iznad površine Zemlje, intezitet sile teže se može predstaviti i u obliku:

$$F = k\,\frac{M_Z}{R_Z^2}\,\frac{R_Z^2}{(R_Z+h)^2}\,m \;\Rightarrow\; \boxed{F = mg}\,\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_Z}\right)^2},$$

gde je:

$g = k\,\frac{M_Z}{R_Z^2}$ – ubrzanje Zemljine teže koje iznosi: $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$.

Kada je $h \ll R_Z$ intezitet sile teže koja deluje na tačku M je konstantan, tj.

ne zavisi od položaja mat. tačke M u odnosu na centar (površ) Zemlje i iznosi:

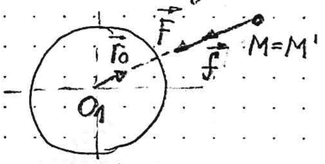
$\boxed{F = G = mg}$, tj. $\vec{F} = \vec{G} = m\vec{g}$, gde je $\vec{g}$ - vektor ubrzanja Zemljine teže

Pošto mat. tačka M trpi dejstvo sile Zemljine teže u svakoj tački prostora oko Zemlje, uvodi se pojam gravitacionog polja Zemlje. Posredstvom ovog polja Zemlja privlači materijalnu tačku M silom $\vec{F}$. Gravitaciono polje u prostoru oko Zemlje postoji i kada se u njemu ne nalaze materijalni objekti. Jačina gravitacionog polja Zemlje $\vec{f}$ u tački M' prostora oko Zemlje koja se nalazi na rastojanju r od centra O_1 Zemlje je vektorska veličina i predstavlja silu Zemljine teže koja deluje na materijalnu tačke koja se nalazi u tački prostora M', a jedinične je mase $(m=1)$:

$$\vec{f} = -k\frac{M_Z}{r^2}\vec{r_0},$$

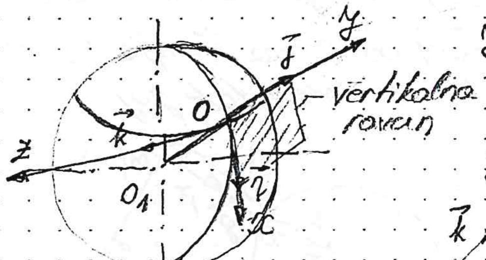
Sila teže koja deluje na materijalnu tačku M mase m, a nalazi se u tački M' gravitacionog polja Zemlje se sada može dati u obliku:

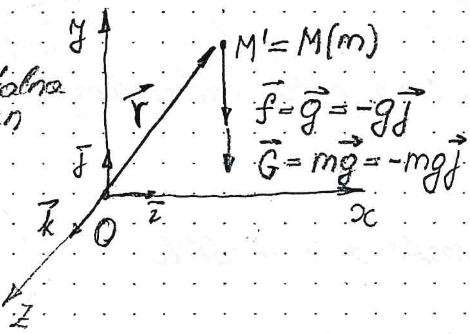
$$\vec{F} = m\vec{f}$$



Pošto se jačina gravitacionog polja $\vec{f}$ Zemlje menja i po pravcu i po intezitetu od tačke do tačke prostora, tj. $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r})$, gravitaciono polje Zemlje je nehomogeno.

Ako su dimenzije prostora gravitacionog polja Zemlje u okolini tačke O na površi Zemlje dovoljno male tako da se površ Zemlje u okolini tačke O može smatrati ravnom, a visine tačaka uočenog prostora iznad Zemlje mnogo manje od poluprečnika Zemlje $(h \ll R_Z)$, jačina gravitacionog polja Zemlje $\vec{f}$ u tom prostoru može se smatrati konstantnom vektorskom veličinom (veličinom koja se ne menja ni po intezitetu ni po pravcu od tačke do tačke polja).





(Jedinični vektor $\vec{r_0}$ pravca O_1M u uočenom prostor. jednak je jediničnom vektoru $\vec{j}$ $(\vec{r_0} \approx \vec{j})$ ose lokalne vertikale u tački O ose Oy koja sadrži tačke O, O_1)

Takvo gravitaciono polje Zemlje predstavlja homogeno gravitaciono polje Zemlje. Njegova jačina $\vec{f}$ je:

$$\vec{f} = -k\frac{M_Z}{(h+R_Z)^2}\vec{j} = -k\frac{M_Z}{R_Z^2}\overbrace{\frac{R_Z^2}{(R_Z+h)^2}}^{\approx 1}\vec{j} \Rightarrow \vec{f} \approx -g\vec{j}, \text{ tj. } \boxed{\vec{f} = \vec{g}}$$

gde su: $\vec{j}$ jedinični vektor vertikalne ose Oy u tački O na Zemlji koja prolazi centar Zemlje, ravan Oxy horizontalna ravan u toj tački i $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$ ubrzanje sile Zemljine teže.

Sila Zemljine teže koja deluje na mat. tačku M mase m koja se nalazi u tački M' homogenog gravitacionog polja je konstantna i iznosi:

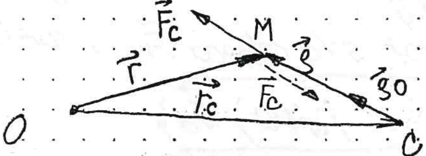
$\vec{G} = m\vec{f} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{G} = -mg\vec{j} \Rightarrow G_y = -|\vec{G}|$; $G_y = -mg$.

Centralna sila.– Pod centralnom silom $\vec{F}_c$ naziva se sila čija napadna linija prolazi kroz tačku M na koju deluje i kroz tačku C koja predstavlja centar, tj. izvor, te sile.

Neka je položaj centra C sile u odnosu na nepokretan pol O poznat i određen vektorom $\vec{r}_c = \overrightarrow{OC}$. Ako je centar sile pokretan onda je poznat i zakon kretanja centra sile: $\vec{r}_c = \vec{r}_c(t)$. Zakon kretanja mat. tačke M, mase m na koju deluje sila $\vec{F}_c$ u odnosu na pol O je: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Vektor položaj ove tačke M u odnosu na centar sile C je:

$\vec{\rho} = \overrightarrow{CM}$ i $\vec{\rho} = \vec{r}(t) - \vec{r}_c(t)$

Napadna linija centralne sile $\vec{F}_c$ se u bilo kom trenutku t poklapa sa napadnom linijom vektora $\vec{\rho}$, tj. sila $\vec{F}_c$ je kolinearna sa jediničnim vektorom $\vec{\rho}_0$ pravca CM, pa važi:



$\vec{F}_c = F_{c\rho}\,\vec{\rho}_0$, gde je:

$\vec{\rho}_0 = \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|} = \frac{\vec{\rho}}{CM}$

i $F_{c\rho} = \pm|\vec{F}_c| = \pm F_c$
- $\rightarrow$ (+), $\vec{F}_c$ i $\vec{\rho}_0$, tj. $\vec{\rho}$, istog smera, sila $\vec{F}_c$ odbojna.
- $\rightarrow$ (−), $\vec{F}_c$ i $\vec{\rho}_0$, tj. $\vec{\rho}$, suprotnog smera, sila $\vec{F}_c$ privlačna.

Intezitet F_c centralne sile najčešće je funkcija rastojanja materijalne tačke M od centra sile, tj.: $F_c = F_c(\rho)$, gde je $\rho = |\vec{\rho}|$.

Primer centralne sile je privlačna sila Zemljine teže čiji je centar centar Zemlje (O_1) i koji se u mnogim problemima primenjene mehanike može smatrati nepokretnim. Intezitet ove sile je obrnuto proporcionalan kvadratu rastojanja tačke M od centra sile.

Poseban slučaj predstavljaju centralne sile čiji je intezitet upravo proporcionalan rastojanju tačke M od centra sile C: $F_c = K\,\overline{CM} = K\rho$, gde je K [N/m] koeficijent proporcionalnosti (K>0). Primer ovakve sile je sila u linearnoj opruzi. Vektor centralne sile $\vec{F}_c$ u razmatranom slučaju je:

$\vec{F}_c = \pm F_c\vec{\rho}_0 \Rightarrow \vec{F}_c = \pm K\rho\frac{\vec{\rho}}{\rho} \Rightarrow \vec{F}_c = \pm K\vec{\rho}$, tj.:

$\boxed{\vec{F}_c = \pm K\,\overrightarrow{CM}} \Rightarrow$
- $\vec{F}_c = K\,\overrightarrow{CM}$ — odbojna centralna sila
- $\vec{F}_c = -K\,\overrightarrow{CM} = K\,\overrightarrow{MC}$ — privlačna centralna sila.

Ako se kretanje tačke M posmatra u odnosu na nepokretan Dekartov koordinatni sistem Oxyz, vektor $\overrightarrow{CM}$ u njemu je:

$\overrightarrow{CM} = (x(t) - x_c(t))\,\vec{i} + (y(t) - y_c(t))\,\vec{j} + (z(t) - z_c(t))\,\vec{k}$,

gde su: $x_c = x_c(t)$, $y_c = y_c(t)$ i $z_c = z_c(t)$ konačne jednačine kretanja centra sile u Oxyz,

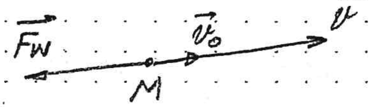
i $x=x(t)$, $y=y(t)$ i $z=z(t)$ - konačne jednačine kretanja tačke M u Oxyz.
Centralna sila $\vec{F}_c$ u DKS Oxyz je:

$$\boxed{\vec{F}_c = \pm K\vec{CM} = \pm K(x-x_c)\vec{i} \pm K(y-y_c)\vec{j} \pm K(z-z_c)\vec{k}},$$

tj. projekcije sile $\vec{F}_c$ na ose Ox, Oy i Oz, respektivno, su:

$$F_{cx} = X_c = \pm K(x-x_c), \quad F_{cy} = Y_c = \pm K(y-y_c) \quad i \quad F_{cz} = Z_c = \pm K(z-z_c).$$

Sila otpore sredine. - Sila otpora sredine $\vec{F}_W$ je sila kojom fluid, uključujući i vazduh deluje na mehanički objekat (tačku ili telo) koji se kreće u njemu. To je sila kojom se sredina suprotstavlja kretanju posmatranog mehaničkog objekta u njoj, a u svakoj tački tog mehaničkog objekta.
Sila otpora sredine $\vec{F}_W$ u tački M (tačka M može biti i tačka tela) ima, zbog napred rečenog, pravac brzine tačke $\vec{v}$, ali suprotan smer, dok njen intezitet $F_W = |\vec{F}_W|$ zavisi od inteziteta brzine $v=|\vec{v}|$ tačke i od svojstava same sredine u kojoj se tačka M kreće (gustine, viskoznosti, itd.). Zbog napred napred rečenog, vektor sile otpora $\vec{F}_W$ u tački M je:



$$\boxed{\vec{F}_W = -F_W(v)\,\vec{v}_0}$$

gde je $\vec{v}_0$ jedinični vektor pravca vektora brzine: $\vec{v}_0 = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{\vec{v}}{v}$.
Ako je intezitet sile $\vec{F}_W$ proporcionalan intezitetu v brzine tačke:

$$\boxed{F_W = bv,}$$

gde je b koeficijent otpora sredine u kojoj se tačka M kreće, onda je vektor sile otpora sredine:

$$\vec{F}_W = -F_W\vec{v}_0 = -bv\cdot\frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_W = -b\vec{v}.}$$

