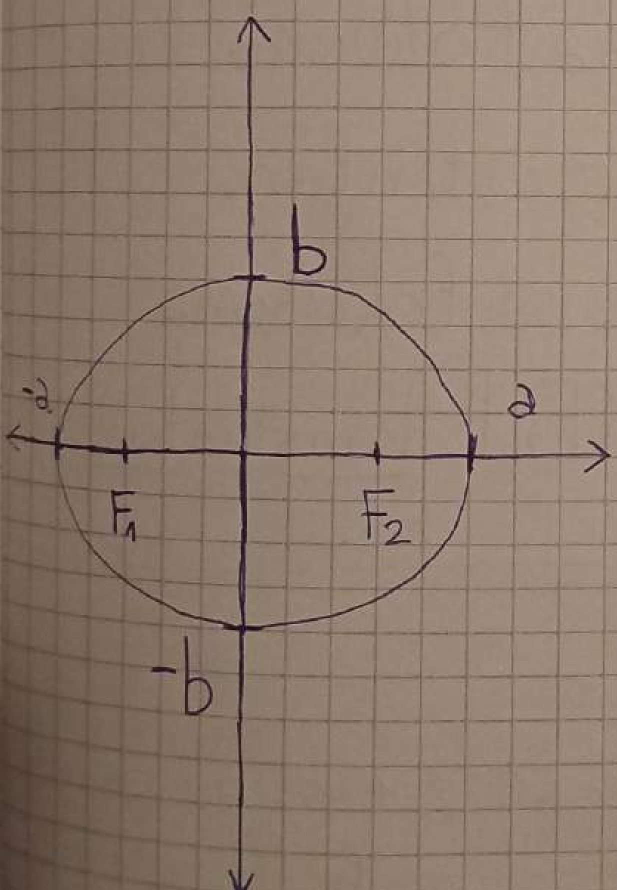
Šta je kriva 2. reda?

- To je svaki skup tačaka u ravni (čak i prazan skup), čija analitička jednačina predstavlja polinom 2. stepena po x i y.

- Pojavljuje se bar jedan od izraza: x^2, y^2, x, y

1) Elipsa



Jednačina elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b \geq 0$$

a - duža poluosa

b - kraća poluosa

ima fokuse (žiže)

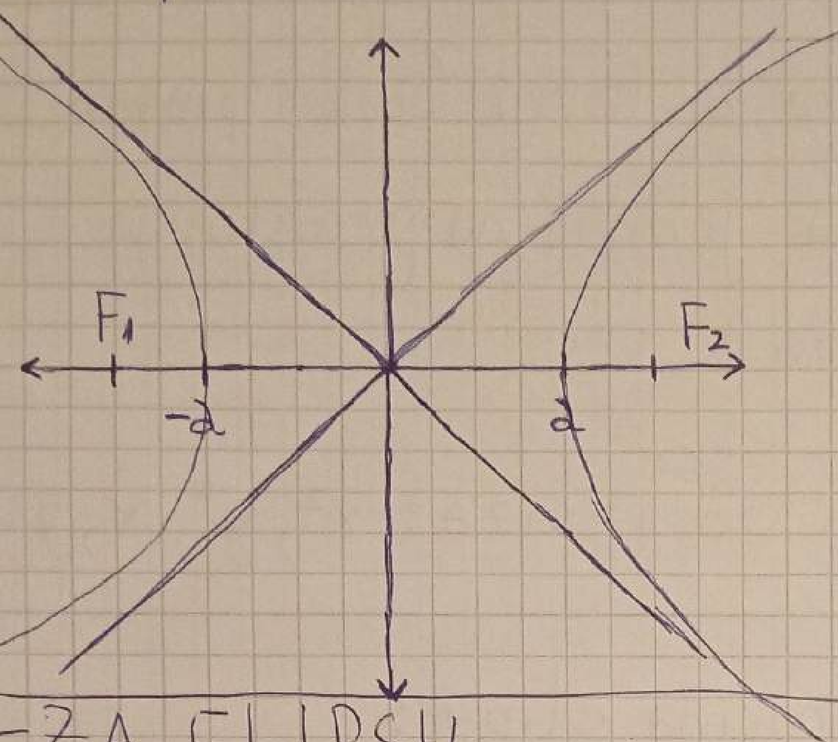
$F_1(-c, 0)$ $F_2(c, 0)$

gde je $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$e = \frac{c}{a}$ - ekscentricitet elipse

