Sadržaj

4.9 Površi drugog reda

U ovom dijelu ćemo razmatrati neke od površi drugog reda u prostoru. Prilikom proučavanja površi značajno je ispitivati simetričnost površi u odnosu na koordinatne ose i u odnosu na koordinatne ravni. Takođe je značajno uočiti koje krive nastaju presjekom posmatrane površi sa ravnima paralelnim koordinatnim ravnima. Posebno ćemo razmotriti površi nastale rotacijom krive oko date prave prostora, cilindrične i konusne površi.

Neka je dat Descartesov pravougli koordinatni sistem $(O,(\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$ u prostoru. Razmatramo skup tačaka u prostoru koji je opisan algebarskom jednačinom drugog reda u varijablama x, y i z. Dakle, posmatramo polinom drugog reda u varijablama x, y i z

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz \\ &+ 2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}, \end{aligned}$$

gdje je $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $i\le j$, $j=1,2,3,4$ i bar jedan od koeficijenata a_{ij}, $i\le j=1,2,3$ nije 0. Skup

$$\mathcal{S}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=0\right\}$$

nazivamo algebarskom površi drugog reda.

U nastavku razmotrimo osobine simetričnosti površi $\mathcal{S}$ u odnosu na koordinatne ose i koordinatne ravni.

Neka je tačka T data svojim koordinatama (x_1,y_1,z_1). Tačka S sa koordinatama (x_2,y_2,z_2) je simetrična tački T u odnosu na x-osu ukoliko je $x_1=x_2$, $y_1=-y_2$, $z_1=-z_2$. S je simetrično sa T u odnosu na y-osu ako je $x_1=-x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=-z_2$, dok su posmatrane tačke simetrične u odnosu na z-osu ako je $x_1=-x_2$, $y_1=-y_2$, $z_1=z_2$. Slijedi da je površ $\mathcal{S}$ simetrična u odnosu na x-osu ukoliko je $f(x,y,z)=f(x,-y,-z)$, dok je simetrična u odnosu na y-osu ako je $f(x,y,z)=f(-x,y,-z)$, odnosno u odnosu na z-osu ako je $f(x,y,z)=f(-x,-y,z)$.

Tačka T je simetrična tački S u odnosu na xy ravan ukoliko je $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=-z_2$, a u odnosu na xz ravan ako je $x_1=x_2$, $y_1=-y_2$, $z_1=z_2$. Simetričnost tačaka S i T u odnosu na yz ravan implicira da je $x_1=-x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$. Navedena razmatranja govore da je površ $\mathcal{S}$ simetrična u odnosu na xy ravan, ako je $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$, u odnosu na xz ravan, ako je $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$, dok posmatrana površ simetrična u odnosu na yz ravan ukoliko je $f(-x,y,z)=f(x,y,z)$.

Takođe je moguće razmatrati simetričnost u odnosu na koordinatni početak. Površ $\mathcal{S}$ je simetrična u odnosu na koordinatni početak ukoliko je $f(-x,-y,-z) = f(x,y,z)$.

Primjer 4.1. *Posmatrajmo površ određenu jednačinom* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 6z = 0$. *Kako je* $f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 6z$ *i vrijedi* $f(x,y,z) = f(-x,-y,z)$ *posmatrana površ je simetrična u odnosu na* z*-osu. Takođe je* $f(x,y,z) = f(-x,y,z)$ *i* $f(x,y,z) = f(x,-y,z)$*, pa je posmatrana površ simetrična u odnosu na* yz*, odnosno* xz *ravan.*

Drugi metod za ispitivanje osobina površi u prostoru je ispitivanje presjeka posmatrane površi sa ravnima paralelnim koordinatnim ravnima. Presjek porši sa datim ravnima predstavlja liniju presjeka. Ako presječemo površ $\mathcal{S}$ ravni koja je paralelna xy ravni skup tačaka određen jednačinama

$$f(x,y,z) = 0, \quad z = h,$$

definiše jednačinu linije presjeka posmatrane površi sa ravni $z = h$. Kako je h promjenljivi parametar, dobijamo skup linija presjeka površi $\mathcal{S}$ ravnima paralelnim xy ravni. Analogno se može razmatrati presjek površi sa ravnima koje su paralelne yz i xz ravnima.

Primjer 4.2. *Posmatrajmo površ određenu jednačinom* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z = 0$. *Presjek ove površi sa ravni* $z = 1$ *je kriva određena jednačinama* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$, $z = 1$*, što je jednačina elipse. Presjek posmatrane površi sa ravni* $x = 0$ *je kriva određena sa* $\frac{y^2}{9} - z = 0$, $x = 0$*, odnosno* $\frac{y^2}{9} = z$, $x = 0$*, što je jednačina parabole.*

Posebni tipovi površi su rotacione, konusne i cilindrične površi. Razmatramo ih u nastavku.