U nepokretnom DKS Oxyz u odnosu na koji se posmatra kretanje tačke M, njena brzina je: $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$, pa je sila otpora sile $\vec{F}_W$:

$$\boxed{\vec{F}_W = -b\vec{v} = (-b\dot{x})\vec{i} + (-b\dot{y})\vec{j} + (-b\dot{z})\vec{k}},$$

tj. njene projekcije na ose DKS Oxyz su:

$$F_{Wx} = X_W = -b\dot{x}, \quad F_{Wy} = Y_W = -b\dot{y} \quad i \quad F_{Wz} = Z_W = -b\dot{z}$$

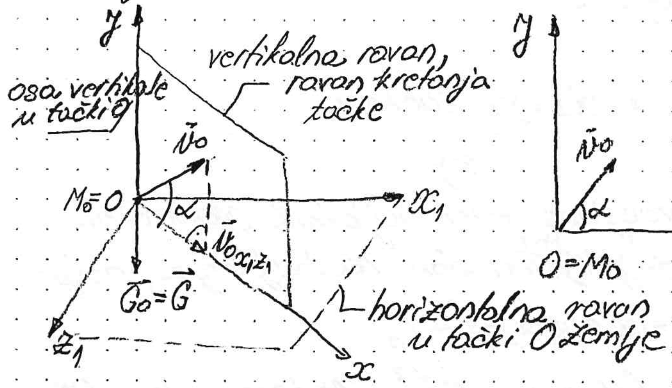
① Tačka M mase m bačena je sa površi Zemlje početnom brzinom intezitета v_0, pod uglom α u odnosu na horizontalnu ravan. Zanemarujući otpor vazduha i pretpostavljajući da se tačka kreće u homogenom polju teže, odrediti:

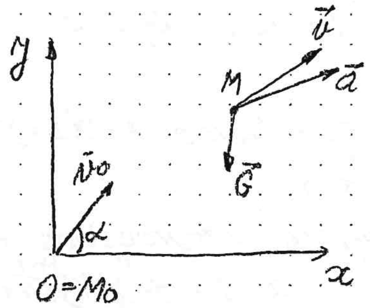
a) konačne jednačine kretanja tačke,

b) trajektoriju,

c) najveću visinu penjanja tačke,

d) najveći domet tačke.





a) Tačka M mase m kreće u homogenom polju sile Zemljine teže $\vec{G}$, što znači da sila $\vec{G}$, bez obzira u kojoj se tački polja nalazi materijalna tačka M, ima pravac vertikalne ose Oy u referentnoj tački O na površi Zemlje, smer ka centru Zemlje, dok joj je intezitet: $G = mg = const$, gde je $g = 9.81\ m/s^2$ ubrzanje sile Zemljine teže. Vektor sile Zemljine teže je, dakle:

$\vec{G} = -mg\vec{j}$.

Kretanje tačke M pod dejstvom sile $\vec{G}$ vrši se u vertikalnoj ravni Oxy u kojoj leži vektor početne brzine $\vec{v}_0$ i vektor sile teže u početnom trenutku $\vec{G}_0$. Osa Ox je horizonatalna osa u horizontalnoj ravni Ox_1z_1 vezanoj za površ Zemlje u tački O i na njoj se nalazi normalna projekcija vektora $\vec{v}_0$ na ravan Ox_1z_1.

Da bi se napisale diferencijalne jednačine kretanja tačke M potrebno je tačku M dovesti u položaj M koji odgovara nekom proizvoljnom trenutku t.

U tom položaju pretpostavlja se da vektori brzine tačke $\vec{v} = \vec{v}(t)$ i ubrzanja tačke imaju pozitivne projekcije na ose referentnog koordinatnog sistema.

U položaju M koji tačka zauzima u trenutku t crtaju se vektori sila koji deluju na tačku. Pošto na tačku deluje samo sila $\vec{G}$, diferencijalna jednačina kretanja tačke M u vektorskom obliku biće:

$$m\vec{a} = \vec{G} \Rightarrow m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}) = -mg\vec{j}. \qquad (1)$$

Projektovanjem leve i desne strane ove jednačine na ose DKS Oxy dobijaju diferencijalne jednačine kretanja tačke u pravcima osa Ox i Oy:

$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \qquad (2)$$

$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g \qquad (3)$$

Prvi integrali jednačina (2) i (3) su:

$$\frac{d\dot{x}}{dt}=0 \Rightarrow \dot{x}=C_1 \qquad (4)$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt}=-g \Rightarrow \int d\dot{y}=-g\int dt \Rightarrow \dot{y}=-gt+C_2 \qquad (5)$$

Za određivanje integracionih konstanti C_1 i C_2 koriste se početni uslovi za brzinu tačku:

$$t_0=0\ ;\ \dot{x}_0=v_{0x}=v_0\cos\alpha \quad i \quad \dot{y}_0=v_{0y}=v_0\sin\alpha$$

Zamenom ovih vrednosti u (4) i (5) dobija se:

$$C_1=v_0\cos\alpha\ ,\ C_2=v_0\sin\alpha,$$

pa su zakoni promene projekcija brzine $\vec{v}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}$ tačke:

$$\dot{x}=v_0\cos\alpha \quad i \quad \dot{y}=-gt+v_0\sin\alpha \qquad (6)$$

U drugoj integraciji, tj daljom integracijom diferencijalnih jednačina prvog reda po funkcijama $x=x(t)$ i $y=y(t)$ (6) metodom razdvajanja, dobija se:

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha \Rightarrow \int dx=v_0\cos\alpha\int dt \Rightarrow x=(v_0\cos\alpha)t+C_3$$

$$i\ \frac{dy}{dt}=-gt+v_0\sin\alpha \Rightarrow \int dy=-g\int t\,dt+v_0\sin\alpha\int dt \Rightarrow y=-g\frac{t^2}{2}+v_0t\sin\alpha+C_4 \qquad (7)$$

Integracione konstante C_3 i C_4 određuju se korišćenjem početnih uslova za položaj tačke, koji shodno izabranom koordinatnom sistemu glase:

$$t_0=0 \Rightarrow x_0=x(t_0)=0 \quad i \quad y_0=y(t_0)=0$$

Zamenom ovih uslova u (7) dobija se:

$$C_3=0 \quad i \quad C_4=0,$$

pa konačne jednačine kretanja tačke, tj kosog hica u bezvazdušnom prostoru dobijaju oblik:

$$x=v_0t\cos\alpha \qquad (8)$$

$$y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2} \qquad (9)$$

b) Linija putanje tačke dobija se eliminacijom vremena iz (8) i (9):

$$(8)\Rightarrow t=\frac{x}{v_0\cos\alpha} \xrightarrow{(9)} \boxed{y=x\,tg\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2} \qquad (10)$$

Linija putanje tačke je parabola, a njena trajektorija je deo parabole za $x\geq 0$ i $y\geq 0$,

c) Najveća visina penjanja tačke je $H=y_{max}$. Iz uslova ekstremuma funkcije $y=y(x)$, $y'=0$, dobija se:

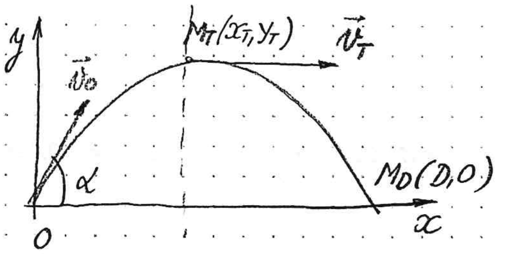
$$y'=tg\alpha-\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x \Rightarrow tg\alpha-\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x_T=0 \Rightarrow \boxed{x_T=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{2g}},$$

pa je:

$$y_{max}=y_T=y(x_T) \Rightarrow \boxed{y_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}}$$

Do istog rezultata može se doći i korišćenjem činjenice da je u najvišoj tački M_T na trajektoriji brzina horizontalna tj. da je $\dot{y}_T=0$ ($\vec{v}_T=\dot{x}_T\vec{i}$). Iz uslova: $\dot{y}_T=0$, određuje se trenutak t_T kada je tačka u položaju M_T, pa je:

$$y_T=y(t_T)=y_{max}.$$



Domet D predstavlja x-koordinatu položaja M_D u koji pada tačka M. Kako je $y_D=0$, to važi jednačina:

$$x_D = 2x_T = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow \boxed{D = x_D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}} \quad (10)$$

Najveća vrednost dometa D biće kada je:

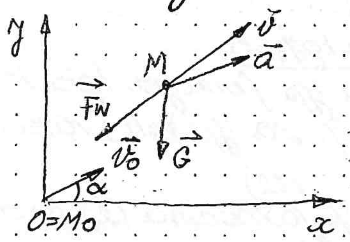
$\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 45°}$

i tada je: $\boxed{D_{max} = \frac{v_0^2}{g}}$.

Trenutak t_D može se odrediti iz jednačine:

$$x_D = D = v_0 t_D \cos\alpha \Rightarrow t_D = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

(2) Tačka M se kreće u homogenom polju sile Zemljine teže pod dejstvom sile otpora koja je proporcionalna intezitetu brzine sa koeficijentom proporcionalnosti $b = kmg$, gde je $k = const.$ U početnom trenutku tačka je bila u koordinatnom početku DKS Oxy i imala brzinu $\vec{v}_0$ koja je gradila ugao α sa horizontalom. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke u odnosu na DKS Oxy.



Na tačku M tokom kretanja u homogenom polju sile Zemljine teže $\vec{G}$ (u vertikalnoj ravni Oxy) deluje pored sile $\vec{G}$ i sila otpora atmosfere $\vec{F_W}$. Pošto je intezitet sile otpora proporcionalan intezitetu vektora brzine $\vec{v}$ tačke M u posmatranom trenutku t, to se, kao što je pokazano u uvodnom delu, vektor sile otpora $\vec{F_W}$ može predstaviti u obliku:

$\vec{F_W} = -b\vec{v} = -kmg\,\vec{v}$,

tj. vektor sile otpora je kolinearan vektoru brzine tačke $\vec{v}$ u trenutku t ali je suprotnog smera od vektora $\vec{v}$, jer se vazduh (sredina) suprotstavlja kretanju mehaničkog objekta u njoj. Kako je u Dekartovom koordinatnom sistemu vektor brzine: $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$, to je vektor sile $\vec{F_W}$ u DKS Oxy:

$\vec{F_W} = -kmg(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j})$.

Osnovna jednačina dinamike u ovom zadatku je:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F_W} \Rightarrow m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}) = -mg\vec{j} - kmg(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}), \quad (1)$$

pa su dif. jednačine kretanja u DKS Oxy:

$$m\ddot{x} = -kmg\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + kg\dot{x} = 0 \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = -kmg\dot{y} - mg \Rightarrow \ddot{y} + kg\dot{y} = g \quad (3)$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke M u pravcu ose Ox, jed. (2), je homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Karakteristična jednačina ove jednačine je: $\lambda^2 + kg\lambda = 0$ i njeni koreni su: $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -kg$. Opšte rešenje ove jednačine je:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \text{ tj. } x = C_1 e^{0\cdot t} + C_2 e^{-kgt} \Rightarrow \boxed{x = C_1 + C_2 e^{-kgt}}. \quad (4)$$

Izvod po vremenu opšteg rešenja (4) je:

$\dot{x} = -C_2 kg e^{-kgt}$ (5).

Početni uslovi kretanja tačke M u pravcu ose Ox po položaju i po brzini su:

$t_0=0$, $x_0 = x(0) = 0$ (6)

i $\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = V_0 \cos\alpha$ (7).