c je < a, pa je $0 \leq e < 1$

2) Hiperbola



Jednačina hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

dakle $\frac{x^2}{a^2}\geq 1$, uvek tj.

$a, b>0$ $|x|\geq a$

- ZA ELIPSU

* Za svaku tačku x elipse sa fokusima F_1 i F_2 zbir $XF_1 + XF_2$ je konstantan.
* Za svaku tačku x^2 hiperbole sa fokusima F_1 i F_2 je razlika $|XF_1 - XF_2|$ konstantna.

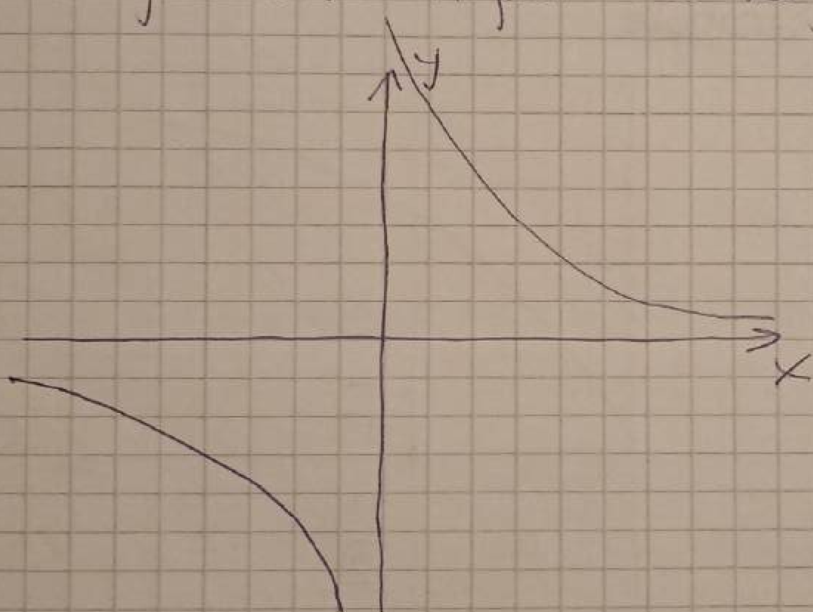
NASTAVAK za hiperbolu

* Kad $x, y \to \pm\infty$, tada $\frac{x^2}{a^2}$ i $\frac{y^2}{b^2}$ teže $+\infty$, pa se uslov $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}+1$ svodi na $\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}$ tj. $y\approx\frac{b}{a}\cdot x$.
* Što znači da sa porastom ~~hiperbola~~ $|x|$ i $|y|$ se hiperbola asimptotski približava pravoj $y=\frac{b}{a}x$ i $y=-\frac{b}{a}x$ - one se zovu njenim asimptotama.

