

Rešenja zadataka iz Matematike 1 - jul 2014

Moguće su greške u rešavanju i pisanju samih rešenja zadataka. Na osnovu ovih rešenja je prof. dr *Slobodan Radojević* pregledao zadatke sa pismenog ispita, te ona važe samo za studente koji su kod njega i slušali nastavu.

1. Rešiti i diskutovati sistem jednačina u zavisnosti od realnog parametra a :

$$\Sigma \quad : \quad \begin{array}{rrrrrr} (a-1)x & + & y & & & = 3 \\ x & & + & 2(1-a)y & - & 3z = 3 \\ x & & - & y & & - z = 2 \end{array}$$

Rešenje

Koristićemo Gausov metod.

$$\begin{array}{rrrrrr} (a-1)x & + & y & & & = 3 \\ x & & + & 2(1-a)y & - & 3z = 3 \leftarrow + \\ x & & - & y & & - \boxed{z} = 2 \leftarrow -3 \end{array} \quad (1)$$

Posle navedene transformacije dobija se sistem:

$$\begin{array}{rrrrrr} (a-1)x & + & \boxed{y} & & & = 3 \leftarrow 2a-5 \\ -2x & + & (5-2a)y & & & = -3 \leftarrow + \end{array} \quad (2)$$

Uz uslov da je:

a) $2a - 5 \neq 0$ dobijamo jednačinu:

$$(a-3) \left(a - \frac{1}{2} \right) x = 3(a-3) \quad (3)$$

Uz uslov da je:

(a) $a - 3 \neq 0$ jednačina (3) svodi se na:

$$\left(a - \frac{1}{2} \right) x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{a - \frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{6}{2a-1}, \quad a \neq \frac{1}{2} \quad (4)$$

Dobijeni rezultat vratimo u prvu jednačinu sistema (2):

$$(a-1)x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - (a-1) \cdot \frac{6}{2a-1} \Rightarrow y = \frac{3}{2a-1}$$

i zatim u treću jednačinu polaznog sistema (1):

$$z = x - y - 2 \Rightarrow z = \frac{6}{2a-1} - \frac{3}{2a-1} - 2 \Rightarrow z = \frac{5-4a}{2a-1}$$

Konačno se rešenje sistema može zapisati:

$$\mathcal{R}(\Sigma) = \left\{ \left(\frac{6}{2a-1}, \frac{3}{2a-1}, \frac{5-4a}{2a-1} \right) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3 \right\} \right\}$$

Ukoliko je $a = \frac{1}{2}$ sistem je protivurečan jer jednačina (4) postaje:

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)x = 3 \Rightarrow 0 = 3 \Rightarrow \boxed{\mathcal{R}(\Sigma) = \emptyset, a = \frac{1}{2}}$$

(b) $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$ sistem (1) svodi se na:

$$\begin{array}{rclcl} 2x & + & y & & = 3 \\ x & - & 4y & - & 3z = 3 \quad \leftarrow + \\ x & - & y & - & \boxed{z} = 2 \quad \leftarrow -3 \end{array}$$

Navedenom transformacijom dobija se sistem:

$$\begin{array}{rcl} 2x & + & y = 3 \\ -2x & - & y = -3 \end{array}$$

odnosno sistem se svodi na jednačinu $2x + y = 3$. Ako je $x = \alpha \in \mathbb{R}$ tada je $y = 3 - 2\alpha$ i $z = 3\alpha - 5$. Rešenje sistema je:

$$\mathcal{R}(\Sigma) = \left\{ (\alpha, 3 - 2\alpha, 3\alpha - 5) \mid \alpha \in \mathbb{R}, a = 3 \right\}$$

b) Za $a = \frac{5}{2}$ dobijamo sistem:

$$\begin{array}{rcl} 3x & + & 2y & = & 6 \\ x & - & 3y & - & 3z & = & 3 & \leftarrow + \\ x & - & y & - & \boxed{z} & = & 2 & \leftarrow -3 \end{array}$$

Posle navedene transformacije svodi se na:

$$\begin{array}{rcl} 3x & + & 2y = 6 \\ -2x & & = -3 \end{array}$$

Sledi da je $x = \frac{3}{2}$, $2y = 6 - 3x \Rightarrow y = \frac{3}{4}$. Konačno treća jednačina polaznog sistema daje

$z = -\frac{5}{4}$. Sistem ima jedinstveno rešenje:

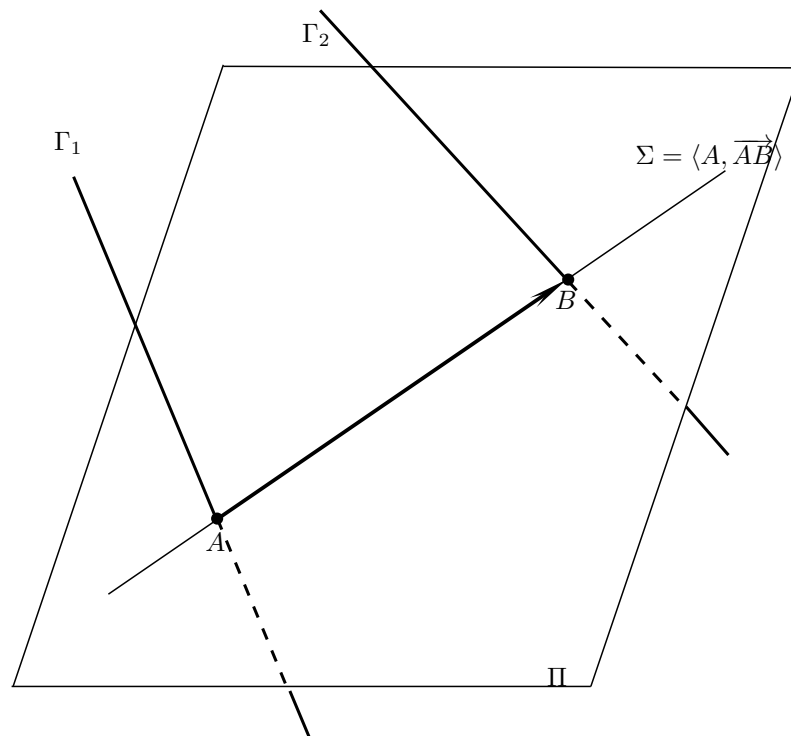
$$\mathcal{R}(\Sigma) = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4} \right) \mid a = \frac{5}{2} \right\}$$

2. Ako su A i B prodorne tačke pravih:

$$\begin{array}{lcl} \Gamma_1 & : & \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1} \\ \Gamma_2 & : & \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{0} \end{array}$$

kroz ravan $\Pi : 3x + y - z + 1 = 0$, odrediti jednačinu prave koja sadrži tačke A i B .

Rešenje



Slika 1: Prodorne tačke A i B formiraju pravu Σ .

Tražena prava je $\Sigma = \langle A, \overrightarrow{AB} \rangle$, gde je $\{A\} = \Pi \cap \Gamma_1$ i $\{B\} = \Pi \cap \Gamma_2$. Parametarski oblik jednačine prave:

$$\begin{array}{lcl} & x & = 4 + 2t \\ \Gamma_1 & : & y = 2 + t \\ & z & = 3 + t \end{array}$$

unesimo u jednačinu ravni Π :

$$3(4 + 2t) + (2 + t) - (3 + t) + 1 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow A(0, 0, 1)$$

Slično i za tačku B . Parametarski oblik jednačine prave:

$$\Gamma_2 : \begin{aligned} x &= 3 + t \\ y &= -4 + 2t \\ z &= 1 \end{aligned}$$

unesimo u jednačinu ravni Π :

$$3(3+t) + (-4+2t) - (1) + 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow B(2, -6, 1)$$

Kako je $\overrightarrow{AB} = (2-0, -6-0, 1-1) = (2, -6, 0) = (1, -3, 0)$ jednačina tražene prave je:

$$\Sigma : \frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{0}$$

3. Dat je krug:

$$\begin{aligned} K &: x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 6z = 19 \\ \Pi &: 3x + y - z = 0 \end{aligned}$$

Odrediti koordinate centra kruga i njegov poluprečnik.

Rešenje

Kako je:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 6z = 19 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 6^2$$

sledi da je centar date lopte $C(2, 2, -3)$ i poluprečnika je $R = 6$. Da bi potvrdili priloženi poprečni presek, proverimo da li $C \in \Pi$.

$$3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 11 \neq 0 \Rightarrow C \notin \Pi$$

Tada formirajmo pravu $\Gamma = \langle C, \vec{\Pi} \rangle$ i nađimo njen prodor kroz ravan Π .