Zamenom (6) u (4), a (7) u (5), dobija se sistem algebarskih jednačina po integracionim konstantama C_1 i C_2:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = C_1 + C_2 \\ V_0\cos\alpha = -C_2 kg \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{C_2} = -V_0\cos\alpha/kg \\ \boxed{C_1} = -C_2 = V_0\cos\alpha/kg \end{array}\right\} (8)$$

Zamenom (8) u (4) dobija se konačna jednačina kretanja tačke u pravcu ose Ox:

$$\boxed{x(t)} = \frac{V_0}{kg}\cos\alpha\,(1-e^{-kgt}) \qquad (10)$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke u pravcu ose Oy (3) je nehomogena dif. jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Ova jednačina se može rešiti metodom neodređenih konstanti. Prema ovoj metodi opšte rešenje jednačine (3) se može predstaviti kao zbir homogenog dela rešenja y_h i partikularnog dela opšteg rešenja y_p, tj.:

$y = y_h + y_p$, (11)

gde je:

y_h rešenje odgovarajuće homogene jednačine: $\ddot{y}_h + kg\dot{y}_h = 0$, a y_p funkcija koja identički zadovoljava posmatranu diferencijalnu jednačinu, tj. za $y_p = y_p(t)$ važi:

$\ddot{y}_p + kg\dot{y}_p = -g$ (12)

Jednačina $\ddot{y}_h + kg\dot{y}_h = 0$ ima istu formu kao i dif. jednačina (2), pa su njeni koreni: $\lambda_3 = 0$ i $\lambda_4 = -kg$, što znači da je njeno opšte rešenje:

$y_h = C_3 + C_4 e^{-kgt}$ (13)

Pošto se na desnoj strani jednačine (3) nalazi polinom nultog reda, tj. konstanta, to bi i partikularni integral trebalo pretpostaviti u formi konstante, ako su oba korena karakteristične jednačine različita od nule. Međutim, u posmatranom slučaju jedan koren karakteristične jednačine je jednak nuli ($\lambda_3=0$), pa se partikularni deo opšteg rešenje pretpostavlja u formi polinoma prvog reda oblika:

$y_p = At$, (14)

gde je A konstanta koju treba odrediti iz (12). Kako je iz (14): $\dot{y}_p = A$ i $\ddot{y}_p = 0$, to (12) dobija oblik: $0 + kgA \equiv -g$, što znači da ~~je~~ konstanta A iznosi:

$A = -\frac{1}{k}$, pa je $\boxed{y_p} = -\frac{1}{k}t$, a opšte rešenje jednačine (3) glasi:

$y = y_h + y_p = C_3 + C_4 e^{-kgt} - \frac{1}{k}t$ (15)

Izvod po vremenu (15) je:

$\dot{y} = -kgC_4 e^{-kgt} - 1/k$ (16)

Početni uslovi kretanja tačke M u odnosu na osu Oy po položaju i po brzini su:

$t_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 0$ (17)

$\dot{y}_0 = \dot{y}(0) = V_0\sin\alpha$ (18)

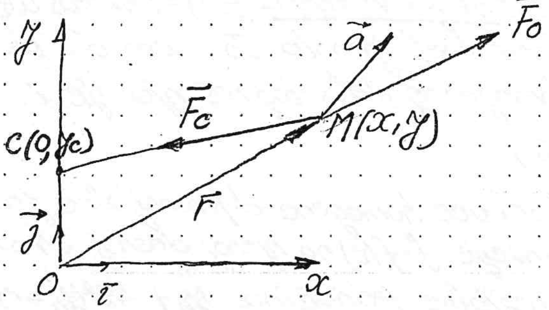
Zamenom (17) u (15), a (18) u (16) dobija se sistem algebarskih jednačina

$$\left.\begin{array}{l} 0 = C_3 + C_4 \\ V_0\sin\alpha = -\frac{1}{k} - kgC_4 \end{array}\right\} \Rightarrow C_4 = -C_3 = -\frac{V_0 k\sin\alpha + 1}{k^2 g},$$

pa je zakon kretanja tačke u pravcu ose Oy: $\boxed{y = \frac{V_0 k\sin\alpha+1}{k^2g}(1-e^{-kgt}) - \frac{t}{k}}$

(3) Materijalna tačka M mase m kreće se u ravni Oxy pod dejstvom odbojne centralne sile $\vec{F_0}$ čiji je centar nepokretna tačka O i privlačne centralne sile $\vec{F_c}$ čiji se centar kreće duž ose Oy po zakonu $y_c = b\cos\omega t$. Intezitet sile $\vec{F_0}$ je proporcionalan rastojanju tačke M od centra O te sile sa kojeficijentom proporcionalnosti mk^2, a intezitet sile $\vec{F_c}$ je proporcionalan rastojanju tačke M od centra C te sile sa koeficijentom proporcionalnosti $5mk^2$. Veličine b, ω i k su pozitivne konstante. Ako je u početnom trenutku tačka bila u položaju $M_0(0,0)$ u kome je imala brzinu $\vec{v_0} = v_0\vec{i}$ odrediti konačne jednačine kretanja tačke M, u slučaju da je:

a) $\omega \neq 2k$ i b) $\omega = 2k$



U proizvoljnom trenutku t tačka M zauzima položaj u ravni Oxy određen koordinatama $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Vektor ubrzanja $\vec{a}$ tačke u tom trenutku, pretpostavlja se, da ima pozitivne projekcije $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$ i $\ddot{y} = \ddot{y}(t)$ na ose DKS Oxy. Na slobodnu tačku M u ravni Oxy deluju sile:

1. - $\boxed{\vec{F_0} = mk^2\overrightarrow{OM}} = mk^2[(x(t) - \cancel{x_0})\vec{i} + (y(t) - \cancel{y_0})\vec{j}] \Rightarrow \boxed{\vec{F_0} = mk^2x\vec{i} + mk^2y\vec{j}}$

i

2. - $\boxed{\vec{F_c} = -5mk^2\overrightarrow{CM}} = -5km^2[(x(t) - \cancel{x_c})\vec{i} + (y(t) - y_c)\vec{j}] \Rightarrow$

$\boxed{\vec{F_c} = -5mk^2x\,\vec{i} - 5mk^2(y - b\cos\omega t)\,\vec{j}}$ (sila $\vec{G}$ se ne uzima se u obzir, jer nije rečeno da je ravan Oxy vertikalna, ili da je tačka teška)

Diferencijalna jednačina kretanja tačke M (II Njutnov zakon, zakon kretanja) je:

$m\vec{a} = \vec{F_c} + \vec{F_0}$,

pa su diferencijalne jednačina kretanja tačke M u pravcima osa Ox i Oy nepokretnog koordinatnog sistema Oxy:

$$m\ddot{x} = F_{cx} + F_{0x} \Rightarrow m\ddot{x} = mk^2x - 5mk^2x \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 4k^2x = 0} \quad (1)$$

i

$$m\ddot{y} = F_{cy} + F_{0y} \Rightarrow m\ddot{y} = mk^2y - 5mk^2(y - b\cos\omega t)\vec{j} \Rightarrow \boxed{\ddot{y} + 4k^2y = 5bk^2\cos\omega t} \quad (2)$$

Diferencijalna jednačina (1) po funkciji $x = x(t)$ predstavlja nepotpunu, homogenu diferencijacijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Njeno rešenje određeno je korenima λ_1 i λ_2 karakteristične jednačine $\lambda^2 + 4k^2 = 0$. Kako su koreni ove jednačine konjugovano kompleksni brojevi čiji je realni deo jednak nuli; tj. pošto je $\lambda_1 = i2k$ i $\lambda_2 = -i2k$, to se opšte rešenje jednačine (1): $x = C_1'e^{\lambda_1 t} + C_2'e^{\lambda_2 t}$ nakon odgovarajući transformacija (primenom Moavrovih formula) može napisati u obliku:

$$x = C_1 \cos 2kt + C_2 \sin 2kt \qquad (3)$$

čiji je prvi izvod po vremenu:

$$\dot{x} = -2k C_1 \sin 2kt + C_2 2k \cos 2kt \qquad (4)$$

S obzirom da je tačka u početnom trenutku $t_0 = 0$ zauzimala položaj $M_0(0,0)$ u kome je imala brzinu $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$, to su početni uslovi za funkciju $x = x(t)$

$x(0) = x_0 = 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0$. Njihovom zamenom u (3) i (4) dobija se sistem dve algebarske jednačine iz kojih slede da su vrednosti integracionih konstanti: $\boxed{C_1 = 0}$ i $\boxed{C_2 = v_0/2k}$, pa je konačna jednačina kretanja tačke M u pravcu ose Ox: $\boxed{x = x(t) = \frac{v_0}{2k} \sin 2kt}$ (5)

Diferencijalna jednačina (2) po funkciji $y = y(t)$ je nepotpuna, nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Pošto se na desnoj strani jednačine nalazi trigonometrijska, harmonijska funkcija vremena $f(t) = 5bk^2 \cos \omega t$, to će jednačina (2) biti rešena metodom neodređenih koeficijenata. To znači da se njeno opšte rešenje može predstaviti kao zbir homogenog dela tog rešenja y_h i partikularnog dela y_p: $y = y_h + y_p$. (6)

Homogeni deo opšteg rešenja y_h je rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine koja se dobija iz (2) kada se umesto funkcije $f = f(t)$ na njenoj desnoj strani, stavi nula. Dakle, $y_h = y_h(t)$ je rešenje diferencijalne jednačine $\ddot{y}_h + 4k^2 y_h = 0$.
Pošto je ova jednačina istog tipa kao i prethodno rešava jednačina (1) to je:

$$\boxed{y_h} = C_3 \cos 2kt + C_4 \sin 2kt; \qquad (7)$$

Partikularni deo opšteg rešenja $y_p = y_p(t)$ dif. jednačine (2), s obzirom da je na desnoj strani te jednačine harmonijska funkcija čija je kružna frekvenca ω, biće pretpostavljen u formi te funkcije ako je kružna frekvenca ω funkcije $f = f(t)$ različita od kružne frekvence homogenog dela opšteg rešenja (7). Dakle, za $\omega \neq 2k$, partikularni deo rešenja ima oblik:

$$\boxed{y_p} = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \qquad (8)$$

gde su A i B konstante koje treba odrediti iz uslova da funkcija (8) identički zadovoljava jednačinu (2), tj. da važi: $\boxed{\ddot{y}_p + 4k^2 y_p \equiv 5bk^2 \cos \omega t}$ (9)

Kako je: $\dot{y}_p = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$, a $\ddot{y}_p = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$, to se, nakon zamene (8) i $\ddot{y}_p = \ddot{y}_p(t)$ u (9) dobija:

$$\boxed{\cos \omega t \cdot \boxed{A(4k^2 - \omega^2)} + \sin \omega t \boxed{B(4k^2 - \omega^2)} \equiv 5bk^2 \cos \omega t}$$

Pošto su $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ linearno nezavisne funkcije gornji identitet biće zadovoljen ukoliko je:

$$A(4k^2 - \omega^2) = 5bk^2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{5bk^2}{4k^2 - \omega^2}}$$

$$B(4k^2 - \omega^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0,$$

(konstante uz $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ na levoj i desnoj strani moraju biti jednake)

pa partikularni deo opšteg rešenja (8) glasi:

$$\boxed{y_p} = \frac{5bk^2}{4k^2 - \omega^2} \cos \omega t \qquad (9)$$

Opšte rešenje (6) diferencijalne jednačine (2) u slučaju kada je $\omega \neq 2k$, je:

$$y = C_3 \cos 2kt + C_4 \sin 2kt + \frac{5bk^2}{4k^2-\omega^2}\cos\omega t, \qquad (10)$$

dok je izvod po vremenu tog rešenja:

$$\dot{y} = -2kC_3 \sin 2kt + 2kC_4 \cos 2kt - \frac{5bk^2\omega}{4k^2-\omega^2}\sin\omega t \qquad (11)$$