4.9.1 Rotacione površi

Neka je data ravan π i prava p u toj ravni. Pri rotaciji ravni π oko prave p svaka tačka ravni, koja ne leži na pravoj p, opisuje kružnicu, a tačke prave p ostaju nepokretne.

Ako je u ravni π zadana kriva $\mathcal{L}$, onda rotacijom ravni π oko prave p tačke krive linije $\mathcal{L}$ opisuju kružnicu. Skup tih kružnica formira površ koju nazivamo rotaciona površ.

Odaberimo Descartesov koordinatni sistem tako da je $\vec{k}$ na pravoj p, a $\vec{i}$ u ravni π i $\vec{i} \perp \vec{k}$. Tada je $\left(0, \left(\vec{i}, \vec{k}\right)\right)$ Descartesov pravougli koordinatni sistem u ravni π.

Neka kriva linija $\mathcal{L}$ ima jednačinu $\varphi(x, z) = 0$. Neka je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka rotacione površi nastale rotacijom krive $\mathcal{L}$ oko prave p. Rotacijom oko prave p, tačka M opisuje kružnicu koja leži u ravni koja je ortogonalna na $\vec{k}$ i prolazi tačkom M. Ova kružnica siječe ravan π u dvije tačke, od kojih je jedna sa pozitivnom, a druga sa negativnom apscisom. Označimo te tačke sa M_0 i M_1. Koordinate tačke M_0 su $(x_0, 0, z)$. Udaljenost tačke M od z-ose je $\sqrt{x^2 + y^2}$, dakle, $x_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Jedna od tačaka M_0 i M_1 leži na krivoj L, pa njene koordinate zadovoljavaju jednačinu krive, to jeste,

$$\varphi\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0. \tag{4.1}$$

Analognim razmatranjem izvode se jednačine rotacionih površi u slučaju kada se izabere druga osa rotacije ili se kriva čijom rotacijom nastaje površ nalazi u nekoj drugoj koordinatnoj ravni. Rezultati pomenutih razmatranja su sumirani u sljedećoj tabeli.

Ravan u kojoj je $\mathcal{L}$	Jednačina $\mathcal{L}$ u ravni	Osa rotacije	Jednačina $\mathcal{S}$
$z = 0$	$\varphi(x, y) = 0$	x	$\varphi\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$
$z = 0$	$\varphi(x, y) = 0$	y	$\varphi\left(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y\right) = 0$
$y = 0$	$\varphi(x, z) = 0$	x	$\varphi\left(x, \pm\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0$
$y = 0$	$\varphi(x, z) = 0$	z	$\varphi\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$
$x = 0$	$\varphi(y, z) = 0$	y	$\varphi\left(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0$
$x = 0$	$\varphi(y, z) = 0$	z	$\varphi\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$

4.9.2 Primjeri površi drugog reda

U nastavku dat ćemo neke primjere rotacionih površi i neka njihova poopštenja.

Elipsoid Posmatrajmo površ koja je nastala rotacijom elipse oko njene ose simetrije. Izaberimo vektor $\vec{k}$ tako da on leži na maloj osi elipse. U tom slučaju jednačina elipse je oblika

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ili } \frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1,$$

gdje je c dužina male poluose.

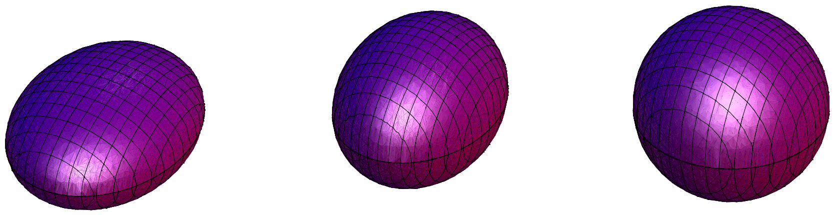
Iz (4.1) slijedi da je jednačina odgovarajuće rotacione površi

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2+y^2}{c^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.$$

Ove površi se nazivaju rotacioni elipsoidi.

Poopštenje rotacionog elipsoida je općenito elipsoid i ima jednačinu oblika

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$



Slika 4.1: Elipsoid, rotacioni elipsoid, sfera

Specijalno za $a=b$, $a=c$ ili $b=c$ elipsoid je rotacioni. U slučaju kada je $a=b=c$ posmatrana površ je sfera. Iz rotacionog elipsoida dilatacijom ili kontrakcijom moguće je dobiti elipsoid.

