Итеративно решавање линеарних система једначина

Итеративне методе за решавање линеарних система једначина

Посматрајмо линеарни систем од n једначина са n непознатих

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = & \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = & \quad b_2 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = & \quad b_n \end{aligned}$$

или скраћено записано

$$A \cdot \overrightarrow{x}^T = \overrightarrow{b}^T,$$

где је $\overrightarrow{x} = [x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n]$, $\overrightarrow{b} = [b_1 \ b_2 \ \ldots \ b_n]$, и

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Овакав систем се под одређеним условима може решавати итеративним алгоритмима, Јакобијевим, односно Гаус-Сеиделовим. Ради лакшег записа, следи илустрација тих алгоритама на систему 3×3.

За полазну итерацију узима се $\overrightarrow{x} = [x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ x_3^{(0)}] = \overrightarrow{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]$ и итерирамо

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} \right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} \right) \end{aligned}$$

док се не оствари задата тачност. Ово је Јакобијева метода, Гаус-Сеиделова се од ње разликује само по томе што вредности добијене у $k+1$-вој итерацији почињу да се користе већ током трајања те итерације, односно

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} = & \quad \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \right) \\ x_2^{(k+1)} = & \quad \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} \right) \\ x_3^{(k+1)} = & \quad \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} \right). \end{aligned}$$

За нулту итерацију се узимају исте вредности као код Јакобијеве методе.

Јакобијева метода се матрично записује у облику

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\dfrac{a_{31}}{a_{33}} & -\dfrac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \dfrac{b_3}{a_{33}} \end{bmatrix}$$

Уопште, за линеарне итеративне алгоритме облика

$$\left[\overrightarrow{x^{(k+1)}}\right]^T = B \cdot \left[\overrightarrow{x^{(k)}}\right]^T + [\overrightarrow{c}]^T . \tag{1}$$

(вектори $\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{x}$ су димензија $1 \times n$, B је матрица димензија $n \times n$), важи следеће тврђење.

Теорема 1. Процес (1) конвергира уколико је барем један од израза

$$\|B\|_\infty = max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}|$$

(**униформна норма**, која се рачуна тако што се посматрају збирови апсолутних вредности елемената у свакој колони и од њих одабере највећи),

$$\|B\|_1 = max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$$

(**апсолутна норма**, која се рачуна тако што се посматрају збирови апсолутних вредности елемената у свакој врсти и и од њих одабере највећи),

$$\|B\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2}$$

(**еуклидска норма**), строго мањи од 1.

Пример 1. Дат је систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 1.3x_1 + 0.8x_2 + 4.3x_3 &= 3.4 \\ 7.6x_1 + 4.1x_2 + 1.1x_3 &= 2.5 \\ 3.3x_1 + 10.8x_2 - 3.2x_3 &= 1.2. \end{aligned}$$

Доказати да се Јакобијева и Гаус-Сеиделова метода могу применити на решавање овог система и спровести прве три итерације Гаус-Сеиделове методе.

Решење: Овако записан систем не може да се решава дотичним методама, али ако пресложимо једначине тако да се из сваке једначине коефицијент са највећом апсолутном вредношћу налази на главној дијагонали, односно

$$\begin{aligned} 7.6x_1 + 4.1x_2 + 1.1x_3 &= 2.5 \\ 3.3x_1 + 10.8x_2 - 3.2x_3 &= 1.2 \\ 1.3x_1 + 0.8x_2 + 4.3x_3 &= 3.4, \end{aligned}$$

Јакобијева метода ће гласити

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{4.1}{7.6} & -\dfrac{1.1}{7.6} \\ -\dfrac{3.3}{10.8} & 0 & -\dfrac{-3.2}{10.8} \\ -\dfrac{1.3}{4.3} & -\dfrac{0.8}{4.3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{2.5}{7.6} \\ \dfrac{1.2}{10.8} \\ \dfrac{3.4}{4.3} \end{bmatrix}.$$

Апсолутна норма одговарајуће матрице у последњем запису је строго мања од 1 и стога се могу применити и ова и Гаус-Сеиделова метода, која ће гласити

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{7.6}\left(2.5 - 4.1x_2^{(k)} - 1.1x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{10.8}\left(1.2 - 3.3x_1^{(k+1)} + 3.2x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4.3}\left(3.4 - 1.3x_1^{(k+1)} - 0.8x_2^{(k+1)}\right). \end{aligned}$$

Сад се узме $x_1^{(0)} = 2.5$, $x_2^{(0)} = 1.2$, $x_3^{(0)} = 3.4$ и итерира:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{7.6}\left(2.5 - 4.1x_2^{(0)} - 1.1x_3^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{10.8}\left(1.2 - 3.3x_1^{(1)} + 3.2x_3^{(0)}\right) \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{4.3}\left(3.4 - 1.3x_1^{(1)} - 0.8x_2^{(1)}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{7.6}\left(2.5 - 4.1x_2^{(1)} - 1.1x_3^{(1)}\right) \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{10.8}\left(1.2 - 3.3x_1^{(2)} + 3.2x_3^{(1)}\right) \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{4.3}\left(3.4 - 1.3x_1^{(2)} - 0.8x_2^{(2)}\right) \end{aligned}$$

итд...

Постоји још један начин провере конвергенције итеративног процеса (1) који може да пружи више информација него вредност било које од норми матрице B, али му је мана то што је у пракси потпуно применљив само ако је ред матрице B мањи од 3.

За дату матрицу B,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

полином по λ

$$P(\lambda) = det\,(B - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

зове се *карактеристични полином матрице* B, док се корени тог полинома (оне вредности λ, комплексне или реалне, за које је $P(\lambda) = 0$) називају **сопствене вредности** матрице B (E представља јединичну матрицу реда n).

Другим речима, сопствене вредности матрице B су решења (по λ) једначине (следи пример са матрицом 2×2)

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

Важи следеће тврђење.

Теорема 2. Уколико су све сопствене вредности матрице B по модулу мање од 1, итеративни процес (1) конвергира (модул комплексног броја се зна како се рачуна, док се под модулом реалног броја подразумева његова апсолутна вредност).

Пример 2. Доказати да је итеративни процес облика

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \frac{1}{3}x^{(k)} - \frac{1}{9}y^{(k)} + \frac{1}{9} \\ y^{(k+1)} &= 2x^{(k)} + \frac{1}{3}y^{(k)} - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

конвергентан.

Решење. У складу са записом (1) је

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

За матрицу $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ важи

$$\|B\|_\infty = max_{1 \le i \le 2} \sum_{j=1}^{2} |b_{ij}| = max \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{9}, 2 + \frac{1}{3} \right\} = \frac{7}{3} > 1,$$

$$\|B\|_1 = max_{1 \le j \le 2} \sum_{i=1}^{2} |b_{ij}| = max \left\{ \frac{1}{3} + 2, \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \right\} = \frac{7}{3} > 1,$$

(случајно се потрефило да су вредности униформне и апсолутне норме међусобно једнаке) и

$$\|B\|_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} > 1.$$

Дакле, Теорема 1. се у овом случају не може применити. Међутим, сопствене вредности матрице B налазимо из

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{3} - \lambda & -\frac{1}{9} \\ 2 & \frac{1}{3} - \lambda \end{array} \right| = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) - 2\left(-\frac{1}{9}\right) = \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0.$$

Решавањем квадратне једначине налазимо

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{3},$$

односно $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} < 1$, одакле на основу Теореме 2. следи да дати итеративни процес ипак конвергира.

Александар Пејчев