## 2.6. Задаци за вежбу

**1.** Методама (а) половљења интервала, (б) Њутна, (в) регула-фалси и (г) општом методом итерације, одредити са тачношћу $\varepsilon = 10^{-2}$ сва решења једначине

$$x \log x = 1.2.$$

**2.** Израчунати Њутновом методом на четири сигурне цифре сва решења једначине

$$6 \sin x = x^3.$$

**3.** Одредити на пет сигурних цифара највеће по модулу решење једначцине

$$15x - 10 \sinh x = 1.$$

**4.** Одредити са тачношћу $5 \cdot 10^{-6}$ сва решења једначине

$$x \sinh x = 1.$$

**5.** Методом регула-фалси одредити са тачношћу $5 \cdot 10^{-5}$ сва решења једначине

$$\exp x - 2(x-1)^2 = 0.$$

**6.** Наћи све реалне корене алгебарске једначине $P_4(x) \equiv x^4 - 4x + 1 = 0$.

**7.** Методом итерације са тачношћу $0.5 \cdot 10^{-3}$ наћи сва решења једначине

$$\ln(x+3) - \sin x = 0.$$

**8.** Методом итерације са тачношћу $10^{-3}$ наћи све корене једначине

$$x + e^x = 0.$$

**9.** Наћи на три сигурне цифре решење једначине

$$x - \sin x = 0.25.$$

**10.** Нека је $f(x) = \pi/2 + x - \arctan x$, $x \in \mathcal{R}$. Доказати да за сваки пар тачака $x$, $y$ постоји константа $q < 1$ тако да је

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$$

а пресликавање $f$ нема непокретну тачку.

**11 P.** Написати програм за налажење решења једначине $f(x) = 0$ методом половљења интервала. Улазне величине су функција $f(x)$, интервал $[a, b]$ на коме је изоловано једно решење једначине и дозвољена грешка $\varepsilon$ апроксимације $x_n$.

**12 P.** Написати програм за налажење решења једначине $f(x) = 0$ Њутновом методом. Улазне величине су функције $f(x)$ и $f'(x)$, интервал $[a, b]$ на коме је изоловано једно решење једначине, почетна апроксимација $x_0$ и дозвољена грешка $\varepsilon$ апроксимације $x_n$.

Уколико је у некој итерацији $f'(x_k)$ блиско нули урадити један корак методом половљења, па затим наставити примену Њутновог алгоритма.

Представити итеративни процес графички – нацртати график функције $f(x)$ и њене тангенте у тачкама $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \dots, n-1$.

**13 P.** Написати програм за налажење решења једначине $f(x) = 0$ методом (а) сечице, и (б) регула-фалси са могућношћу избора од стране корисника. Улазне величине су функција $f(x)$, интервал $[a, b]$ на коме је изоловано једно решење једначине и дозвољена грешка $\varepsilon$ апроксимације $x_n$.

Представити итеративни процес графички – нацртати график функције $f(x)$ и њене сечице одређене тачкама $(x_k, f(x_k))$ и $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ у случају методе сечице, тј. тачкама $(x_k, f(x_k))$ и $(x_F, f(x_F))$, $k = 1, \dots, n-1$, у случају методе регула-фалси.

**14 P.** Написати програм за налажење решења једначине $f(x) = 0$ комбиновањем Њутнове методе и методе сечице (видети пример 9). Улазне величине су функције $f(x)$ и $f'(x)$, интервал $[a, b]$ на коме је изоловано једно решење једначине и дозвољена грешка $\varepsilon$ апроксимације $x_n$.

Представити итеративни процес графички – нацртати график функције $f(x)$, њене тангенте у тачкама $(\bar{x}_k, f(\bar{x}_k))$, и сечице одређене тачкама $(x_k, f(x_k))$ и $(\bar{x}_k, f(\bar{x}_k))$, $k = 0, \dots, n-1$.