Zamenom početnog uslova: $y(0) = 0$ u (10) dobija se jednačina

$$0 = C_3 + \frac{5bk^2}{4k^2-\omega^2} \Rightarrow \boxed{C_3 = -\frac{5bk^2}{4k^2-\omega^2}} \qquad (12)$$

a uslova $\dot{y}(0) = 0$ u (11):

$$0 = 2kC_4 \Rightarrow \boxed{C_4 = 0}. \qquad (13)$$

Konačna jednačina kretanja u pravcu ose Oy za $\omega \neq 2k$, dobija se zamenom (12) i (13) u (10) i glasi:

$$\boxed{y = \frac{5bk^2}{4k^2-\omega^2}(\cos\omega t - \cos 2kt)}$$

U slučaju kada je $\omega = 2k$ partikularni deo rešenja se ne može pretpostaviti u obliku (8), s obzirom da bi tada partikularni deo rešenja i homogeni deo rešenja (7) bili linearno zavisni. Iz tog razloga partikularni deo rešenja dif. jed. (2) biće pretpostavljen u obliku:

$$\boxed{y_p} = t(A\cos 2kt + B\sin 2kt) \Rightarrow \dot{y}_p = A\cos 2kt + B\sin 2kt + t\cdot 2k(-A\sin 2kt + B\cos 2kt) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{y}_p} = 2\cdot 2k(-A\sin 2kt + B\cos 2kt) - 4k^2 \underbrace{t(A\cos 2kt + B\sin 2kt)}_{x_p}$$

Identitet (9): $\ddot{y}_p + 4k^2 y_p = 5bk^2\cos 2kt$ dobija sada oblik:

$$-4kA\sin 2kt + 4kB\cos 2kt \equiv 5bk^2\cos 2kt$$

pa mora biti:

$$4kA = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

i $4kB = 5bk^2 \Rightarrow \boxed{B = \frac{5}{4}bk}$

Partikulni deo opšteg rešenja za $\omega = 2k$ glasi: $\boxed{y_p = \frac{5}{4}bkt\sin 2kt}$; (14)

dok je opšti integral dif. jed. (2) u ovom slučaju:

$$\boxed{y = C_3\cos 2kt + C_4\sin 2kt + \frac{5}{4}bkt\sin 2kt}. \qquad (15)$$

S obzirom da je izvod (15) po vremenu:

$$\dot{y} = -2kC_3\sin 2kt + 2kC_4\cos 2kt + \frac{5}{2}bk^2 t\cos 2kt + \frac{5}{4}bk\sin 2kt,$$

to se za početne uslove $y(0) = 0$ i $\dot{y}(0) = 0$, dobijaju vrednosti integracionih konstanti: $\boxed{C_3 = 0}$ i $\boxed{C_4 = 0}$

pa je konačna jednačina kretanja tačke u pravcu ose Oy:

$$\boxed{y = \frac{5}{4}bkt\sin 2kt}$$

Ojlerove diferencijalne jednačine

Pretpostavimo da je poznata linija putanje, tj., trajektorija tačke M u odnosu na nepokretni DKS $Oxyz$. Kretanje tačke M po trajektoriji biće poznato ukoliko je poznat zakon puta $s=s(t)$. Ako u položaju M tačke na trajektoriji u proizvoljnom trenutku t postavimo prirodan triedar (ort tangente na trajektoriju u $M-\vec{t}$, ort glavne normale na trajektoriju $M-\vec{n}$ i ort binormale na trajektoriju u $M-\vec{b}$), onda je:

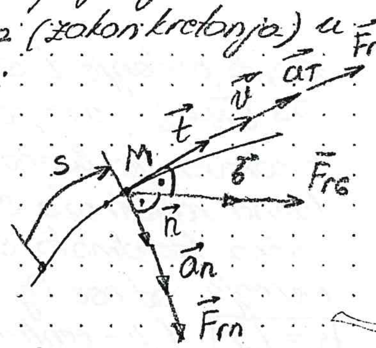
$\vec{v}=v\vec{t}$, $v=\dot{s}$

$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n$, gde je: $\vec{a}_t=a_t\vec{t}$, $a_t=\dot{v}=\ddot{s}$ - tangentno ubrzanje

$\vec{a}_n=a_n\vec{n}$, $a_n=\dfrac{v^2}{R_K}$ - normalno ubrzanje

Neka se kretanje posmatrane tačke odvija pod dejstvom sistema sila čija je rezultanta: $\vec{F}_r=F_{rt}\vec{t}+F_{rn}\vec{n}+F_{rb}\vec{b}$, gde su F_{rt}, F_{rn} i F_{rb} projekcije rezultante $\vec{F}_r$ na ose prirodnog triedra. Diferencijalna jednačina kretanja (zakon kretanja) u vektorskom obliku: $m\vec{a}=\vec{F}_r$, može se sada dati u obliku:

$$m(a_t\vec{t}+a_n\vec{n})=F_{rt}\vec{t}+F_{rn}\vec{n}+F_{rb}\vec{b}, \qquad (1)$$



pa se iz nje nakon projektovanja leve i desne strane na ose prirodnog triedra dobija sistem od 3 skalarne jednačine:

$$\left.\begin{array}{lll} ma_t=F_{rt} & \Rightarrow\ m\ddot{s}=F_{rt} & (2) \\ ma_n=F_{rn} & \Rightarrow\ m\dfrac{v^2}{R_K}=F_{rn} & (3) \\ ma_b=F_{rb} & \Rightarrow\ 0=F_{rb} & (4) \end{array}\right\}$$ Ojlerove diferencijalne jednačine

Ako je poznat zakon promene projekcije rezultante sila $\vec{F}_r$ na osu tangente prirodnog triedra: $F_{rt}=F_{rt}(t,s,\dot{s})$, jednačina (2) predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda po funkciji $s=s(t)$, tj. diferencijalnu jednačinu kretanja tačke po trajektoriji. Opšti integral te jednačine je: $s=s(t;C_1,C_2)$, a zakon puta $s=s(t)$ se dobija iz tog opšteg integrala za početne uslove: $t_0=0$, $s_0=s(t_0)$ i $v_0=\dot{s}(t_0)=\dot{s}_0$

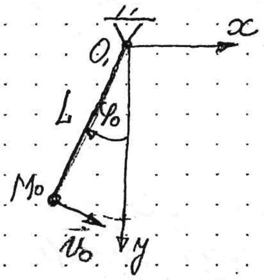
Jednačine (3) i (4) nakon integracije jednačine (2), a u slučaju slobodne tačke, predstavljaju jednačine kompatibilnosti za sistem sila koji deluje na tu slobodnu tačku i dovodi je u kretanje po datoj trajektoriji.

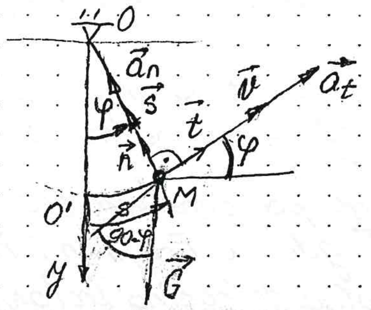
U slučaju da se posmatra kretanje vezane tačke u ravni (npr. Oxy) iz jednačina (3) i (4) se nakon integracije jednačine (2) određuju nepoznate reakcije veza.

(4.) Tačka M mase m koja je lakim, neistegljivim užetom dužine L vezana za nepokretnu tačku O, može da se kreće u vertikalnoj ravni Oxy. U početnom položaju M_0 tačke uže je pomereno od vertikalne ose Oy za ugao otklona φ_0, a tački M je saopštena početna brzina $\vec{v}_0$ u ravni Oxy. Odrediti:

a) silu u užetu u proizvoljnom položaju tačke M

b) zakon kretanja tačke M u slučaju malih otklona φ užeta od ose Oy, kada je $\sin\varphi \approx \varphi$.





Linija putanje tačke M je kružnica sa centrom u tački, a poluprečnika $R = \overline{OM} = L$ (uže je neistegljivo). Položaj tačke M u proizvoljnom trenutku t određen je lučnom koordinatom $s = \overset{\frown}{O'M}$, gde je O' tačka od koje se meri lučna koordinata s i koja se nalazi u presecku kružne trajektorije tačke i ose Oy. Lučna koordinata s se može povezati sa uglom otklona užeta φ čiji smer merenja od ose Oy do pravca užeta OM, prati smer porasta lučne koordinate s:

$\boxed{s = L\varphi}$ (φ - centralni ugao luka kružnice OM)

U položaju M tačke na kružnici vezan je prirodni triedar. Vektor brzine $\vec{v}$ i vektor tangentnog ubrzanja $\vec{a}_t$ tačke u posmatranom trenutku t se pretpostavljaju u smeru ose tangentne prirodnog triedra (prate smer porasta lučne koordinate). Vektor normalnog ubrzanja $\vec{a}_n$ je u pravcu i smeru ose glavne normale u posmatranom položaju tačke na trajektoriji: Brzina v, tangentno ubrzanje a_t i normalno ubrzanje a_n tačke M u trenutku t su:

$$v = \dot{s} = L\dot{\varphi} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = v/L} \quad (1)$$

$$a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_t = \frac{dv}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow a_t = \frac{dv}{d\varphi}\dot{\varphi} \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{a_t = \frac{v\,dv}{L\,d\varphi}} \quad (2)$$

i $a_n = \frac{v^2}{R}$. (3)

Pošto je tačka M vezana užetom za nepokretnu tačku O, tačka se mora osloboditi veze, tj. uže se mora preseći u okolini tačke M, a njeno dejstvo se zameniti silom u užetu $\vec{S}$. Sila $\vec{S}$ ima pravac užeta u okolini tačke M, a smer ka tački vešanja (tački O). Pored sile u užetu $\vec{S}$ na tačku deluje i sila Zemljine teže $\vec{G}$, pa je diferencijalna jednačina kretanja tačke M u vektorskom obliku:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{S}; \quad (4)$$

a njoj pripadajuće Ojlerove diferencijalne jednačine imaju oblik:

$$m\dot{v} = G_t + S_t \Rightarrow \boxed{m\dot{v} = -mg\sin\varphi} \Rightarrow \boxed{\dot{v} = -g\sin\varphi} \quad (5)$$

$$m\frac{v^2}{L} = G_n + S_n \Rightarrow \boxed{m\frac{v^2}{L} = S - mg\cos\varphi} \quad (6)$$

$$0 = 0 \quad (7)$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke po trajektoriji (5) predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda po funkciji $\varphi=\varphi(t)$, jer je:
$a_T=\dot{v}=\frac{d}{dt}(L\dot{\varphi})=L\ddot{\varphi}$;
što znači da se ona može napisati i u obliku: $\ddot{\varphi}=-\frac{g}{L}\sin\varphi$. Međutim, rešenje ove jednačine, $\varphi=\varphi(t)$, nije moguće odrediti preko elementarnih funkcija, već specijalnih funkcija. U tom smislu iz jednačine (5) biće određen samo njen prvi integral $v=v(\varphi)$ kojim se određuje brzina v tačke M u funkciji od veličine položaja tačke M, tj. ugla otklona užeta, φ.
Ako se ima u vidu (2), tj. da je: $a_t=\dot{v}=\frac{v\,dv}{L\,d\varphi}$, to jednačina (5) postaje:

$$\boxed{\frac{v\,dv}{L\cdot d\varphi}=-g\sin\varphi} \qquad (6)$$

Nakon razdvajanja promenljivih v i φ u (6) i njene integracije dobija se:

$$v\,dv=-gL\sin\varphi\,d\varphi \Rightarrow \int_{v_0}^{v}v\,dv=-gL\int_{-\varphi_0}^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=gL[\cos\varphi-\cos(-\varphi_0)] \Rightarrow \boxed{v^2=v_0^2+2gL(\cos\varphi-\cos\varphi_0)} \qquad (8)$$