Jednokrilni hiperboloid Rotacioni jednokrilni hiperboloid je površ koja nastaje rotacijom hiperbole. Posmatrajmo hiperbolu u xz ravni

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

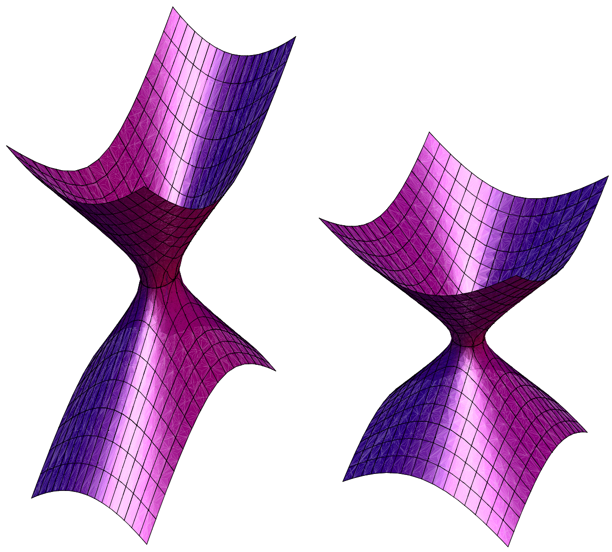
i rotirajmo je oko z-ose. Jednačina nastale površi je

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Iz ove jednačine dilatacijom ili kontrakcijom dobijamo jednokrilni hiperboloid, čija je jednačina u opštem slučaju oblika

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

U opštem slučaju presjeci hiperboloida sa ravnima paralelnim xy ravni su elipse, a u slučaju rotacionog, to su kružnice. Naravno, polazna hiperbola se može odabrati tako da bude u nekoj drugoj koordinatnoj ravni.



Slika 4.2: Jednokrilni hiperboloid, rotacioni jednokrilni hiperboloid

Dvokrilni hiperboloid Rotacijom hiperbole koja je u xz ravni data jednačinom

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

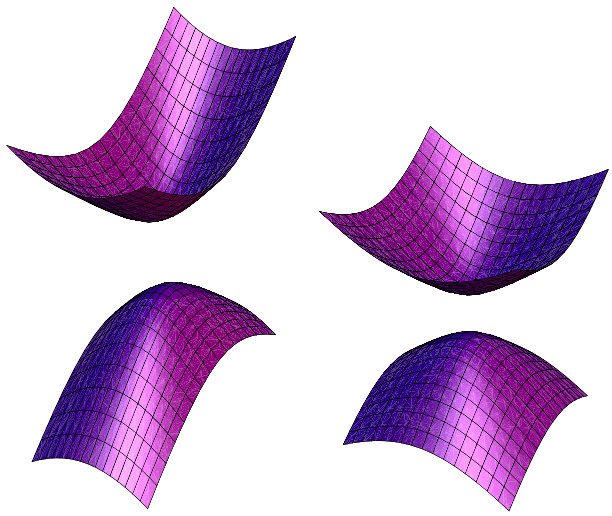
oko z-ose nastaje rotacioni dvokrilni hiperboloid, čija je jednačina

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1, \ (a, c > 0).$$

Dilatacijom ili kontrakcijom dobijamo opštu jednačinu dvokrilnog hiperboloida datu sa

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ (a, b, c > 0).$$

Presjeci ove površi sa ravnima paralelnim xy ravni su elipse, a sa ravnima paralelnim xz i yz ravnima hiperbole. Druge varijante se dobiju izborom hiperbole u drugoj koordinatnoj ravni.

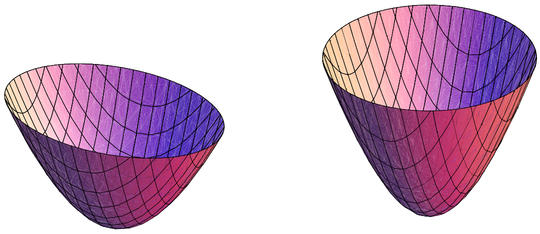


Slika 4.3: Dvokrilni hiperboloid, rotacioni dvokrilni hiperboloid

Eliptički paraboloid Rotacijom parabole $x^2 = 2pz$ oko z-ose dobijamo površ čija je jednačina $x^2 + y^2 = 2pz$, a nazivamo je rotacionim paraboloidom. Dilatacijom ili kontrakcijom dobija se opštiji slučaj površi čija je jednačina

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \ (a, b, p \neq 0),$$

a koju nazivamo eliptički paraboloid. Presjeci sa ravnima paralelnim sa xz i yz ravnima su parabole, a sa ravnima paralelnim sa xy ravni su elipse. Druge varijante se dobiju izborom parabole u drugim koordinatnim ravnima.