**15 P.** Написати програм за налажење решења једначине $x = g(x)$ методом итерације. Улазне величине су функција $g(x)$, интервал $[a, b]$ на коме је изоловано једно решење једначине, почетна апроксимација $x_0$ и дозвољена грешка $\varepsilon$ апроксимације $x_n$.

Представити итеративни процес графички – нацртати графике функција $y = g(x)$ и $y = x$, и назначити израчунате апроксимације (као на слици 9.).

**16 P.** Написати програм за налажење решења једначине $x = r\,x(1-x)$ на интервалу $[0, 1]$ методом итерације. Улазне величине су вредност реалног параметра $r$, почетна итерација $x_0 \in (0, 1)$, задата тачност $\varepsilon$ и максимални дозвољени број итерација (у случају да процес не конвергира).

Представити итеративни процес графички – нацртати графике функција $y = g(x)$ и $y = x$, и изломљеном линијом повезати итерације одређене до постизања задате тачности или максималног броја итерација.

За оне који желе да науче више – Бифуркациони дијаграм. За вредности $r \in [2.8, 4]$ цртати на графику чланове низа $x_n$ почев од неког $n$ (рецимо $N_{min} = 1000$). $x$ координата је изабрана вредност за $r$, а $y$ координате су вредности $x_n$, $N_{min} \le n \le N_{max}$, израчунате за изабрано $r$ итеративним алгоритмом. У случају конвергенције итеративног алгоритма вредности $x_n$ које се цртају на графику биће једнаке, те ће бити представљене једном тачком, а у противном ће представљати цео одсечак $[0, 1]$. Корак по $r$ треба да буде што мањи да би график био што прецизнији. Корак се рачуна тако што се дужина интервала, разлика $(4 - 2.8)$, подели са бројем пиксела који представљају $x$-осу. Слика која се добија је бифуркациони дијаграм. Улазни параметри су почетна апроксимација $x_0$ и бројеви $N_{min}$ и $N_{max}$ који одређују тачке $x_n$, $N_{min} \le n \le N_{max}$, које се приказују на графику за свако $r$. Може се узети, на пример, да је $x_0 = 0.3$, $N_{min} = 1000$ и $N_{max} = 2000$.

**1.8.** Запремина ваљка рачуна се изразом $V = r^2\pi h$. Број $\pi$ можемо узети са произвољним бројем сигурних цифара, дакле са довољно великом тачношћу тако да не утиче на тачност резултата. Ако користимо принцип једнаких релативних грешака $\delta(\overline{r}) = \delta(\overline{h}) = \delta$, добијамо да је

$$\delta(\overline{V}) = 2\,\delta(\overline{r}) + \delta(\overline{h}) = 3\,\delta = 0.01, \quad \text{те следи да је} \quad \delta(\overline{r}) = \delta(\overline{h}) = 0.003 = 0.3\%.$$

**1.9.** Приближна вредност функције једнака је $\overline{u} = u(\overline{x}, \overline{y}) = 371.93$. Изводи по $x$ и $y$ израчунати за дате приближне вредности једнаки су

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 12x\left(\log x - \sin(2y)\right) + 6x\log e, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = 88.55,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -12x^2\cos(2y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) = 1127.7.$$

Применом принципа једнаких утицаја добијамо да су максималне дозвољене апсолутне грешке аргумената

$$\Delta(\overline{x}) = \frac{\Delta(\overline{u})}{2\left|\frac{\partial u}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})\right|} = \frac{0.5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 88.55} = 0.28 \cdot 10^{-4},$$

$$\Delta(\overline{y}) = \frac{\Delta(\overline{u})}{2\left|\frac{\partial u}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})\right|} = \frac{0.5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 1127.7} = 0.22 \cdot 10^{-5}\,\text{rad} = 0.45''.$$

## 2. Једначине

**2.1.** Прво ћемо локализовати решења анализом броја и положаја нула функције $f(x) \equiv x\log x - 1.2$. Ова функција је дефинисана у интервалу $x \in (0, \infty)$. Налажењем нула њеног првог извода одређујемо интервале монотоности ове функције. Пошто $f'(x)$ има само једну нулу,

$$f'(x) = \log x + \log e = \log(x\,e), \qquad f'(e^{-1}) = 0,$$

интервали монотоности су $(0, e^{-1})$ и $(e^{-1}, \infty)$. Како је још

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = -1.2, \qquad f(e^{-1}) = -1.36, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

закључујемо да функција $f(x)$ има само једну нулу и она припада интервалу $(e^{-1}, \infty)$. Прецизније, закључујемо да нула $x^* \in (2,3)$ јер је $f(2) \approx -0.6$, $f(3) \approx 0.23$.