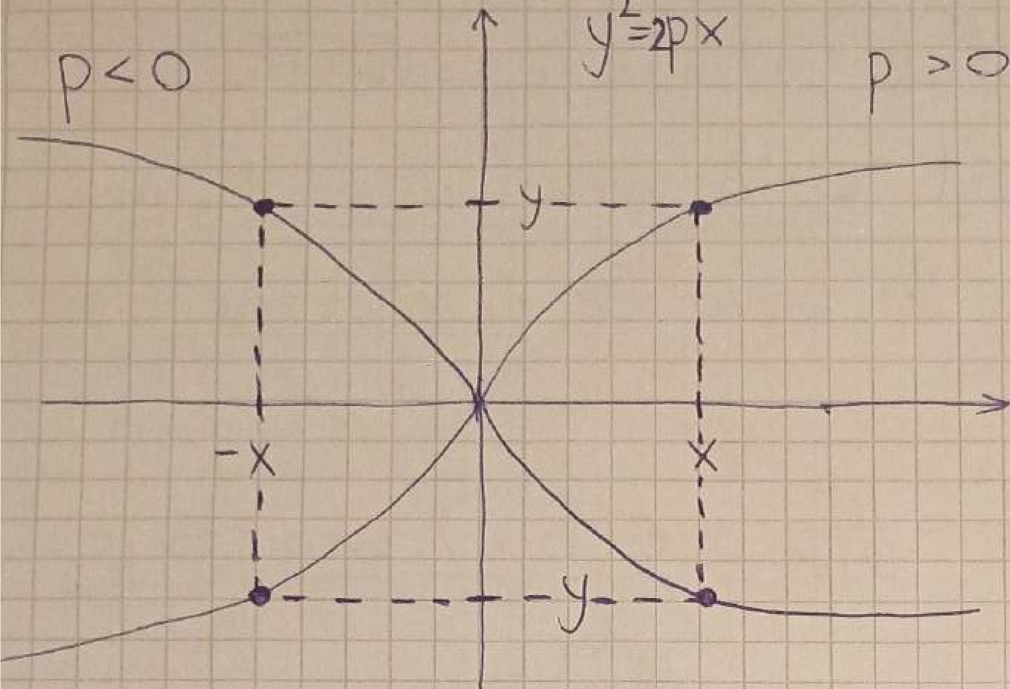
* Fokusi su $F_1(-c,0)$ i $F_2(c,0)$ gde je $c=\sqrt{a^2+b^2}$.
* Ovde je ekscentricitet $e=\frac{c}{a}$ uvek veći od 1, a prave $x=\frac{a}{e}$ i $x=-\frac{a}{e}$ zovu se direktrise hiperbole.

$$x=\frac{a}{c} \Rightarrow \frac{a}{c/a}=\frac{a^2}{c}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot a \in (0,a) \text{ zato što je } \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=1.$$

!!! $y=\frac{1}{x}$ je isto hiperbola koja izgleda ovako:



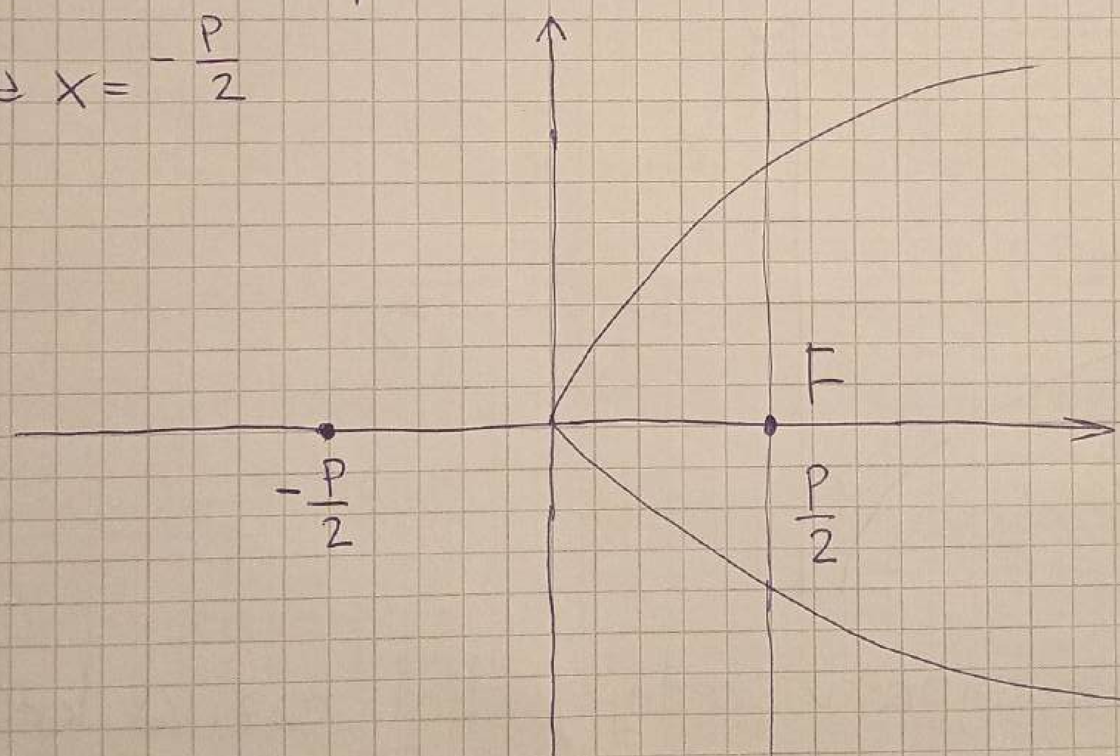
* Parabola se najpre u srednjoj školi naziva kriva $y=ax^2+bx+c$ i ovo svakako jeste kriva drugog reda zbog x^2.
* Međutim kanonskim oblikom parabola se smatra $y^2=2px$ za određeno $p\neq 0$ (kao što se prethodna dva oblika smatraju ~~ ~~ kanonskim za elipsu-hiperbolu).



