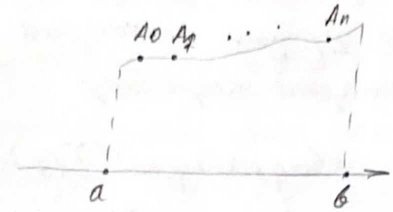
|Предавања|

Пон, 16. 11. 2020.

- Нумеричка интеграција -

$\int_a^b f(x)dx$

x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$



- знамо вредности функције у $n+1$ тачака

- Доступни су нам само $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, па је логично $\int_a^b f(x)dx$ апроксимирати у форми $A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n) = I(f)$

$I(f) \rightarrow$ квадратурна формула (квадратура) са чворовима $x_0, x_1, \dots, x_n$ и коефицијентима $A_0, A_1, \dots, A_n$

$R_n(f) = \left| \int_a^b f(x)dx - I(f) \right| \rightarrow$ грешка квадратурне формуле

$I(f)$ је линеарни оператор у смислу да је $I(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 I(f_1) + \alpha_2 I(f_2)$ за све $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ и функције $f_1(x)$ и $f_2(x)$ за које је $I(f)$ дефинисана

Доказ:

$$I(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = A_0(\alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0)) + \dots + A_n(\alpha_1 f_1(x_n) + \alpha_2 f_2(x_n))$$
$$= \alpha_1 (A_0 f_1(x_0) + A_1 f_1(x_1) + \dots + A_n f_1(x_n))$$
$$+ \alpha_2 (A_0 f_2(x_0) + A_1 f_2(x_1) + \dots + A_n f_2(x_n))$$

$\Rightarrow \boxed{I(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \cdot I(f_1) + \alpha_2 \cdot I(f_2)} \rightarrow$ крај доказа

- Сад је очито да важи $I(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k) = \alpha_1 I(f_1) + \dots + \alpha_k I(f_k)$ (кад је линеарно по два објекта, линеарно је и за произвољно много објеката) за све $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in R$ и $f_1(x), \dots, f_k(x)$ за које је I дефинисана

- Уводе се, још уопштеније, тзв. квадратуре у односу на одговарајућу тежинску ф-ју $\omega(x)$, тачније:

$\int_a^b f(x)\omega(x) \approx A_0 f(x_0) + \dots + A_n f(x_n) \rightarrow$ јасно је да и овде једнако важи линеарност као малопре

- У инжењерским примерима је, наравно, најчешће $\omega(x) = 1$

- За дату квадратуру $I(f) = A_0 f(x_0) + \dots + A_n f(x_n)$ (у односу на коју год тежину) су од посебног значаја оне функције $f(x)$ за које је она скроз тачна тј. за које је $R(f) = 0$, односно

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + \dots + A_n f(x_n)$$

Отуда, ако је $R(f_1) = R(f_2) = \ldots = R(f_m) = 0$, онда је
$R(c_0 f_0 + c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m) = 0$ за све $c_0, c_1, \ldots, c_m \in R$

- Ако је квадратна формула линеарни оператор, онда је и њена грешка линеарни оператор

Специјално, ако је квадратура $I(f)$ скроз тачна за $f_0(x) \equiv 1$, $f_1(x) = x$, ..., $f_m(x) = x^m$, то је она скроз тачна и за произвољан полином m-тог степена (или нижег степена)
$c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ где $c_0, c_1, \ldots, c_m \in R$

Дефиниција:

Највећи $m \in N$ такав да је дата квадратура скроз тачна за сваки полином степена $0, 1, \ldots, m$, а није тачна за сваки полином $m+1$-ог степена, назива се алгебарски степен тачности (прецизности) те квадратуре, у ознаци ADP (algebric degree of precision)

$$\int_a^b f(x)\omega(x) \overset{?}{=} A_0 f(x_0) + \ldots + A_n f(x_n) \quad \text{за } f(x) \in \{1, x, x^2, \ldots, x^m\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b 1 \cdot \omega(x)dx = A_0 \cdot 1 + A_1 \cdot 1 + \ldots + A_n \cdot 1 \\ &\int_a^b x \cdot \omega(x)dx = A_0 \cdot x_0 + A_1 \cdot x_1 + \ldots + A_n \cdot x_n \\ &\vdots \\ &\int_a^b x^m \cdot \omega(x)dx = A_0 \cdot x_0^m + A_1 \cdot x_1^m + \ldots + A_n \cdot x_n^m \end{aligned}\right\}$$

систем од $m+1$ линеарних једначина са $n+1$ непознатих $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (под претпоставком да их још нисмо избалансирали)

Свакако се може постићи $m+1 = n+1$ (тј. $m = n$) јер је тад главна детерминанта овог система

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0 \quad \to \text{Вандермондова}$$

Већ за $m < n$ се појављује систем са више једначина него непознатих, што у старту представља проблем, мада се доказује да се чворови могу одабрати тако да се ADP попне на ред величине $2n$.
То су такозване Гаусове квадратурне формуле

Задатак 7.2.1. (збирка)

Одредити коефицијенте A_1, A_2, A_3 тако да је квадратура $\int_a^b f(x) = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$ има што већи ADP и одредити колико он тада износи ако је:

1° $(a,b) = (0,1)$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$

2° $(a,b) = (-1,1)$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$

3° $(a,b) = (-1,1)$, $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

$$\int_a^b dx = A_1 + A_2 + A_3 = b - a = m_0 \qquad A_1 = \frac{x_2 x_3 m_0 - (x_2 + x_3) m_1 + m_2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$\int_a^b x\,dx = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = \frac{b^2 - a^2}{2} = m_1 \qquad A_2 = \frac{x_3 x_1 m_0 - (x_3 + x_1) m_1 + m_2}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)}$$

$$\int_a^b x^2 dx = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 = \frac{b^3 - a^3}{3} = m_2 \qquad A_3 = \frac{x_1 x_2 m_0 - (x_1 + x_2) m_1 + m_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

2° $m_0 = 2$, $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{2}{3}$

$A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{3}{2}$

(*) ADP може да буде бар 2, јер је $n=2$, али проверавамо да ли може да буде веће

$$\int_a^b x^3 dx = A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 + A_3 x_3^3$$ → провера да ли је тачно за полином $m+1$-ог степена

$$\frac{1^4 - (-1)^4}{4} = \frac{1}{2} \cdot (-1)^3 + 0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{18}$$ → Није, дакле ADP је баш 2

Иначе, ова квадратура гласи:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{2} \cdot f(-1) + \cancel{0 \cdot f\left(-\frac{1}{3}\right)} + \frac{3}{2} \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$$

ако хоћемо да уз помоћ ове квадратуре апроксимирамо:

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-1} + \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{9}}$$ → може да се користи за све функције које су дефинисане у чворовима (за неке прецизније, за неке не)

$\underline{3^\circ}$ $m_0 = 2$, $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{2}{3}$

$A_1 = \frac{5}{9}$, $A_2 = \frac{8}{9}$, $A_3 = \frac{5}{9}$

$\int_a^b x^3 dx = A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 + A_3 x_3^3$

$\frac{1^4 - (-1)^4}{4} = \frac{5}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + \frac{8}{9} \cdot 0^3 + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3$

$0 = 0 \Rightarrow$ ADP је бар 3

$\int_a^b x^4 dx = A_1 x_1^4 + A_2 x_2^4 + A_3 x_3^4$

$\frac{1^5 - (-1)^5}{5} = \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 + \frac{8}{9} \cdot 0^4 + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4$

$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \Rightarrow$ ADP је бар 4 и бар 5 због непарности и симетрије у односу на нулу

$\int_{-1}^1 x^6 dx \neq \frac{5}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 \rightarrow$ ADP није 6