(Početni položaj je određen uglom $-\varphi_0$, jer je smer merenja ugla početnog otklona užeta od ose Oy do pravca užeta u početnom trenutku to suprotan od smera merenja ugla otklona užeta u trenutku t).
Sada se može pristupiti određivanju sile u užetu S, tj. funkcije $S=S(\varphi)$ iz Ojlerove jednačine (7):

$$S=\frac{mv^2}{L}+mg\cos\varphi \xRightarrow{(8)} \boxed{S=\frac{mv_0^2}{L}-2mg\cos\varphi_0+3mgL\cos\varphi}. \qquad (9)$$

Funkcija (9) pokazuje da sila u užetu u svakom trenutku zavisi od početnih uslova kretanja tačke i od ugla otklona užeta, φ.
Kako je veza tipa uže jednostrano zadržavajuća, sila u užetu mora biti: $S\geq 0$. (10)
Položaj φ_1 u kome veza prestaje da bude zadržavajuća određen je jednačinom: $\boxed{S(\varphi_1)=0}$, tj. iz jednačine:

$$\frac{mv_0^2}{L}-2mg\cos\varphi_0+3mgL\cos\varphi_1=0 \Rightarrow \boxed{\cos\varphi_1=\frac{1}{3}}\left(\cos\varphi_0-\frac{v_0^2}{gL}\right) \qquad (10)$$

b) U slučaju malih otklona užeta, tj. kada važi $\sin\varphi\approx\varphi$, diferencijalna jednačina kretanja tačke po kružnoj trajektoriji (5) dobija oblik:

$$\dot{v}\approx-g\varphi \qquad (11)$$

gde je: $a_T=\dot{v}=L\ddot{\varphi}$, pa (11) postaje:

$$L\ddot{\varphi}=-g\varphi \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0} \text{ i } \boxed{\omega^2=\frac{g}{L}},\ \omega=\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (12)$$

kružna frekvencija sistema (mat. klatna)

Jednačina (12) je nepotpuna, homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Karakteristična jednačina jednačine (12) je: $\lambda^2+\omega^2=0$, pa su njeni koreni $\lambda_1=i\omega$ i $\lambda_2=-i\omega$, pa opšte rešenje jednačine (12) glasi:

$$\varphi=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t, \qquad (13)$$

Za određivanje integracionih konstantni C_1 i C_2 potreban je i prvi izvod po vremenu funkcije (13):

$\dot{\varphi} = -C_1\omega \sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t.$ (14)

Iz (13) i (14) za početne uslove:

$t_0 = 0,\ \boxed{\varphi(t_0) = -\varphi_0}$ i $\boxed{\dot{\varphi}(t_0) = \frac{v(t_0)}{L}} = \frac{v_0}{L}$ (15)

sledi da su integracione konstante

$\boxed{C_1 = -\varphi_0}$ i $\boxed{C_2 = \frac{v_0}{L\omega}}$,

pa je zakon kretanja tačke, tj. klatna:

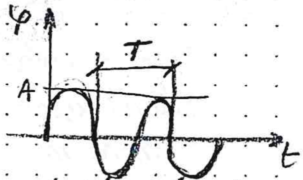
$\boxed{\varphi(t) = -\varphi_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{L\omega}\sin\omega t}$ (16)

Uvođenjem novih konstanti A i α tako da je:

$C_1 = A\cos\alpha$ i $C_2 = A\sin\alpha$;

odakle je:

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ i $tg\alpha = \frac{C_1}{C_2}$,



rešenje (13), odnosno (16), može se napisati u obliku:

$\boxed{\varphi(t) = A\cos(\omega t - \alpha)}$ (17)

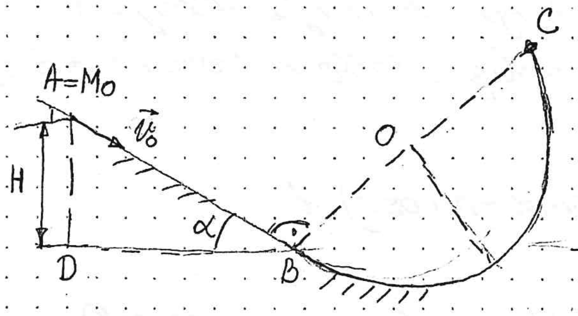
Kretanje opisano funkcijom (17) je takvo da se rastojanje tačke od neke nepokretne tačke periodično povećava i smanjuje. <u>Takvo kretanje naziva se oscilatorno.</u>

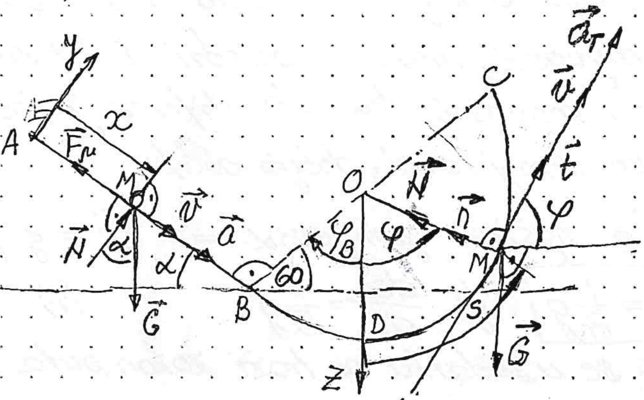
Vreme koje protekne između dva uzastopna prolaska tačke kroz isti položaj, u istom smeru i istom brzinom predstavlja <u>period oscilovanja</u> i iznosi: $T = 2\pi/\omega \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Period oscilovanja ne zavisi od početnih uslova kretanja tačke, tj. klatna.

<u>Napomena</u>.- Tačka koja se kreće po glatkoj kružnici u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile Zemljine teže, naziva se matematičko klatno.

(5) U vertikalnoj ravni, niz hrapavu strmu ravan visine $\overline{AD}=H$ i nagibnog ugla $\alpha=30°$ prema horizontali kreće se tačka M mase m, iz položaja A početnom brzinom intezitela v_0. Strma ravan u tački B prelazi u glatki polukružni luk poluprečnika $R=H\sqrt{3}$ pri čemu je pravac BOC upravan na AB. Koliku početnu brzinu treba saopštiti tački M da bi ona stigla u tačku C? Koeficijent trenja klizanja između tačke M i hrapave strme ravni je $\mu=\sqrt{3}/4$





Kretanje tačke M u vertikalnoj ravni po vezi ABC sastoji se od faze:
1.- kretanja tačke po hrapavoj strmoj ravni
2.- kretanja tačke po glatkoj kružnoj vezi.

U prvoj fazi linija putanje tačke je prava linija AB, pa će kretanje tačke po njoj biti poznato ako je poznat zakon puta tačke $x=x(t)$, gde je x pravolinijska koordinata tačka M koja se meri od njenog početnog položaja $A=M_0$ do njenog položaja M u trenutku t na strmoj ravni, a duž strme ravni. Brzina tačke M je $\vec{v}=\dot{x}\vec{i}$, a ubrzanje $\vec{a}=\ddot{x}\vec{i}$. Na tačku M, nakon uklanjanja veze (strme hrapave ravni) deluje, pored sile teže $\vec{G}$, kao aktivne sile, i reakcija ove veze $\vec{R}$. Reakcija hrapave strme ravni, $\vec{R}$, sastoji se od dve komponente:

- normalne komponente $\vec{N}$ koja je upravna na trag strme ravni AB, a smer suprotan od smera onog pravca u kome tačka, zbog veze, ne može da se pomera (smer sile $\vec{N}$ je u ovom slučaju suprotan od smera ose Ay koja je upravna na strmu ravan, tj: osu Ax koja je vezana za strmu ravan i $\vec{N}\perp\vec{v}$)
- sile trenja klizanja F_μ koja leži u tangentnoj ravni na vezu u položaju M tačke na vezi i koja ima pravac brzine $\vec{v}$ tačke M, ali suprotan smer od $\vec{v}$ u posmatranom trenutku t (sila F_μ je upravna $\vec{N}$); intezitet sile trenje klizanja, F_μ, kao intezitet Kulonovog, suvog trenja je: $F_\mu=\mu N$, gde je μ dinamički koeficijent trenja čija je vrednost tokom kretanja tačke

približno konstantno i nešto manja od vrednosti statičkog koeficijenta trenja μ_0.

Zakon kretanja tačke u vektorskom obliku u prvoj fazi kretanja tačke je:

$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_\mu$. (1)

Projektovanjem leve i desne strane ove jednačine na ose DKS Axy dobijaju se jednačine:

$m\ddot{x} = +mg\sin\alpha - F_\mu$ (2)

i $0 = N - mg\cos\alpha$ (3)

Nakon određivanja intenziteta N normalne komponente reakcije $\vec{N}$ iz (3): $N = mg\cos\alpha$, može se odrediti i intenzitet F_μ sile trenja klizanja: $F_\mu = \mu mg\cos\alpha$, tako da diferencijalna kretanja tačke u pravcu ose Ax, tj. po strmoj ravni, dobija oblik:

$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \Rightarrow \ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ i

$\boxed{\ddot{x} = \frac{1}{8}g}$ tj. $\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{8}g$ (4)

Kako se u zadatku ne traži zakon puta tačke po strmoj ravni $x = x(t)$, već samo brzina tačke na kraju prve faze, tj. kada tačka stigne u položaj B strme ravni u kome je: $x_B = x_1 = x(t_1) = \overline{AB}$, gde je $\overline{AB} = \frac{AD}{\sin\alpha} = 2H$, potrebno naći zavisnost brzine tačke $v = \dot{x}$ od veličine položaj tačke na strmoj ravni, koordinate x tačke, tj. funkciju: $\dot{x} = \dot{x}(x)$. U tom cilju izvršiće se transformacija izvoda $d\dot{x}/dt$ u izvod $d\dot{x}/dx$ na sledeći način:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x},$$

tako da jednačina (4) postaje dif. jednačina prvog reda po funkciji $\dot{x} = \dot{x}(x)$:

$$\frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = \frac{1}{8}g \Rightarrow \dot{x}d\dot{x} = \frac{1}{8}g\,dx$$

čiji je prvi integral:

$$\int_{\dot{x}(0)=v_0}^{\dot{x}=v(x)} \dot{x}d\dot{x} = \frac{1}{8}g\int_{x(0)=0}^{x} dx \Rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{8}gx \Rightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + \frac{1}{4}gx} \quad (5)$$

Iz (5) sledi da je u tački B strme ravni, $x_B = 2H$, brzina tačke M:

$$v_B^2 = v^2(x_B = 2H) \Rightarrow \boxed{v_B^2 = v_0^2 + \frac{1}{2}gH} \quad (6)$$

Ova brzina predstavlja početnu brzinu tačke M za drugu fazu njenog kretanja. Položaj tačke na glatkoj kružnoj vezi biće određen uglom φ koji se meri od vertikalne ose Oz do pravca OM (φ - centralni ugao kružnice po kojoj se tačka kreće). Lučna koordinata tačke u položaju M je:

$s = \overset{\frown}{DM} = R\varphi$, gde je D tačka preseka ose Oz i kružnice.