$T(0,0)$

$F(\frac{p}{2}, 0)$ – fokus parabole

* prava $x = -\frac{p}{2}$



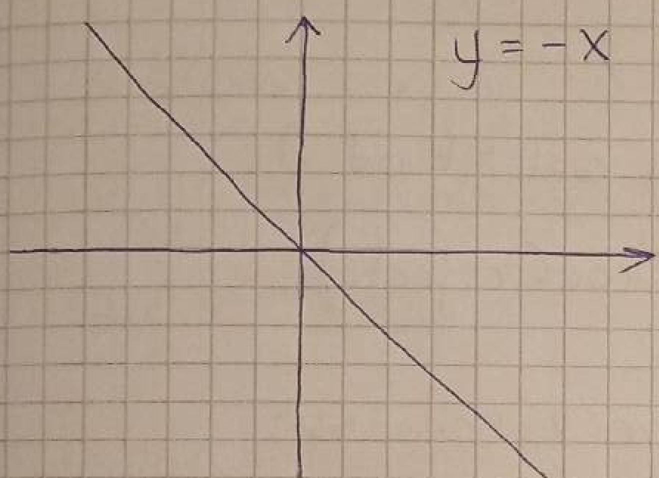
* Dali su $x^2+2xy+y^2=0$ i $x^2+2xy+y^2+x+y=0$ krive 2. reda i šta one predstavljaju u ravni?

$(x+y)^2=0$

$x+y=0$

$x=-y$

prava (formalno jedna dvostruka prava)