На крају закључујемо да је ADP = 5

Иначе, квадратура од 3 чвора не може имати никако ADP преко 5, јер за $f(x) = \underbrace{(x-x_1)^2 \cdot (x-x_2)^2 \cdot (x-x_3)^2}_{\text{полином 6. степена}}$

$\int_a^b f(x) dx > 0$ јер је свуда $f(x) \geq 0$ ($f(x) = 0$ само у 3 тачке),

а $A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) = 0$ због $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$

Аналогно, у општем случају је ADP највише 2(бр. чворова) - 1

(*) Одабрати чворове такве да $\int_{-1}^1 f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$ има што веће ADP

* Њутн - Котесове квадратурне формуле

Односе се на случај кад је $\omega(x)=1$, при чему су чворови еквидистантни, тј. ако их је $n+1$ - $x_0, x_1, \dots, x_n$, биће

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n), \quad \underline{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b}$$

и то да је $x_k = a + k\cdot h$ $\left(h = \frac{b-a}{n}\right)$ за $\forall k \in \{0, \dots, n\}$.

Добијамо их интеграцијом интерполационог полинома, али малог степена. Најпознатије су:

1° трапезна → кад је полином 1. степена (само 2 чвора - a и b)

2° Симсонова → кад је полином 2. степена (3 чвора - a, $\frac{a+b}{2}$, b)

Трапезна: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

↳ интеграл апроксимирамо површином трапеза

→ ADP је 2

Симсонова: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

↳ њен ADP је 4

Трапезна - ограничење за грешку

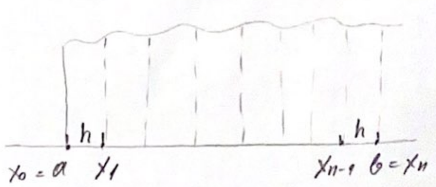
$$|R_2(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \max_{z\in[a,b]} |f''(z)|$$

Симсонова - ограничење за грешку

$$|R_3(f)| \le \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{z\in[a,b]} |f^{IV}(z)|$$

- Примењивање трапезне формуле

$\int_a^b f(x)dx$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = x_0 + k\cdot h$



→ примењује се формула на 2 суседна чвора (боље се апроксимира)

У пракси се код свих квадратура користи такозвано Рунгеова оцена грешке (код оних са еквидистантним чворо

$$|R(f)| \leq \frac{|I^{h}(f) - I^{2h}(f)|}{2^{ADP} - 1},$$ где је h корак квадратуре коју примењујемо

ПОГЛЕДАЈ !!!
ПРИМЕР 5.4
(нумеричко диференцирање)

Задатак 1.

$$\int_0^h f(x)dx = \underbrace{A\cdot f(0) + B\cdot f\left(\frac{2h}{3}\right)}_{2\text{ чвора } (n=0,1)\ \to \text{ полином 1. степена}} + R$$, и оценити грешку

$$f(x) = 1 \to \int_0^h dx = x\Big|_0^h = h = A\cdot 1 + B\cdot 1$$

$$f(x) = x \to \int_0^h x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^h = \frac{1}{2}h^2 = A\cdot 0 + B\cdot\frac{2}{3}h$$

$$\Big\} \quad A = \frac{1}{4}h, \quad B = \frac{3}{4}h$$

$$\Rightarrow \int_0^h f(x)dx = \frac{1}{4}h\cdot f(0) + \frac{3}{4}h\cdot f\left(\frac{2h}{3}\right) + R$$

$$f(x) = P(x) + R_1$$

$$\int f(x) = \int P(x) + \int R_1$$

оцена грешке:

$$R_1 \le \left|\frac{M_2}{2!}(x - \overset{0}{x_0})(x - \overset{\frac{2}{3}h}{x_1})\right|$$ ← оцена грешке интерполационог полинома

$$R \le \int_0^h \frac{M_2}{2!}\left|(x-0)\left(x-\frac{2}{3}h\right)\right|dx = \frac{M_2}{2}\int_0^h x\cdot\left|x-\frac{2}{3}h\right|dx$$ → оцена грешке за интеграл

$$= \frac{M_2}{2}\underbrace{\left(-\int_0^{2h/3} x\left(x-\frac{2}{3}h\right)dx + \int_{2h/3}^h x\left(x-\frac{2}{3}h\right)dx\right)}$$