Сада ћемо ово решење одредити са захтеваном тачношћу различитим методама.

(a) Метода половљења

| $a$ | $b$ | $f(a)$ | $f(b)$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | −0.6 | 0.23 |
| 2.5 | 3 | −0.21 | 0.23 |
| 2.5 | 2.75 | −0.21 | 0.008 |
| 2.625 | 2.75 | −0.1 | 0.008 |
| 2.6875 | 2.75 | −0.05 | 0.008 |
| 2.71875 | 2.75 | −0.02 | 0.008 |
| 2.734375 | 2.75 | −0.006 | 0.008 |

Како је

$$\frac{1}{2}(2.75 - 2.734375) = 0.8 \cdot 10^{-2} < \varepsilon, \quad \text{следи да је} \quad x^* = \frac{1}{2}(2.734375 + 2.75) = 2.74.$$

(б) Њутнова метода - Прво ћемо проверити услове конвергенције дефинисане теоремом 4. и одредити критеријум за проверу постигнуте тачности. Како је у интервалу [2, 3]

$$f'(x) = \log(x\,e) > 0, \qquad f''(x) = \frac{\log e}{x} > 0, \quad \text{и} \quad f(3) > 0,$$

услови теореме о конвергенцији су испуњени ако за почетну апроксимацију решења узмемо тачку $x_0 = 3$. Константе у оцени грешке су

$$m_1 = \min_{[2,\,3]} |f'(x)| = f'(2) = 0.73, \qquad M_2 = \max_{[2,\,3]} |f''(x)| = f''(2) = 0.22,$$

јер је $f'$ позитивна растућа, а $f''$ позитивна опадајућа функција. Стога ћемо рачунати док не буде задовољен услов

$$|x^* - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2 \le \varepsilon, \quad \text{тј.} \quad |x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = 0.258.$$

Апроксимације израчунате Њутновом методом су

$$x_0 = 3, \quad x_1 = 2.746, \qquad |x_1 - x_0| = 0.254 < 0.258 \qquad \longrightarrow \qquad x^* = 2.75.$$

(в) Метода регула-фалси - Критеријум постигнуте тачности на основу опште оцене (8) је

$$|f(x_n)| \le m_1\,\varepsilon = 0.7 \cdot 10^{-2},$$

те се, полазећи од $x_0 = 2$ и $x_F = 3$ добија

$$x_0 = 2,\ f(x_0) = -0.598, \qquad x_1 = 2.721,\ f(x_1) = -0.017, \qquad x_2 = 2.740,\ f(x_2) = -0.0004.$$

Решење је

$$x^* = 2.74 \qquad \text{јер је} \qquad |f(2.74)| = 0.0004 < 0.007.$$

(г) Метода итерације - Једначину прво треба трансформисати у облик $x = g(x)$. Једна од могућих трансформација, али неуспешна, је

$$x = \frac{1.2}{\log x} \equiv g(x) \qquad \text{зато што је} \qquad |g'(x)| = \frac{1.2\,\log e}{x\,\log^2 x} > 1 \quad \text{за} \quad x \in [2,3].$$

Функција $g(x)$ није контракција. Друга очигледна трансформација, али нажалост такође неуспешна, је

$$x = 10^{1.2/x} \equiv g(x), \qquad |g'(x)| = 10^{1.2/x}\,\frac{1.2}{x^2\,\log e} > 1.$$