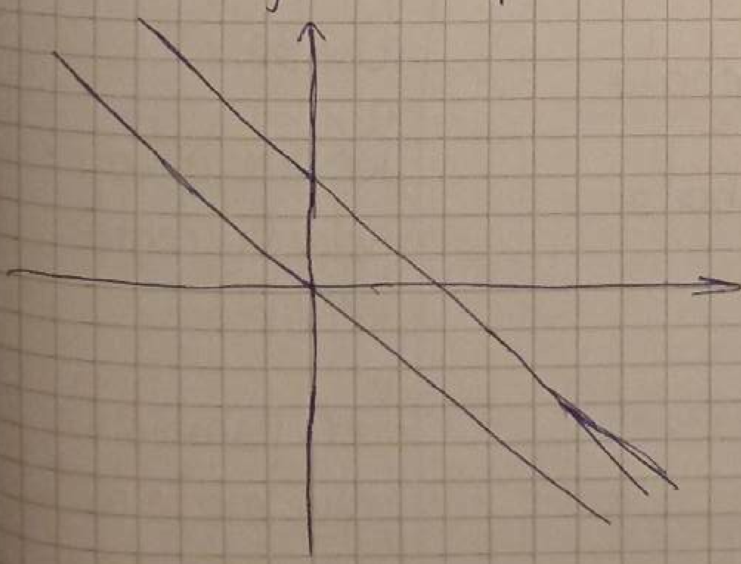
$(x+y)^2+(x+y)=0$

$(x+y)(x+y+1)=0$

$x+y=0 \lor x+y+1=0$

$y=-x \lor y=-x-1$

unija dve prave



$x^2+y^2=0$

samo $x=y=0$

Ovde kriva 2. reda predstavlja samo jednu tačku.

Može predstavljati i prazan skup.

$x^2+y^2+1=0$

* Dokazuje se da svaka analitička kriva 2. reda u ravni predstavlja nešto od do sad navedenog.

* Opšti oblik krive 2. reda u ravni se zadaje kao:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

* Gde je bar jedan od a_{11}, a_{12}, a_{13} različit od 0 (oni i a_{13}, a_{23}, a_{33} su njeni koeficijenti).

* Bitne karakteristike svake krive 2. reda su:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \quad i \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Tzv. mala i velika determinanta u pitanju su <u>determinante simetričnih matrica</u>.

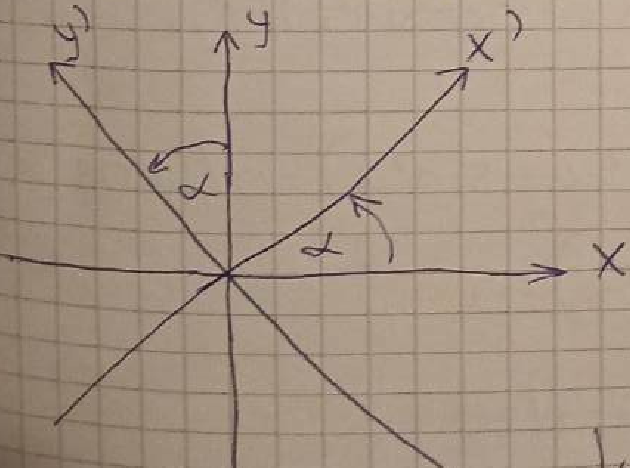
	$\Delta \neq 0$ (nedegenerisane krive)	$\Delta = 0$ (degenerisana kriva)
$\delta > 0$ eliptički tip	elipsa	tačka
$\delta < 0$ hiperbolički tip	hiperbola	Par pravih koje se seku (u centru krivih)
$\delta = 0$ parabolički tip	parabola	Par paralelnih pravi može da bude prazan skup

* Algoritam svođenja krive drugog reda na kanonski oblik.

- Ako je $a_{12} \neq 0$ prvi korak je nalaženje novog koordinatnog sistema (x', y') u kojem j-na ove krive ne sadrži $x'y'$, tj. ima oblik:

$$a_{11}' x'^2 + a_{22}' y'^2 + 2a_{13}' x' + a_{23}' y' + a_{33}' = 0$$

- Ispostavlja se da postoji ugao α (takav da ga je uvek moguće odabrati tako da bude oštar), tako da se koordinantni sistem (x', y') dobija od koordinantnog sistema (x, y) rotacijom za ugao α u pozitivnom smeru oko koordinatnog početka



* Ako tačka M u polaznom koordinatnom sistemu ima koordinate $M(x, y)$, za njene koordinate u novom sistemu važiće

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}}$$

(x', y') u novom koo sistemu

Znači ovo:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= y'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ se ubacuje u j-nu krive:

$$a_{11}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2a_{12}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)$$
$$+ a_{22}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + \dots$$

i tako se određuju novi koeficijenti.

- Nas zanima ovaj uz $x'y'$ da se izjednači sa nulom i na njega utiču samo napisani izrazi).