поделили смо на 2 интеграла да бисмо се ослободили апсолутне заграде

$$R \le \frac{M}{2}\left(-\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2h}{3}\right)\Big|_0^{\frac{2h}{3}} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2h}{3}\right)\Big|_{\frac{2h}{3}}^h\right)$$

$$= \frac{4M_2}{81}h^3 \Rightarrow \boxed{R \le \frac{4M_2}{81}h^3}$$

$$\int_0^h f(x)dx = \frac{h}{4}f(0) + \frac{3h}{4}f\left(\frac{2h}{3}\right) + \frac{4M_2}{81}h^3$$

Задатак 3.

$\int_0^1 f(x)dx = Af(\frac{1}{4}) + Bf(\frac{1}{2}) + Cf(\frac{3}{4}) + R$, и оценити грешку и израчунати $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$

3 чвора $\Rightarrow n=2$: $f(x)=1$ $f(x)=x$ $f(x)=x^2$

$$\left.\begin{array}{l}
\underset{(n=0)}{f(x)=1} \rightarrow \int_0^1 dx = A\cdot 1 + B\cdot 1 + C\cdot 1 \\
\underset{(n=1)}{f(x)=x} \rightarrow \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} = A\cdot\frac{1}{4} + B\cdot\frac{1}{2} + C\cdot\frac{3}{4} \\
\underset{(n=2)}{f(x)=x^2} \rightarrow \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} = A\cdot\frac{1}{16} + B\cdot\frac{1}{4} + C\cdot\frac{9}{16}
\end{array}\right\} \begin{array}{l} A = \frac{2}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3}f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}f(\frac{3}{4}) + R$$

$R_2(x) = \frac{M_3}{3!}\left|(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})\right|$ → за интерполациони полином

- непаран број чворова
- симетричне тачке у односу на централну тачку

$R_3(x) = \frac{M_4}{4!}\left|(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})^2(x-\frac{3}{4})\right|$ → грешка приликом апроксимације функције полиномима

$$R = \int_0^1 \frac{M_4}{4!}\left|(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})^2(x-\frac{3}{4})\right| = 0{,}0003M_4$$

израчунати:

$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx$ $\quad [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0,1]$ (морамо да прилагодимо границе)

уводимо смену: $x = at + b$

$$\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} = a\cdot 0 + b \\ \frac{\pi}{2} = a\cdot 1 + b \end{array} \Rightarrow b = \frac{\pi}{4},\ a = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}, \quad dx = \frac{\pi}{4}dt$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 \frac{\sin(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4}(t+1)}\cdot\frac{\pi}{4}dt = \int_0^1 \frac{\sin\frac{\pi}{4}(t+1)}{t+1}dt$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}(\frac{1}{4}+1)}{\frac{1}{4}+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}+1)}{\frac{1}{2}+1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}(\frac{3}{4}+1)}{\frac{3}{4}+1} + 0.0003M_4$$

$$= 0.61178 + 0.0003M_4$$

Трапезна формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \dots 2y_{n-1} + y_n)$$

$$R \le \left| \frac{b-a}{12} h^2 y''(\varepsilon) \right|$$

Симсонова формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\Big(y_0 + 4\underbrace{(y_1 + \dots + y_{2n-1})}_{\text{непарни}} + 2\underbrace{(y_2 + \dots + y_{2n-2})}_{\text{парни}} + y_n\Big)$$

=>

$$R \le \left| \frac{b-a}{180} h^4 y^{(IV)}(\varepsilon) \right|$$

Рунгеова оцена грешке:

$$|I_H - I_h| = \frac{|I_H - I_h|}{2^k - 1}, \quad \begin{matrix} k = 2 \text{ (трапезна)} \\ k = 4 \text{ (Симсонова)} \end{matrix}$$

Пример 1.