Коначно, ако итеративни поступак дефинишемо еквивалентном једначином $x = x - f(x)$ добијамо да је трансформисана једначина

$$x = x(1 - \log x) + 1.2 \equiv g(x), \qquad g'(x) = 1 - \log(e\,x), \qquad \max_{[2,3]} |g'(x)| = |g'(2)| = 0.26.$$

Дакле, у овом случају функција $g(x)$ јесте контракција, са коефицијентом контракције $q = 0.26$. Рачунамо док не буде задовољен услов

$$|x_{n+1} - x_n| \le \frac{1-q}{q}\,\varepsilon = 2.85 * 10^{-2}.$$

Помоћу итеративне формуле

$$x_0 = 2.5, \quad x_{n+1} = x_n(1 - \log x_n) + 1.2, \quad \text{добијамо} \quad x_1 = 2.705, \quad x_2 = 2.736, \quad x_3 = 2.740.$$

Како је

$$|x_3 - x_2| = 0.004 < 0.028, \qquad \text{решење је} \qquad x^* = 2.74.$$

На овом примеру можемо уочити ефикасност датих метода. Најспорије конвергира метода половљења којом тек у шестој итерацији добијамо решење. Најефикаснија је Њутнова метода, која даје решење већ у првој итерацији, што је и било очекивано јер је ова метода реда два. Методом регула-фалси решење се добија у другој, а методом итерације у трећој итерацији.

**2.2.** Решења једначине ћемо одредити као нуле функције $f(x) = x^3 - 6\sin x$. Очигледно је да је једно решење $x_1^* = 0$. Како је функција $f(x)$ непарна, можемо се ограничити само на налажење позитивних нула, тј. за $x > 0$. С обзиром на то да је

$$f'(x) = 3x^2 - 6\cos x, \qquad f''(x) = 6x + 6\sin x,$$

то је $f''(x) > 0$ за свако $x > 0$, па је $f'(x)$ растућа функција. Даље, приближно је $f'(1.02) = 0$, одакле следи да је $f'(x) > 0$ за $x \in (1.02, \infty)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (0, 1.02)$. Још је $f(0.1) < 0$, $f(1.02) < 0$ и $f(2) > 0$, те се једино позитивно решење једначине налази у интервалу $(1.02, 2)$. Са графика се тачније одређује да оно припада интервалу $(1.8, 1.85)$. Решење се тражи на четири сигурне цифре, па га треба одредити са тачношћу $5 \cdot 10^{-4}$. Одредићемо га Њутновом методом за $x^{(0)} = 1.85$. Како је

$$M_2 = \max_{(1.8, 1.85)} |f''(x)| = f''(1.85) = 16.87,$$

$$m_1 = \min_{(1.8, 1.85)} |f'(x)| = f'(1.8) = 11,$$

тачност ће бити задовољена када буде испуњен услов

$$|x^{(n)} - x^{(n-1)}| \le \sqrt{\frac{2m_1}{M_2}\frac{1}{2}10^{-3}} = 0.026.$$

У другој итерацији тај услов је задовољен. Дакле, са траженом тачношћу сва реална решења једначине су

$$x_1^* = 0, \qquad x_2^* = 1.801, \qquad x_3^* = -1.801.$$

**2.3.** Функција $f(x) = 15x - 10\sinh x - 1$ има извод $f'(x) = 15 - 10\cosh x$ и $f'(x) = 0$ за $\cosh x = 1.5$, тј. за $x = \pm 0.96$. У интервалима $(-\infty, -0.96)$ и $(0.96, \infty)$ функција $f(x)$ опада, а у интервалу $(-0.96, 0.96)$ расте. Како је још

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) > 0, \qquad f(-0.96) < 0, \qquad f(0.96) > 0, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) < 0,$$

једначина има три реална решења, у сваком од интервала у коме $f'(x)$ не мења знак по једно. Унутар ових интервала прецизније одредимо интервале у којима се налазе решења,

$$x_1^* \in (-1.8, -1.7), \qquad x_2^* \in (0, 0.5), \qquad x_3^* \in (1.5, 1.6).$$

Очигледно је да је највеће по модулу решење $x_1^*$. Израчунаћемо га Њутновом методом полазећи од апроксимације $x_1^{(0)} = -1.8$ (јер је $f(-1.8)\,f''(-1.8) > 0$). Како је

$$f''(x) = -10\sinh x, \qquad f'''(x) = -10\cosh x,$$

то је у интервалу $(-1.8, -1.7)$ функција $f'(x)$ негативна и растућа, а функција $f''(x)$ позитивна и опадајућа .