* $x'y'$ će se ovde pojaviti u formama:

$$-a_{11}\cdot 2\cos\alpha\sin\alpha\cdot x'\cdot y' + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)x'y' +$$
$$a_{22}(2\sin\alpha\cos\alpha)x'y'$$

$\longrightarrow$ pa je koeficijent uz $x'y'$ jednak: $2(-a_{11}\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha)$

$$\sin\alpha\cos\alpha(a_{22} - a_{11}) + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \,/ : \cos^2\alpha$$
$$tg\alpha(a_{22} - a_{11}) + a_{12}(1 - tg^2\alpha) = 0$$
$$a_{12}(tg^2\alpha - 1) + tg\alpha(a_{11} - a_{22}) = 0$$
$$a_{12}\,tg^2\alpha + (a_{11} - a_{22})tg\alpha - a_{12} = 0$$

$\longrightarrow$ ovo je kvadratna jed. po $t = tg\alpha$

$$\boxed{a_{12}t^2 + (a_{11} - a_{22})t - a_{12} = 0}$$

ima $D=(a_{11}-a_{22})^2-4(a_{12})(-a_{12})=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2>0$

zbog $a_{12}\neq 0$

* Dakle oba rešenja su realna i pritom po drugoj Vijetovoj vezi važi:

$t_1 t_2=\frac{-a_{12}}{a_{12}}=-1<0 \rightarrow$ što znači da su t_1 i t_2 različitog znaka.

* Znači po t imamo pozitivno i negativno rešenje i uzećemo $tg\alpha=t>0$ i posle toga $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ i $\sin\alpha=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ (jer je ugao α oštar).

- Tačno je da j-na pre deljenja sa $\cos^2\alpha$ mogla tretirati i kao:

$$2a_{12}\underbrace{(\cos^2-\sin^2\alpha)}_{\cos 2\alpha}+(a_{22}-a_{11})\cdot\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha}=0$$

$$2a_{12}\cos 2\alpha+(a_{22}-a_{11})\sin 2\alpha=0$$

$$tg\, 2\alpha=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$$ - ali nas ~~pre~~ zanimaju $\cos\alpha, \sin\alpha$ a ne od 2α

*Primer: $2x^2+3xy-2y^2-6x-4y+6=0$

1) Određivanje koeficijenata:

$a_{11}=2,\quad a_{12}=\frac{3}{2},\quad a_{22}=-2,\quad a_{13}=-3,\quad a_{23}=-2,\quad a_{33}=6$

2) Mala i velika determinanta

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix}=2\cdot(-2)-\left(\frac{3}{2}\right)^2<0$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & -2 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}-\frac{3}{2}\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}+(-3)\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=2\cdot(-16)-\frac{3}{2}\cdot 3+(-3)\cdot(-3)=-32-\frac{9}{2}+27$$

$$=-5-\frac{9}{2}=-\frac{19}{2}<0$$ Dakle parabola je:

$$a_{12}\cdot t^2+(a_{11}-a_{12})t-a_{12}=0$$

$$\frac{3}{2}t^2+4t-\frac{3}{2}=0$$

$$3t^2+8t-3=0$$

$\boxed{t_1=-3}\quad \boxed{t_2=\frac{1}{3}}$

Mi biramo $tg=\frac{1}{3}$, te $\cos=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ i $\sin\alpha=tg\alpha\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$

$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$

$x = \frac{3x' - y'}{\sqrt{10}}$ $\quad y = \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}}$

$2\left(\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}\right) - 2\left(\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}\right)$

$-6\cdot\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}} - 4\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}} + 6 = 0$

$$\frac{2\cdot(9x'^2 - 6x'y' + y'^2) + 3(3x'^2 - 3y'^2 + 8x'y') - 2(x'^2 + 6x'y' + 9y'^2)}{10}$$

$-\frac{22}{\sqrt{10}}x' - \frac{6}{\sqrt{10}}y' + 6 = 0$

uz $x'y' \to -12 + 24 - 12 = 0$ je u brojiocu

$\boxed{\frac{5}{2}x'^2 - \frac{5}{2}y'^2 - \frac{22}{\sqrt{10}}x' - \frac{6}{\sqrt{10}}y' + 6 = 0}$ $/\cdot 10$