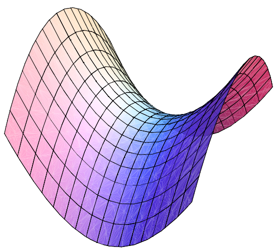


Slika 4.4: Eliptički paraboloid, rotacioni eliptički paraboloid

Hiperbolički paraboloid Površ čija je jednačina data sa

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \ \ (a, b, p \neq 0),$$

naziva se hiperbolički paraboloid. Presjeci s ravnima paralelnim xy ravni su hiperbole, a sa ravnima paralelnim xz i yz ravnima parabole. Konstrukciju ove površi možemo opisati na sljedeći način. Posmatramo dvije parabole koje su u međusobno okomitim ravnima i pustimo da se ravan jedne od tih parabola "pomijera" tako da vrh te parabole klizi po drugoj paraboli.



Slika 4.5: Hiperbolički paraboloid

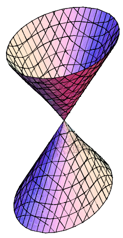
4.9.3 Konusne površi

Neka je $\mathcal{L}$ data kriva u prostoru i V data tačka koja ne leži na datoj krivoj $\mathcal{L}$. Površ koju dobijemo od pravih nastalih spajanjem tačke V sa svim tačkama krive $\mathcal{L}$ nazivamo konusnom površi generisanom krivom $\mathcal{L}$. Prave pomoću kojih nastaje konusna površ nazivaju se generatrise, a kriva pomoću koje se kreira konus je direktrisa.

U slučaju kada je $\mathcal{L}$ kriva drugog reda, jednačina konusne površi je oblika

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Slučaj kada je $a = b$ daje nam jednačinu rotacionog konusa. Jednačina rotacionog konusa se može izvesti i korsiteći opisani postupak formiranja jednačine rotacione površi primijenjen na par pravih koje se sijeku. Jednačina opšte konusne površi u ovom slučaju može se izvesti iz jednačine rotacione konusne površi dilatacijom ili kontrakcijom.

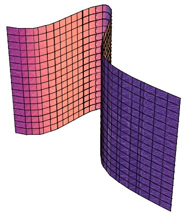


Slika 4.6: Konusna površ

4.9.4 Cilindrične površi

Neka je $\mathcal{L}$ kriva prostora i neka je zadan određeni pravac u prostoru. Površ koja nastaje tako da svakom tačkom krive $\mathcal{L}$ provučemo pravu paralelnu datom pravcu nazivamo cilindričnom površi generisanom krivom $\mathcal{L}$. Kriva $\mathcal{L}$ se naziva generatrisom, a prave p koje čine tu površ su generatrise. Kada je $\mathcal{L}$ kriva drugog reda razlikujemo eliptički, hiperbolički i parabolički cilindar.

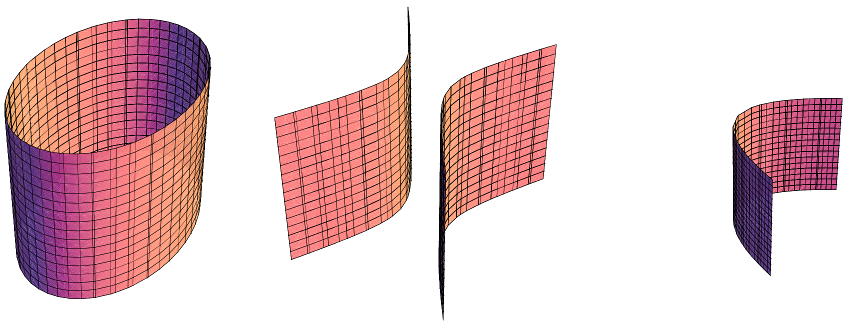
Eliptički cilindar. Jednačina eliptičkog cilindra pri čemu je data prava paralelna z-osi je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Specijalno u slučaju kada je $a = b$ riječ je o rotacionom cilindru.



Slika 4.7: Cilindrična površ

Hiperbolički cilindar. Jednačina hiperboličkog cilindra je $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, u slučaju kada je dati pravac paralelan z-osi.

Parabolički cilindar. Jednačina paraboličkog cilindra je $y^2 = 2px$, u slučaju kada je dati pravac paralelan z-osi.



Slika 4.8: Eliptički, hiperbolički i parabolički cilindar

Navedene jednačine su napisane za slučaj kada je generatrisa u xy ravni, a dati paravac paralelan z-osi. Analogne jednačine se dobiju izborom generatrise u nekoj drugoj koordinatnoj ravni.

Napomenimo da opštim oblikom polinoma drugog reda od tri varijable mogu biti zadani i sljedeći skupovi: unija dviju ravni, ravan, prava, tačka ili prazan skup. Za ove skupove kažemo da su degenerisane površi drugog reda.