Стога је

$$M_2 = \max_{(-1.8,-1.7)} |f''(x)| = 29.4, \qquad m_1 = \min_{(-1.8,-1.7)} |f'(x)| = 13.3,$$

и рачунамо док не буде задовољен услов

$$|x^{(n)} - x^{(n-1)}| \leq \sqrt{\frac{2m_1}{M_2}\frac{1}{2}10^{-4}} = 0.67 \cdot 10^{-2}.$$

Применом Њутнове методе у трећој итерацији добијамо да је тражено решење

$$x_1^* = -1.7033.$$

**2.4.** Функција $f(x) = x \sinh x - 1$ је парна функција, па је довољно наћи њену нулу за $x \geq 0$. Како је ту функција монотоно растућа и $f(0) = -1$, $f(1) = 0.1752$, тражена нула припада интервалу $(0,1)$. Њутновом методом, полазећи од апроксимације $x^{(0)} = 1$, добијамо у петој итерацији да је са траженом тачношћу $x^* = 0.93202$ нула функције $f(x)$. Због парности функције $f(x)$ њена нула је и тачка $-x^*$. Стога су решења полазне једначине

$$x_1^* = 0.93202, \qquad x_2^* = -0.93202.$$

**2.5.** Анализирајмо функцију $f(x) = \exp x - 2(x-1)^2$. Њени изводи су функције

$$f'(x) = \exp x - 4(x-1), \qquad f''(x) = \exp x - 4.$$

При томе је $f''(\ln 4) = 0$, и $f''(x) < 0$ за $x < \ln 4$ и $f''(x) > 0$ за $x > \ln 4$. Стога $f'(x)$ опада за $x \in (-\infty, \ln 4)$ и $f'(x)$ расте за $x \in (\ln 4, \infty)$. Како је још $f'(\ln 4) = 8(1 - \ln 2) > 0$ и $f'(x)$ непрекидна функција, то је $f'(x) > 0$ за свако $x$. С обзиром на то да је $f(-\infty) < 0$ а $f(\infty) > 0$, следи да функција $f(x)$ има једну реалну нулу, тј. да дата једначина има једно решење. Са графика закључујемо да је оно у интервалу $(0, 0.5)$. Апроксимације решења одређујемо применом итеративног алгоритма за избор почетне апроксимације $x^{(0)} = 0.2$, и фиксне тачке $x_F = 0.3$. Још оцењујемо дозвољену разлику вредности двеју узастопних итерација, с обзиром на задату тачност. Како је

$$M_1 = \max_{(0,0.5)} |f'(x)| = 5, \qquad m_1 = \min_{(0,0.5)} |f'(x)| = 3.65,$$

то је довољно да буде испуњен услов

$$|x^{(n)} - x^{(n-1)}| \leq \frac{m_1}{M_1 - m_1}\frac{1}{2}10^{-4} = 1.4 \cdot 10^{-4}.$$

Овај услов је испуњен у трећој итерацији. Решење једначине са траженом тачношћу је $x^* = 0.2133$.