$25x'^2 - 25y'^2 - 22\sqrt{10}x' - 6\sqrt{10}y' + 60 = 0$

u kvad. trinomu

$Ax'^2 + Bx'$ linearni član $\to$

namještanje na kvadrat binoma

$A\cdot\left(x''^2 - 2x''\cdot\frac{B}{2A} + \left(\frac{B}{2A}\right)^2\right)$

$+Bx'' = Ax'' - \frac{B^2}{4A}$

$-\frac{B^2}{2A}$

$= A\cdot\left(x''^2 - \frac{B^2}{4A^2}\right)$

$$x' = x'' + \frac{22}{2\cdot 25} = x'' + \frac{11}{25},\quad y' = y'' - \frac{6\sqrt{10}}{2\cdot 25} = y'' - \frac{3\sqrt{10}}{2\cdot 25}$$

$$(5x')^2 - 2\cdot 5x' \cdot \frac{22}{\sqrt{10}} + \left(\frac{22}{\sqrt{10}}\right)^2 - \left(\frac{22}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$= \left(5x' - \frac{22}{\sqrt{10}}\right)^2 - \left(\frac{22}{\sqrt{10}}\right)^2 = 25\left(x' - \frac{22}{5\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{22^2}{10}$$

$$25\left(x'' + \frac{11\sqrt{10}}{25}\right)^2 - \frac{22}{\sqrt{10}}\left(x'' + \frac{11\sqrt{10}}{25}\right) - \left(y'' - \frac{3\sqrt{10}}{25}\right)^2$$

$$- \frac{6}{\sqrt{10}}\left(y'' - \frac{3\sqrt{10}}{25}\right) 6 = 0$$

$$= 25x'' + \frac{121\cdot 10 - 121\cdot 20}{25} = 25x'' - \frac{121\cdot 10}{25}$$

$$\boxed{= 25'' - \frac{22^2}{10}}$$

$$-\frac{5}{2}\left(y''^2 - \frac{6\sqrt{10}}{25}y'' + \frac{90}{625}\right)$$

$$-6\sqrt{10}y' + \frac{180}{25} = -25y'' - \frac{\cancel{5\cdot 5}\cdot 180}{2\cdot 25^2} + \frac{180}{25}$$

$$= -25y''^2 + \frac{18}{2\cdot 25}$$

$$\underbrace{25\left(x'' + \frac{11\sqrt{10}}{25}\right)^2 - 22\sqrt{10}\left(x'' + \frac{11\sqrt{10}}{25}\right)}_{25x''^2 - \frac{22^2}{10}}$$

$$\underbrace{-25\left(y'' - \frac{3\sqrt{10}}{25}\right)^2 - 6\sqrt{10}\left(y'' - \frac{3\sqrt{10}}{25}\right) + 60 = 0}_{-25y''^2 + \frac{90}{25} + 60 = 0}$$

$$25x''^2 - 25y''^2 = \frac{22^2}{10} - \frac{90}{25} - 60 = -\frac{76}{5}$$

$$25y''^2 - 25x''^2 = \frac{76}{5} \;/\cdot \frac{5}{76}$$ – hoću da mi na jednoj strani bude pozitivno

$$\boxed{\frac{y''^2}{\sqrt{\frac{76}{125}}^2} - \frac{x''^2}{\sqrt{\frac{76}{125}}^2} = 1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$$

$$x' = x'' + \frac{11\sqrt{10}}{25}$$

$$y' = y'' - \frac{3\sqrt{10}}{25}$$

x, y je nešto zarotirana

$\boxed{\text{* Kada je } x' > 0,\ x'' = 0 \quad y'' \text{ ide u desno}}$

Translacija koordinatnog sistema

$$\frac{y''^2}{\sqrt{\frac{76}{125}}} - \frac{x''^2}{\sqrt{\frac{76}{125}}} = 1$$