Brzina v tačke i njeno tangentno ubrzanje a_T u položaju M tačke su:

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = v/R \qquad (7)$$

i $a_T = \dot{v} = R\ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \dot{v}/R$,

dok je njeno normalno ubrzanje a_N:

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_N = R\dot{\varphi}^2$$

Na početku druge faze, kada je tačka M u tački B kružnice, je:

$$\boxed{\varphi_B} = -30^\circ \quad i \quad \boxed{v_B^2} = v_0^2 + \frac{1}{2}gH \qquad (8)$$

Na tačku M u ovoj fazi, pored sile Zemljine teže $\vec{G}$, deluje i reakcija glatke kružne veze $\vec{N}$. Reakcija veze $\vec{N}$, kao reakcija idealne veze ima pravac normale na tangentnu ravan na kružnu vezu u tački M veze, tj. na njen trag, osu tangente Mt na kružnicu ($\vec{N} \perp \vec{v}$). Smer sile $\vec{N}$ je ka centru kružne veze, tački O, zbog toga što je veza zadržavajuća samo s jedne, „unutrašnje" strane (jednostrano zadržavajuća veza).

Zakon kretanja tačke druge faze u vektorskom obliku je:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} \qquad (9)$$

pa su Ojlerove diferencijalne jednačine:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g\sin\varphi \qquad (10)$$

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\varphi \qquad (11)$$

Zakon kretanja tačke po trajektoriji $\varphi = \varphi(t)$, odnosno $s = s(t)$, dobija se iz (10). Prvi integral ove jednačine, kao i u prethodnom zadatku je funkcija koja predstavlja zakon promene brzine ~~brzine~~ tačke v od veličine položaja tačke na veži, ugla φ: $v = v(\varphi)$. Kako je:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi}\dot{\varphi} \quad i, \text{ prema } (7), \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi}\frac{v}{R}$$

, to jednačina (10) dobija oblik:

$$\frac{v\,dv}{d\varphi} = -gR\sin\varphi$$

pa je njen integral:

$$v\,dv = -gR\sin\varphi\,d\varphi \Rightarrow \int_{v_B}^{v=v(\varphi)} v\,dv = -gR\int_{\varphi_B=-30^\circ}^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi \Rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_B^2}{2} = gR(\cos\varphi - \cos(-30))$$

odnosno:

$$v^2 = v_B^2 - gR(\sqrt{3} - 2\cos\varphi) \quad i \quad v^2 = (v_0^2 + \frac{1}{2}gH) - gH\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2\cos\varphi)$$

tj

$$\boxed{v^2 = v_0^2 - \frac{5}{2}gH + 2\sqrt{3}gH\cos\varphi} \qquad (12)$$

Da bi tačka M stigla do položaja C na kružnoj veži, kada je: $\varphi_C = \pi - 30^\circ$, brzina tačke u tom položaju mora biti: $v_C^2 \geq 0$, što znači da mora biti zadovoljen uslov:

$$v_C^2 = v_0^2 - \frac{5}{2}gH + 2\sqrt{3}gH\cos(\pi - 30) \geq 0,$$

tj $v_0^2 - \frac{11}{2}gH \geq 0$,

što znači da početna brzina tačke v_0 mora biti $\boxed{v_0^2 \geq \frac{11}{2}gH}$ (13)

Za $v_0^2=\frac{11}{2}gH$ brzina tačke u položaju C jednaka je: $v_C=0$.

Pored ovog uslova, reakcija kružne veze N mora biti: $N\geq 0$, tj. mora biti:

$$N=\frac{mv^2}{R}+mg\cos\varphi\geq 0\,,\quad za\ -30^\circ\leq\varphi\leq\pi-30^\circ. \qquad (14)$$

Zamenom (12) u (14) dobija se:

$$N=\frac{m}{H\sqrt{3}}\left(v_0^2-\frac{5}{2}gH+2\sqrt{3}\,gH\cos\varphi\right)+mg\cos\varphi\geq 0, \qquad (15)$$

Nakon sređivanja nejednačina (15) glasi:

$$\boxed{v_0^2\geq\frac{5}{2}gH-3\sqrt{3}\,gH\cos\varphi}\,,\quad za\ -30^\circ\leq\varphi\leq\pi-30^\circ. \qquad (16)$$

Najveća vrednost desne strane nejednačine (16) je za $\varphi_C=\pi-30^\circ$, jer je tada $\cos\varphi_C=\cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, što iznosi $\boxed{7gH}$. Početna brzina v_0^2 mora biti veća od najveće vrednosti desne strane nejednačine (16), tj. mora biti:

$$\boxed{v_0^2\geq 7\,gH} \qquad (18)$$

Upoređujući uslove (13) i (18), a s obzirom da je $\frac{11}{2}gH<7\,gH$, konačno sledi da početna brzina tačke mora biti:

$$\boxed{v_0^2\geq 7\,gH}$$

Intenzitet brzine tačke u položaju C za $v_0^2=7gH$ prema (12) je:

$$v_C^2=v_0^2-\frac{5}{2}gH+2\sqrt{3}\,gH\cos(\pi-30),$$

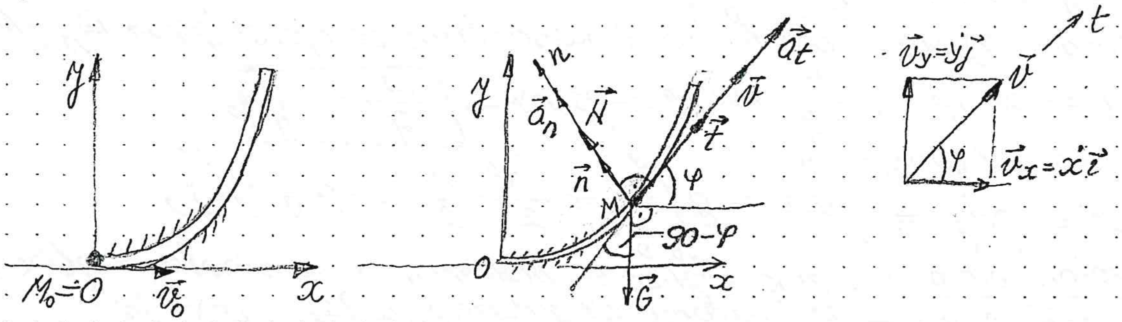
tj.:

$$\boxed{v_C^2=\frac{3}{2}gH},$$

a reakcija veze:

$$N_C=\frac{mv_C^2}{R}+mg\cos\varphi_C=\frac{m}{H\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}gH-mg\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\boxed{N_C=0}$$

⑥ Glatka cev savijena u obliku parabole $y=x^2$ stoji u vertikalnoj ravni. U cev se, u tački $O(0,0)$ (temenu parabole) ubacuje kuglica M mase m brzinom intenziteta v_0. Odrediti reakciju cevi u položaju $A(\sqrt{2}, y_A)$. Osa Oy je orjentisana vertikalno naviše



Na tačku nakon oslobođanja od veze (cevi oblika parabole) deluju: sila zemljine teže $\vec{G}$ i reakcija idealno glatke cevi (površi) $\vec{N}$. Diferencijalna jednačina kretanja kuglice M u vektorskom obliku je:

$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{G}$. (1)

Pošto je poznata linija putanje tačke, za kuglicu u proizvoljnom položaju M biće vezan prirodan triedar. Smer ose tangente (ort $\vec{t}$) je u smeru kretanja tačke, a smer ose glavne normale (ort $\vec{n}$) je ka centru krivine krive $y=x^2$ u tački M krive. Ojlerove diferencijalne jednačine kretanja kuglice (diferencijalne jednačine kretanja kuglice u prirodnom triedru), s obzirom na (1) su:

$m\dfrac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi$ (2)

i $\dfrac{mv^2}{R_K} = N - mg\cos\varphi$. (3)

U jednačina (2) i (3) ugao φ predstavlja ugao koji osa tangente (u tački M parabole) gradi sa horizontalnom osom Ox, odnosno, ugao koji vektor brzine $\vec{v}$ kuglice u trenutku t gradi sa osom Ox (smer vektora $\vec{v}$ se poklapa smerom ose tangente u tački M krive). Ako vektor brzine kuglice $\vec{v}$ razložimo na međusobno upravne komponente $\vec{v}_x = \dot{x}\vec{i}$ i $\vec{v}_y = \dot{y}\vec{j}$, tada, iz trougla brzina sledi da je:

$\boxed{\sin\varphi = \dfrac{\dot{y}}{v}}$, $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{\dot{x}}{v}}$ i $tg\varphi = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} \Rightarrow tg\varphi = \dfrac{dy}{dx}$, tj. $\boxed{tg\varphi = y'}$.

Takođe, treba imati u vidu da se poluprečnik krivine krive u tački $M(x,y)$ krive može, kada je poznata jednačina krive linije u Dekartovom koordinatnom sistemu Oxy $(y=y(x))$, odrediti po formuli:

$R_K = \dfrac{[1+(y')^2]^{3/2}}{|y''|}$.

Za parabolu $y=x^2$ je:

$y' = 2x$ i $y'' = 2$,

pa je:

$tg\varphi = y' = 2x$, $R_K = \dfrac{[1+4x^2]^{3/2}}{2}$ i $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$.

$(\sin\varphi = tg\varphi/\sqrt{1+tg^2\varphi})$

Zakon promene brzine v kuglice u vremenu, odnosno, sa promenom položaja kuglice na vezi, dobija se iz jednačine (2). U tom cilju potrebno je izvod $\frac{dv}{dt}$ na levoj strani te jednačine transformisati na sledeći način:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\dot{y}}, \qquad (4)$$

Jednačina (2) nakon podele leve i desne strane sa m, a s obzirom (4), glasi:

$$\frac{dv}{dy}\dot{y}=-g\sin\varphi \Rightarrow \frac{dv}{dy}v\sin\varphi=-g\sin\varphi \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dy}v=-g},$$

koja nakon integracije:

$$v\,dv=-g\,dy \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv=-g\int_{y_0=0}^{y} dy \Rightarrow \frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=-g(y-\overset{0}{y_0}),$$

daje zakon promene brzine sa promenom y koordinate kuglice:

$\boxed{v^2=v_0^2-2gy}$ → prvi integral dif. jed. kretanja (2) (5)

Brzina kuglice u položaju $A(\sqrt{2}; y_A)$ je:

$v_A^2=v_0^2-2gy_A$, gde je: $y_A=x_A^2=2$,

tako da je: $\boxed{v_A^2=v_0^2-4g}$ za $v_0^2 \geq 4g$ (6)

Sada se iz jednačine (3) može odrediti zakon promene reakcije veze N u funkciji x koordinate kuglice, tj. funkciju $N=N(x)$:

$$N=\frac{mv^2}{R_k}+mg\cos\varphi \Rightarrow \boxed{N}=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}mv^2+mg\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

tj.

$$N=\frac{2m(v_0^2-2gx^2)}{\sqrt{(1+4x^2)^3}}+\frac{mg}{\sqrt{1+4x^2}}$$

U položaju A kada je $x_A=\sqrt{2}$ reakcija veze N_A iznosi:

$$\boxed{N_A}=m\frac{2v_0^2+g}{27}$$

Napomena. - Cev predstavlja dvostrano zadržavajuću vezu. Kuglica može da naleže i na unutrašnju i na spoljašnju stranu cevi, što znači da smer reakcije veze N u posmatranom položaju kuglice na vezi, može biti ili ka centru krivine krive cevi ili suprotnog smera, što zavisi od aktivnih sila koje deluju na kuglicu.