Израчунати интеграл Симсоновом квадратурном формулом $\int_0^{\pi} \frac{dx}{x+\cos x}$ и тачношћу $\varepsilon = 10^{-4}$

$$f(x) = \frac{1}{x+\cos x}$$

$h = \frac{\pi}{4}$

$n = 5$ (непарно)

опора

x	$f(x_i)$	*4 непарни	*2 парни
0	1.0000		
$\pi/4$		0.67001	
$\pi/2$			0.63662
$3\pi/4$		0.60640	
π	0,46694		
	1× 1.46694	4× 1.27641	2× 0.63662

← збир с тим

$$I_{\pi/4} = \frac{\pi/4}{3}(1.46694 + 4 \cdot 1.27641 + 2 \cdot 0.63662) = 2.05403 \to \text{за корак } \pi/4$$

$h = \pi/8$

$I_{\pi/8} = 2.04414$

Рунгеова оцена:

$$\frac{|I_{\pi/8} - I_{\pi/4}|}{15} = 0.0006 = 6 \cdot 10^{-4} > \varepsilon = 10^{-4}$$ (у овом случају преполовимо корак)

Задатак 7.2.2

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2} f(x)dx = A_1 f(-1) + A_2 f(0) + A_3 f(1) + R_3(f)$$

$$f(x)=1 \to \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \pi = A_1 + A_2 + A_3 = m_0$$

$$f(x)=x \to \int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1-x^2}=t \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt \end{array}\right| = \int -\frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\sqrt{1-x^2}|\Big|_{-1}^{1} = 0 = m_1$$

$$f(x)=x^2 \to \int_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = u \right.$$

$$m_k = \int_{-1}^{1}\frac{x^k dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{ll} x^k = u & \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv \\ kx^{k-1}dx = du & \arcsin x = v \end{array}\right| = x^k \arcsin x - k\int x^{k-1}\arcsin x\,dx$$

2° $$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)dx = A_1 f(0) + A_2 f(1) + A_3 f(2) + R_3(f)$$

$$f(x)=x \to \overbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot x\,dx}^{I_1} = \left| \begin{array}{ll} x=u & e^{-x}dx = dv \\ dx = du & -e^{-x} = v \end{array}\right| = -xe^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 0 - e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

$$f(x)=x^2 \to \overbrace{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx}^{I_2} = \left| \begin{array}{ll} x^2=u & e^{-x}dx = dv \\ 2xdx = du & -e^{-x} = v \end{array}\right| = -x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int xe^{-x}dx = 0 + 2I_1 = 2$$

$$f(x)=1 \to \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

$$m_0 = 1,\ m_1 = 1,\ m_2 = 2$$

$$\left.\begin{array}{lr} f(x)=1 \Rightarrow & A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ f(x)=x \Rightarrow & A_2 + 2A_3 = 1 \\ f(x)=x^2 \Rightarrow & A_2 + 4A_3 = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{2} \\ A_2 = 0 \\ A_3 = \frac{1}{2} \end{array}$$

Провера степена тачности:

$$R_2(x^3) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}dx - \cancel{\tfrac{1}{2}f(0)}^{0} - \cancel{0f(1)}^{0} - \frac{1}{2}f(2) = \left| \begin{array}{ll} x^3=u & e^{-x}dx = dv \\ 3x^2dx = du & -e^{-x} = v \end{array}\right|$$

$$= x^3e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 3I_2 - \frac{1}{2}2^3 = 0 + 6 - 4 = 2 \neq 0$$

Степен тачности је 2.