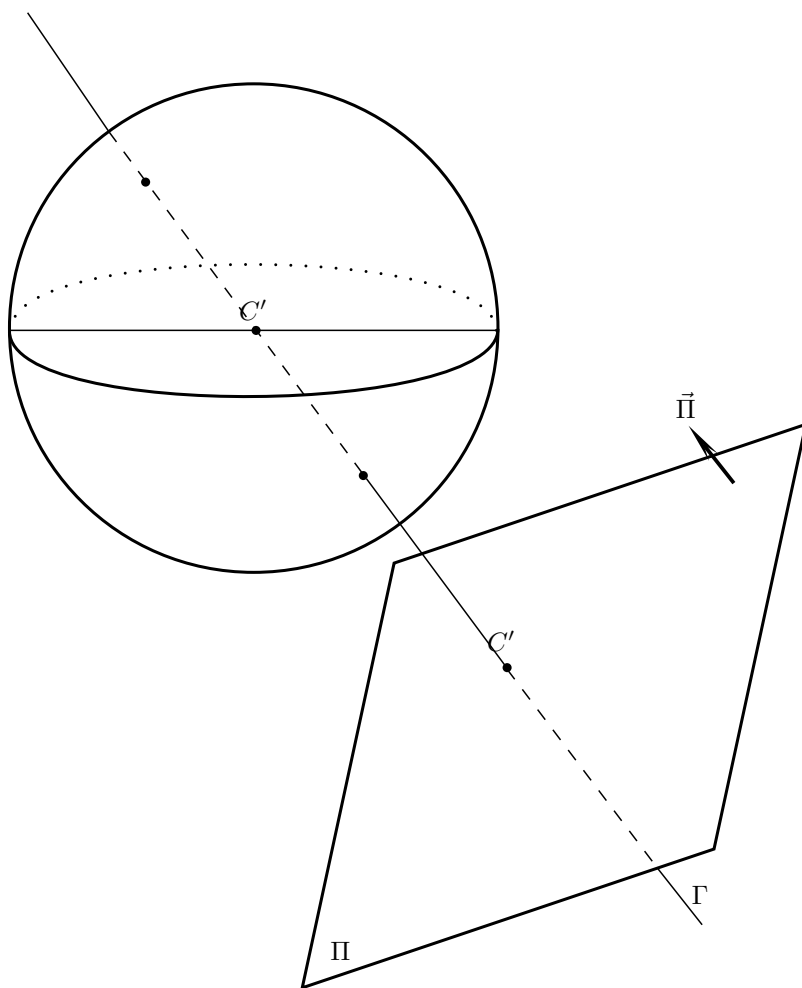
$$\Gamma : \left. \begin{aligned} \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= 2 + t \\ z &= -3 - t \end{aligned}$$

Tačka prodora:

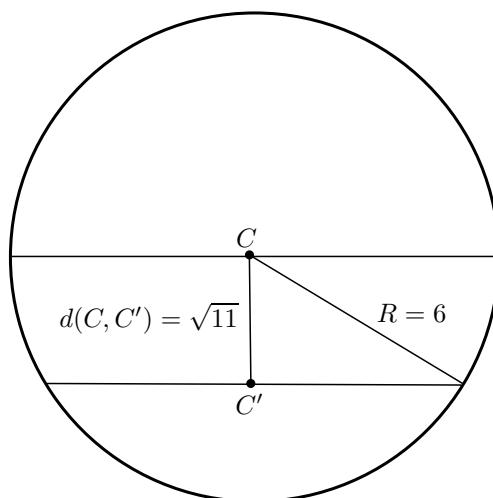
$$3(2+3t) + (2+t) - (-3-t) = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow C'(-1, 1, -2)$$

Ako je $d(C, C') < R$ tada se K i Π seku po krugu, sa centrom u C' .

$$d(C, C') = \sqrt{(2+1)^2 + (2-1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11} < 6 = R$$



Slika 2: Opšti slučaj - odnos lopte i ravni.



Slika 3: Mogući poprečni preseka lopte i ravni.

Poluprečnik kruga je jednak:

$$r^2 = R^2 - d^2(C, C') \Rightarrow r^2 = 36 - 11 = 25 \Rightarrow r = 5$$

4. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$.

Rešenje

Pogledati predavanja strana 65.

5. Aproximirati funkciju $f(x) = -x \sin^2 x$ maklorenovim polinomom stepena 2. Proceniti grešku aaproksimacije na intervali $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$.

Rešenje

Kako je $-x$ polinom stepena 1, dovoljno je funkciju $g(x) = \sin^2 x$ razviti u maklorenov polinom stepena 1:

$$g(x) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + R_2(g(x)), \quad R_2(g(x)) = \frac{x^2}{2!} \cdot g''(\theta x)$$

gde je $0 < \theta < 1$. Potrebni izvodi su jednaki:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g'(x) &= 2 \sin x \cos x \Rightarrow g'(0) = 0 \\ g''(x) &= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x \end{aligned}$$

Sledi da je:

$$g(x) = 0 + R_2(g(x)) \Rightarrow f(x) = -x \cdot g(x) = 0 - x \cdot R_2(g(x))$$

Greška se može oceniti na sledeći način:

$$|-x \cdot R_2(g(x))| = \left| -\frac{x^3}{2!} \cdot g''(\theta x) \right| = \left| \frac{x^3}{2!} \cdot 2 \cos 2\theta x \right| \leq \left| \frac{x^3}{1 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 1 \right| = |x^3| \leq \frac{\pi^3}{8^3} \approx 0.061$$

Jasno je da je $x = \frac{\pi}{8}$ jer je funkcija x^3 rastuća.