Klasifikacija veza

Vezana tačka M je tačka koja u prostoru (3D-euklidskom) ne može da zauzme bilo koji položaj, a u dozvoljenom položaju ne može da ima bilo koju brzinu. Razlog za to je u činjenici da je tačka M u kontaktu sa drugim objektom, vezom, koji ograničava njeno stanje kretanje, bez obzira koje aktivne sile deluju na nju. Kako su položaji i brzine vezane tačke ograničeni, to veličine koje određuju položaj i brzine te tačke (kao slobodne) u odnosu na referentni objekat ne mogu imati bilo kakve vrednosti, već moraju da zadovolje dopunska ograničenja u formi jednačina i nejednačina. Ove jednačine, odnosno, nejednačine predstavljaju analitičke modele veza i u tom smislu dalje ćemo pod vezama podrazumevati upravo njihove analitičke modele.

Veze koje se izražavaju u formi jednačina nazivaju se zadržavajuće veze. U fizičkom smislu to su veze koje tačka M tokom kretanja u posmatranom intervalu vremena ne napušta. Najjednostavniji oblik zadržavajuće veze je $\boxed{f(\vec{r})=0}$, odnosno, $\boxed{f(x,y,z)=0}$, ako se kretanje tačke M posmatra u odnosu nepokretan DKS Oxyz i gde su x, y i z odgovarajuće koordinate ove tačke kao slobodne. Ovakva veza ne zavisi eksplicitno od vremena i ograničava samo položaj tačke M u prostoru, jer ograničava vrednosti veličina položaja (koordinate tačke M u odnosu na, npr., DKS Oxyz), pa se zbog toga naziva stacionarna geometrijska (integrabilna) zadržavajuća veza. (Primer: $x^2+y^2+z^2-R^2=0$) U smislu analitičke geometrije ovakva jednačina predstavlja jednačinu nepokretne površi po kojoj se tačka M kreće.

Nestacionarna geometrijska zadržavajuća veza je geometrijska veza koja eksplicitno zavisi od vremena:

$\boxed{f(t,\vec{r})=0}$, odnosno, $\boxed{f(t,x,y,z)=0}$.

Ovakva jednačina predstavlja jednačinu površi koja se menja u vremenu, tako što se i sama kreće ili deformiše u prostoru. (Primer: $x^2+y^2+z^2-R^2(t)=0$). Ove veze ne ograničavaju eksplicitno vrednosti veličina koje određuju brzinu tačke: $\vec{v}=\dot{\vec{r}}$, odnosno, $\vec{v}=\{\dot{x},\dot{y},\dot{z}\}$.

Veze koje eksplicitno ograničavaju brzinu $\vec{v}$ tačke, tj vrednosti njenih projekcija na ose odgovarajućeg koordinatnog sistema (DKS Oxyz), nazivaju se kinematsk (diferencijalne). Jednačina zadržavajuće kinematske veze u najopštijem obliku glasi: $\boxed{f(t,\vec{r},\vec{v})=0}$, odnosno, $\boxed{f(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0}$. Ovakva jednačina je neintegrabilna, što znači da funkcija $f=f(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ ne predstavlja izvod po vremenu neke funkcije $\phi=\phi(t,x,y,z)$, tj:

$f(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})\neq\frac{d}{dt}\phi(t,x,y,z)$. Ako je, pak, $f=\frac{d}{dt}\phi(t,x,y,z)$, to bi se kinematska veza mogla svesti na geometrijsku: $\phi(t,x,y,z)-C=0$ i

predstavljala bi kvazikinematsku vezu. Primeri:
1.- kotrljanje bez klizanja kugle po, npr., nepokretnoj površi
2.- klizaljke, roleri.

Veza čija je analitička forma oblika nejednačine predstavlja nezadržavajuću vezu. Ove veze tačka može tokom kretanja da napusti i da nastavi da se kreće kao slobodna, a u ograničenom prostoru.
(Primer: $f(t,\vec{r}) \gtreqless 0$ - nestacionarna geometrijska nezadržavajuća veza; $x^2+y^2+z^2-R^2(t) \geq 0$)

U nastavku se bavimo samo stacionarnim, geometrijskim, zadržavajućim vezama. Sve veze, sa čijim smo se mehaničkim modelima susretali u klasičnoj mehanici (nepokretni cilindrični zglob, nepokretni sferni zglob, laki kruti štap, lako nerastegljivo uže, kruta podloga) predstavljaju veze navedenog tipa, jer eksplicitno ograničavaju položaje kontaktnih tačaka tela i veze u opštem slučaju (x, y, z u jednačinama veze, u ovom slučaju su koordinate kontaktne tačke tela sa odgovarajućom vezom). Jedna veza, npr. sferni zglob, može se analitički predstaviti i sa više jednačina navedenog tipa.

Elementarno stvarno pomeranje i brzina tačke M na vezi

$f(x,y,z)=0$. - Kao što je napred rečeno, jednačina geometrijske, stacionarne, zadržavajuće veze, $f(x,y,z)=0$ predstavlja jednačinu površi u 3D-euklidskom prostoru, a u odnosu na nepokretan DKS $Oxyz$, po kojoj se kreće tačka M mase m, a pod dejstvom sistema aktivnih sila.
Pod elementarnim stvarnim pomeranje tačke, $d\vec{r}$, podrazumeva se pomeranje tačke po vezi (ukoliko tačka nije slobodna) na bilo kom beskonačno malom intervalu vremena $[t, t_1=t+dt]$, a pod dejstvom aktivnih sila.
Neka u trenutku t tačka zauzima na vezi položaj M:

$$t: \ M(x,y,z), \quad x=x(t), y=y(t), z=z(t) \Rightarrow \vec{r}=\{x(t), y(t), z(t)\}$$
$$i \ f(x,y,z)=0$$

U trenutku $t_1=t+dt$ tačka je, pod dejstvom aktivnih sila, prešla u položaj na vezi M_1 koji se nalazi u beskonačno maloj okolini položaja M na vezi, tako da važi:

$$t_1=t+dt: \ M_1(x_1,y_1,z_1), \quad \left.\begin{array}{l} x_1=x(t+dt)\approx x+dx \\ y_1=y(t+dt)\approx y+dy \\ z_1=z(t+dt)\approx z+dz \end{array}\right\} \vec{r}_1=\vec{r}(t+dt)\approx \vec{r}(t)+d\vec{r}$$

$$i \ f(x_1,y_1,z_1)=0 \Rightarrow f(x+dx, y+dy, z+dz)=0.$$

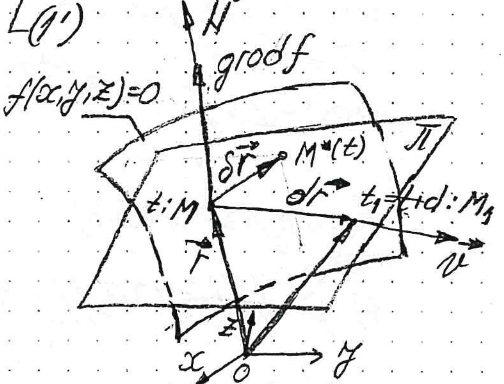
Pošto se položaj M_1 tačke u trenutku $t_1=t+dt$ nalazi u beskonačno maloj okolini položaj M u trenutku t na vezi, to se, do malih veličina prvog reda, može smatrati da se položaji M i M_1 nalaze u tangentnoj ravni π na površ $f(x,y,z)=0$ u tački M površi. Dalje, ako su M i M_1 u ravni π, tada je i vektor elementarnog stvarnog pomeranja tačke po vezi na intervalu vremena $[t, t_1=t+dt]$:

$\overrightarrow{MM_1}=d\vec{r}$, $d\vec{r} \approx \vec{r}(t+dt)-\vec{r}(t)$

$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$, takođe u ravni π.

Kako je položaj ravni π, kao ravni tangentnoj na površ $f(x,y,z)=0$ u tački $M(x,y,z)$ površi, određen pravcem normale na površ, tj. pravcem vektora $\mathrm{grad}\, f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ u tački M, to važi:

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{grad}\, f \perp \pi \\ d\vec{r} \in \pi\end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{grad}\, f \perp d\vec{r} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\mathrm{grad}\, f \cdot d\vec{r}=0}}_{(1)} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0}}_{(1')}$$



Vodeći računa o tome da je:

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r}=\vec{v}dt$, $dt>0$, $\vec{v}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$

to se jednačina (1), odnosno (1'), može napisati u obliku:

$$\underbrace{\boxed{\mathrm{grad}\, f \cdot \vec{v}=0}}_{(2)} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial f}{\partial z}=0}}_{(2')},$$

što znači da je i vektor brzine tačke u posmatranom trenutku t u ravni π.

$\vec{v}\in\pi$, $\vec{v}\perp \mathrm{grad}\, f$.

Jednačina (2), odnosno (2'), pokazuje da geometrijska veza $f(x,y,z)=0$ na indirektan način ograničava brzinu tačke tokom njenog kretanja po toj vezi, tj. vrednosti projekcija vektora $\vec{v}$ na ose DKS $Oxyz$.

Geometrijska veza $f(x,y,z)=0$ ograničava i ubrzanje tačke $\vec{a}$ u svakom trenutku, a po jednačini:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot \mathrm{grad}\, f)=0 \Rightarrow \vec{a}\cdot \mathrm{grad}\, f+\vec{v}\cdot\frac{d}{dt}(\mathrm{grad}\, f)=0 \qquad (3)$$

<u>Reakcija idealno glatke površi $f(x,y,z)=0$. Elementarno virtuelno pomeranje tačke na vezi $f(x,y,z)$.</u>

Neka tačka zauzima položaj $M(x,y,z)$ na površi $f(x,y,z)=0$ u nekom trenutku t. Uočimo virtuelni položaj tačke $M^*(x^*,y^*,z^*)$ na toj površi, vezi, koji odgovara tom istom trenutku t, a koji se nalazi u beskonačno maloj okolini prethodno uočenog položaja $M(x,y,z)$.

Pod <u>elementarnim virtuelnim pomeranjem tačke</u> u posmatranom trenutku t, $\delta\vec{r}$, podrazumeva se pomeranje tačke iz njenog položaja na vezi u posmatranom trenutku, u drugi, virtuelni, vezom dozvoljeni položaj koji odgovara tom istom trenutku t, pri čemu se ne razmatraju aktivne sile koje deluju na tačku. Elementarno virtuelno pomeranje tačke je geometrijski, a ne dinamički pojam. Pošto se položaj M tačke u trenutku t i njemu pridodeljeni virtuelni položaj M^* na površi, nalaze u tangentnoj ravni π na površ $f(x,y,z)=0$ u tački M površi, to se i bilo koji vektor elementarnog virtuelnog pomeranja u posmatranom trenutku t nalazi u ravni π: $\overrightarrow{MM^*} = \delta\vec{r} \in \pi$.

Postoji beskonačno mnogo virtuelnih položaja M^* tačke u odnosu na uočeni položaj M u trenutku t, pa postoji i beskonačno mnogo elementarnih virtuelnih pomeranja $\delta\vec{r}$ tačke po vezi u tom trenutku, ali sva leže u ravni π.

