Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

27.11.2017.

Rešavanje sistema linearnih jednačina Gausovom metodom eliminacije sa izborom glavnog elementa (pivotiranjem)

1. Koristeći Gausov postupak eliminacije, sa tačnošću 10^{-3} rešisti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2.55x_1 & - & 5.17x_2 & - & 1.62x_3 & = & -1.93 \\ 8.23x_1 & + & 3.67x_2 & - & 2.08x_3 & = & 7.34 \\ 3.02x_1 & + & 2.18x_2 & + & 7.81x_3 & = & 9.23. \end{array}$$

*R*ešenje:

Tačno je da je, pod pretpostavkom da će red veličine dobijenih rešenja biti srazmeran redu veličine koeficijenta, zadata tačnost u korelaciji sa računanjem na 3-4 značajne cifre, medjutim bolje je uvek za svaki slučaj "vući"više značajnih cifara jer to povećava verovatnoću da će naš algoritam biti stabilniji.

Isto tako, ukoliko se eksplicitno zahteva računanje na 3 (ili koliko već) značajnih cifara, nije pogrešno računati na više i tek na kraju zaokružiti na onoliko značajnih cifara koliko se traži.

Poželjno je uvek tokom procesa rešavanja održavati konstantan pristup u smislu principa zaokruživanja podataka, tj. ne zaokruživati čas na dve - čas na 7 decimala/značajnih cifara. Nekad se odlučimo za to da nam referenca bude manje-više stalan broj značajnih cifara, nekad nam je referenca manje-više konstantan broj decimala - zavisi od vrste podataka kojima operišemo, najbitnije je da se ne ispostavi da broj značajnih cifara/decimala na koje zaokružujemo nije dovoljno veliki da podrži numeričku stabilnost našeg algoritma! Dakle, povećavanjem preciznosti računanja **nikad** nećemo pogrešiti.

I konačno, pogrešno je nakon svake računske operacije sprovoditi zaokruživanja, tj eliminisati značajne cifre (barem ona konkretnija, to se uvek ostavlja za kraj), jer se time povećava numerička nestabilnost algoritma. Eventualna zaokruživanja se vrše tek nakon završenog procesa računanja neke veličine.

U konkretnom primeru ćemo zaokruživati na 5 decimala nadajući se da će Gausov metodom elminacije sa pivotiranjem na taj način biti dovoljno stabilan. U krajnjoj liniji, dobijena rešenja uvek možemo vratiti u sistem i proveriti u kolikoj meri su precizno izračunata - **proveru treba sprovoditi kad god je to moguće!**

Najveći koeficijent u datom sistemu po apsolutnoj vrednosti je 8.23, tako da ćemo drugu jednačinu fiksirati. Da bismo uz pomoć ove jednačine eliminisali x_1 iz prve - treba da je pomnožimo sa $-\frac{2.55}{8.23} = -0.30984$, a da bismo eliminisali x_1 iz druge - treba da je pomnožimo sa $-\frac{3.02}{8.23} = -0.36695$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2.55x_1 & - & 5.17x_2 & - & 1.62x_3 & = & -1.93 \\ \boxed{8.23x_1} & + & 3.67x_2 & - & 2.08x_3 & = & 7.34 \\ 3.02x_1 & + & 2.18x_2 & + & 7.81x_3 & = & 9.23, \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ -0.36695 \quad -0.30984 \\ + \end{array}$$

nakon čega dobijamo ekvivalentni sistem, ko se sastoji od, naravno, druge jednačine polaznog sistema i još

$$\begin{array}{rrcrcr} - & 6.30712x_2 & - & 0.97553x_3 & = & -4.20424 \\ & 0.83329x_2 & + & \boxed{8.57326x_3} & = & 6.53659. \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ 0.11379 \end{array}$$

Najveći koeficijent po apsolutnoj vrednosti u novodobijenim jednačinama je 8.57326 i zato ćemo, u cilju eliminisanja x_3 iz prve jednačine drugu pomnožiti sa $\frac{0.97553}{8.57326} = 0.11379$, nakon čega dobijamo jednačinu

$$- \quad 6.21230x_2 \quad = \quad -3.46046. \tag{1}$$

Sledi da je $x_2 = 0.5570$ a zatim iz jednačina koje sadrže uokvireni sabirak

$$x_3 = \frac{6.53659 - 0.83329 \cdot 0.557}{8.57326} = 0.7083, \; x_1 = \frac{7.34 + 2.08 \cdot 0.7083 - 3.67 \cdot 0.5570}{8.23} = 0.8225. \tag{2}$$

Dakle, zaokruženo na 3 decimale, $x_1 = 0.822$, $x_2 = 0.557$ i $x_3 = 0.708$.

2. Gausovom metodom eliminacije sa izborom glavnog elementa, rešiti sistem

$$\begin{aligned} 0.28x_1 + 3.84x_2 + 0.43x_3 + 0.62x_4 &= 4.36 \\ 0.57x_1 + 0.43x_2 + 3.42x_3 + 0.52x_4 &= 4.32 \\ 4.32x_1 + 0.28x_2 + 0.57x_3 + 0.87x_4 &= 2.17 \\ 0.87x_1 + 0.62x_2 + 0.52x_3 + 3.30x_4 &= 4.48. \end{aligned}$$

Rešenje priložiti na 4 značajne cifre.

Rešenje:

Transformacijom datog sistema (uvek biramo promenljivu pomnoženu koeficijentom koji ima najveću apsolutnu vrednost) dobijamo

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
0.28x_1 & + & 3.84x_2 & + & 0.43x_3 & + & 0.62x_4 & = & 4.36 & \quad + \\
0.57x_1 & + & 0.43x_2 & + & 3.42x_3 & + & 0.52x_4 & = & 4.32 & \quad\quad\quad\quad + \\
\boxed{4.32x_1} & + & 0.28x_2 & + & 0.57x_3 & + & 0.87x_4 & = & 2.17 & \quad -0.0.0648 \quad -0.1319 \quad 0.2014 \\
0.87x_1 & + & 0.62x_2 & + & 0.52x_3 & + & 3.30x_4 & = & 4.48 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad +
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad
\begin{array}{rcrcrcrl}
\boxed{3.8219x_2} & + & 0.3931x_3 & + & 0.5636x_4 & = & 4.2194 & \quad -0.1029 \quad -0.1475 \\
0.3931x_2 & + & 3.3448x_3 & + & 0.4052x_4 & = & 4.0337 & \quad + \\
0.5636x_2 & + & 0.4052x_3 & + & 3.1248x_4 & = & 4.0430 & \quad\quad\quad\quad +
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad
\begin{array}{rcrcrl}
3.3044x_3 & + & 0.3472x_4 & = & 3.5997 & \quad -0.1051 \\
\boxed{0.3472x_3} & + & 3.0417x_4 & = & 3.4208 & \quad +
\end{array}
$$

$$\Leftrightarrow \quad 3.0052x_4 = 3.0426,$$

odakle sledi $x_4 = 1.0124$, $x_3 = 0.9832$, $x_2 = 0.8536$, $x_1 = 0.1134$.

Aleksandar Pejčev