Reakcija idealne veze u bilo kom trenutku t upravna je na bilo koje elementarno virtuelno vezom dozvoljeno pomeranje tačke M (kontaktne tela) po vezi u tom trenutku. To znači da je reakcija idealno glatke površi $f(x,y,z)=0$ u pravcu vektora $\mathrm{grad} f$, jer je:

$$\left.\begin{array}{l}\delta\vec{r} \in \pi \\ \mathrm{grad} f \perp \pi\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{grad} f \perp \delta\vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{N} = \lambda(t)\,\mathrm{grad} f} \quad (4)$$

$$\boxed{\vec{N} = \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}} \quad (4')$$

Funkcija $\lambda = \lambda(t)$ u (4), odnosno, (4') predstavlja Lagranžev množitelj veze.

$$(4) \Rightarrow |\vec{N}| = |\lambda(t)|\,|\mathrm{grad} f| = |\lambda(t)|\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Lagranževe jednačine I vrste za slučaj kretanja tačke po idealno glatkoj nepokretnoj površi.-

Posmatra se kretanje tačke M mase m pod dejstvom sistema aktivnih sila čija je rezultanta $\vec{F}$, po zadatoj idealno glatkoj, stacionarnoj, geometrijskoj zadržavajućoj vezi čija je jednačina u odnosu na DKS $Oxyz$: $f(x,y,z)=0$ (1)

Nakon oslobađanja od veze, dejstvo veze na tačku M se zamenjuje reakcijom veze $\vec{N}$, koja ima pravac normale na površ u posmatranom položaju tačke, pa dif. jednačina kretanja tačke u vektorskom obliku glasi:

$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{F}, \quad (2)$$

gde je: $\vec{N} = \lambda(t)\,\mathrm{grad} f = \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$. (3)

i $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ (4)

Diferencijalne jednačine kretanja tačke u DKS $Oxyz$ s obzirom na (2), (3) i (4), biće:

$$m\ddot{x} = X + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x} \quad (5)$$

$$m\ddot{y} = Y + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y} \quad (6)$$

$$m\ddot{z} = Z + \lambda(t)\,\partial f/\partial z \quad (7)$$

Diferencijalne jednačine (5), (6) i (7) nazivaju Lagranževe dif. jednačine prve vrste. Ovaj sistem od tri jednačine, zajedno sa jednačinom veze (1) obrazuje sistem od četiri jednačine iz kojeg se, za zadate početne uslove:

$t_0=0;\ x_0=x(t_0),\ y_0=y(t_0),\ z_0=z(t_0)$ (8)

$\dot{x}_0=\dot{x}(t_0),\ \dot{y}_0=\dot{y}(t_0),\ \dot{z}_0=\dot{z}(t_0)$, (9)

četiri nepoznate funkcije: konačne jednačine kretanja tačke u pravcima osa DKS: $x=x(t)$, $y=y(t)$ i $z=z(t)$ i Lagranžev množitelj veze $\lambda=\lambda(t)$.

Pri rešavanju sistema jednačina (5), (6), (7) i (1), kao pomoćne jednačine koriste se jednačina oblika:

$$\boxed{\frac{df}{dt}=0} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}=0,\ \text{odnosno},\ \vec{v}\cdot \operatorname{grad} f=0 \qquad (10)$$

i jednačina

$$\boxed{\frac{d^2f}{dt^2}=0} \Leftrightarrow \ddot{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\ddot{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\ddot{z}\frac{\partial f}{\partial z}+\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}+\dot{y}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}+\dot{z}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial z}=0,\ \text{odnosno},$$

$$\vec{a}\cdot \operatorname{grad} f+\vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\operatorname{grad} f=0 \qquad (11)$$

Takođe, pri zadavanju početnih uslova treba voditi računa da uslovi (8) budu u skladu sa jednačinom veze (1), tj. da važi:

$f(x_0, y_0, z_0)=0$,

a da uslovi (9), zajedno sa (8) zadovoljavaju jednačinu (11), tj. da važi:

$$\vec{v}_0\cdot \operatorname{grad} f\Big|_{M_0}=0 \Rightarrow \dot{x}_0\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\dot{y}_0\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0+\dot{z}_0\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0=0.$$

Napomena. — Veza $f(x,y,z)=0$ smanjuje broj stepeni slobode slobodne tačke ($n=3$) za jedan, tako da je broj stepeni slobode tačke čije je kretanje ograničeno navedenom vezom: $n=2$. Naime, iz jednačine $f(x,y,z)=0$ može se odrediti jedna od koordinata tačke M u DKS Oxyz u funkciji preostale dve, npr.:

$f(x,y,z)=0 \Rightarrow z=g(x,y)$.

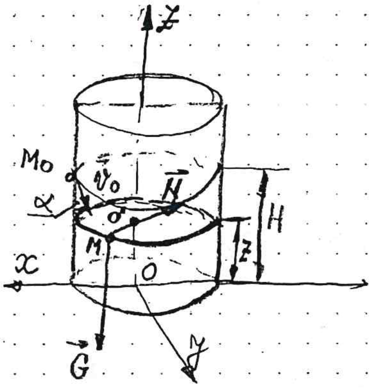
Dakle, vrednosti parametara x i y se mogu slobodno varirati (menjati), dok je vrednost parametra z određena tim vrednostima. Na osnovu toga sledi da posmatrana vezana tačka može da vrši dva nezavisna kretanja koja su u pravcima bilo koje dve ose DKS Oxyz.

Dodatne lekcije

1.- Lagranževe jednačine prve vrste za slučaj kretanja tačke po hrapavoj površi

2.- Lagranževe jednačine prve vrste za slučaj kretanja tačke po glatkoj liniji u 3D-euklidskom prostoru

Primer. – Po unutrašnjoj površi glatkog cilindra, poluprečnika osnove R kreće se teška tačka M mase m. U početnom trenutku tačka je bila u položaju $M_0(R,0;H)$ i imala početnu brzinu intezitela V_0 usmerenu na dole, tako da sa izvodnicom cilindra gradi ugao $\alpha=60°$. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.



Jednačina prave kružne cilindrične površi čija je osa osa Oz DKS $Oxyz$ je:

$$x^2+y^2-R^2=0. \qquad (1)$$

Izvodnice ove površi paralelne osi Oz, pa je njen presek sa bilo kojom ravni paralelnoj sa ravni Oxy: $z=\mathrm{Const}$, kružnica sa centrom na osi Oz (tačka O') i poluprečnika R, u toj ravni.

Upoređivanjem (1) sa jednačinom površi u DKS $Oxyz$: $f(x,y,z)=0$, sledi da je funkcija veze $f=f(x,y,z)$:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-R^2, \qquad (2)$$

pa je reakcija veze, sila $\vec{N}$, koja deluje u proizvoljnom položaju $M(x,y,z)$ tačke na ovoj površi, na tačku:

$$\vec{N}=\lambda\,\mathrm{grad}f \Rightarrow \vec{N}=2\lambda(t)x\vec{i}+2\lambda(t)y\vec{j} \qquad (3)$$

Odgovarajuće diferencijalne jednačine kretanja tačke M su:

$$m\vec{a}=\vec{N}+\vec{G} \Rightarrow m\vec{a}=\lambda\,\mathrm{grad}f+m\vec{g} \Rightarrow \begin{aligned} m\ddot{x}&=2\lambda(t)x &(4)\\ m\ddot{y}&=2\lambda(t)y &(5)\\ m\ddot{z}&=-mg &(6)\end{aligned}$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke u pravcu ose Oz nije funkcija Lagranžeovog množitelja veze $\lambda=\lambda(t)$ i može se integraliti nezavisno od dif. jednačina (4) i (5).
Za početne uslove tačke M u odnosu na osu Oz: $z(0)=H$ i $\dot{z}(0)=V_{0z}=-V_0\cos\alpha$, rešenje jednačine (6) glasi:

$$z=z(t)=-\frac{gt^2}{2}-tV_0\cos\alpha+H \qquad (6')$$

Rešavanje sistema jednačina (1), (4) i (5) zajedno sa pomoćnim jednačinama:

$$\frac{df}{dt}=0 \Rightarrow 2x\dot{x}+2y\dot{y}=0 \Rightarrow x\dot{x}+y\dot{y}=0 \qquad (7)$$

$$i\quad \frac{d^2f}{dt^2}=0 \Rightarrow 2(x\ddot{x}+y\ddot{y}+\dot{y}^2+\dot{x}^2)=0 \Rightarrow x\ddot{x}+y\ddot{y}=-(\dot{y}^2+\dot{x}^2) \qquad (8)$$

svodi se na dva koraka.
U prvom koraku jednačinu (4) treba pomnožiti sa x, jednačinu (5) sa y i tako dobijene jednačine sabrati:

$$(4)\cdot x+(5)\cdot y \Rightarrow m(x\ddot{x}+y\ddot{y})=2\lambda(t)(x^2+y^2). \qquad (9)$$

Kako je iz (1): $x^2+y^2=R^2$, a iz (8) $x\ddot{x}+y\ddot{y}=-(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$, jednačina (9) dobija oblik:

$$\boxed{\dot{x}^2+\dot{y}^2=-\frac{2\lambda(t)}{m}R^2} \qquad (10)$$

U drugom koraku jednačinu (4) treba pomnožiti sa $\dot{x}$, jednačinu (5) sa $\dot{y}$ i tako dobijene jednačine sabrati:

$$(4)\cdot\dot{x}+(5)\dot{y} \Rightarrow m(\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y}) = 2\lambda(t)(\dot{x}x+y\dot{y}) \qquad (11)$$

Kako je prema (7): $\dot{x}x+\dot{y}y=0$ i kako je:

$$\ddot{x}\dot{x} = \frac{d\dot{x}\cdot\dot{x}}{dt} \Rightarrow \boxed{\ddot{x}\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{x}^2}{dt}}$$

i analogno tome: $\boxed{\ddot{y}\dot{y} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{y}^2}{dt}}$,

to se (11) može napisati u obliku:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=0 \Rightarrow \dot{x}^2+\dot{y}^2 = const \qquad (12)$$

Veličina $\dot{x}^2+\dot{y}^2$ predstavlja kvadrat intenziteta projekcije vektora brzine $\vec{v}$ tačke M na ravan upravnu na osu Oz (ravan Oxy), $\vec{v}_{xy}$, tj.: $|\vec{v}_{xy}|^2 = \dot{x}^2+\dot{y}^2$, pa iz (12) sledi:

$$|\vec{v}_{xy}|^2 = const \Rightarrow |\vec{v}_{xy}|^2 = |\vec{v}_{0xy}|^2 \text{ i } |\vec{v}_{0xy}| = v_0 \sin\alpha,$$

tj: $\boxed{\dot{x}^2+\dot{y}^2 = v_0^2 \sin^2\alpha}$ (13)

Na osnovu jednačina (10) i (13) dobija se:

$$-2\frac{\lambda(t)}{m}R^2 = v_0^2\sin^2\alpha \Rightarrow \boxed{\lambda(t) = -\frac{m v_0^2 \sin^2\alpha}{2R^2}} \qquad (14)$$

Pošto je određena funkcija $\lambda = \lambda(t)$ ($\lambda(t) = const$) diferencijalne jednačine kretanja tačke u pravcima osa Ox i Oy postaju:

$$(4) \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{m v_0^2\sin^2\alpha}{R^2}x \Rightarrow \ddot{x}+\omega^2 x = 0, \qquad (15)$$

$$(5) \Rightarrow m\ddot{y} = -\frac{m v_0^2\sin^2\alpha}{R^2}y \Rightarrow \ddot{y}+\omega^2 y = 0, \qquad (16)$$

gde je: $\boxed{\omega^2 = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{R^2}} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{v_0\sin\alpha}{R}}$

Opšta rešenja (15) i (16) su:

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \quad \text{i} \quad y = C_3\cos\omega t + C_4\sin\omega t,$$

a partikularna rešenja za početne uslove:

$$x_0 = x(0) = R \quad \text{i} \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(0) = 0$$

$$\text{i} \quad y_0 = y(0) = R \quad \text{i} \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(0) = v_0\sin\alpha,$$

$$\boxed{x(t) = R\cos\omega t} \quad \text{i} \quad y = \frac{v_0\sin\alpha}{\omega}\sin\omega t, \text{ tj: } \boxed{y = R\sin\omega t}$$

Pogledati zadatak 3.3 i zadatak 3.5 iz knjige „Mehanika - Dinamika tačke", Mitrović Z., Golubović Z., Simonović M.