**2.6.** Како је

$$P'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1), \qquad P'(1) = 0,$$

следи да су интервали монотоности ове функције $(-\infty, 1]$ и $[1, \infty)$. На крајевима ових интервала знак функције је

$$\lim_{x\to-\infty} P_4(x) = \infty > 0, \qquad P_4(1) = -2 < 0, \qquad \lim_{x\to\infty} P_4(x) = \infty > 0,$$

што значи да у сваком од интервала постоји само једно решење алгебарске једначине, односно да полином $P_4(x)$ има два реална корена $x_1^*$ и $x_2^*$. С обзиром на то да су одређени интервали бесконачни, унутар њих ћемо изабрати коначне интервале, али тако да на њиховим крајевима функција $P_4(x)$ и даље има супротан знак,

$$\begin{aligned} x_1^* &\in [0.2,\ 0.8], \qquad P_4(0.2) = 0.2 > 0, \quad P_4(0.8) = -1.8 < 0, \\ x_2^* &\in [1,\ 1.5], \qquad P_4(1) = -2 < 0, \quad P_4(1.5) = 0.0625 > 0. \end{aligned}$$

Први корен ћемо одредити итеративним алгоритмом

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(x_n^4 + 1\right) \equiv g_1(x_n), \quad \text{јер је} \quad \max_{[0.2,\,0.8]} |g_1'(x)| = \max_{[0.2,\,0.8]} |x^3| = 0.51,$$

а други итеративним алгоритмом

$$x_{n+1} = \sqrt[4]{4x_n - 1} \equiv g_2(x_n), \quad \text{јер је} \quad \max_{[1,\,1.5]} |g_2'(x)| = \max_{[1,\,1.5]} \left| \frac{1}{\sqrt[4]{(4x_n - 1)^3}} \right| = 0.44.$$

Полазећи од почетних вредности $x_0^{(1)} = 0.2$ за први корен и $x_0^{(2)} = 1.5$ за други корен (узети су крајеви интервала у којима функција $P_4(x)$ има мању апсолутну вредност), са тачношћу $0.5 \cdot 10^{-3}$ добија се у трећој итерацији да је прва нула $x_1^* = 0.251$ и у четвртој итерацији да је друга нула $x_2^* = 1.493$.

**2.7.** У примеру 2.4 закључили смо да једначина има само једно решење, које припада интервалу $[-2.5,\ -2]$. Трансформацијом полазне једначине у облик

$$x = e^{\sin x} - 3 \equiv g(x),$$

дефинисан је конвергентан итеративни алгоритам, јер је

$$g'(x) = \cos x\, e^{\sin x}, \qquad \max_{[-2.5,-2]} |g'(x)| < \max_{[-2.5,-2]} e^{\sin x} = e^{-\sin 2.5} = 0.55.$$

Полазећи од апроксимације $x_0 = -2.5$ добијамо низ апроксимација

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_n$ | $-2.5$ | $-2.4503$ | $-2.4714$ | $-2.4627$ | $-2.4663$ | $-2.4648$ | $-2.4654$ | $-2.4652$ |

Како је

$$|x_7 - x_6| = 0.0002 \le \frac{1 - 0.55}{0.55}\, 0.5 \cdot 10^{-3} = 0.4 \cdot 10^{-3},$$

решење једначине на три сигурне децималне цифре је $x^* = -2.465$.

**2.8.** Анализом функције $f(x) \equiv x + e^x$, закључујемо да се њен једини реалан корен налази у интервалу $[-0.6, -0.5]$. Итеративни алгоритам дефинисан формулом

$$x_{n+1} = -e^{x_n}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

ће бити конвергентан за произвољно $x_0 \in [-0.6, -0.5]$ јер је

$$\max_{[-0.6,-0.5]} |g'(x)| = 0.6,$$

па је $g(x)$ контракција са коефицијентом $q = 0.6$. Ако за оцену тачности користимо растојање две узастопне итерације, треба рачунати док не буде испуњен услов

$$|x_{n+1} - x_n| \leq 0.0006.$$

Полазећи од почетне апроксимације решења $x_0 = -0.55$, добијамо у осмој итерацији тражено решење $x^* = -0.567$.

**2.9.** Анализом функције $f(x) \equiv x - \sin x - 0.25$, закључујемо да се њен једини реалан корен налази у интервалу $[1.1, 1.3]$. Итеративни алгоритам дефинисан формулом

$$x_{n+1} = \sin x_n + 0.25 \equiv g(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

ће бити конвергентан за произвољно $x_0 \in [1.1, 1.3]$ јер је

$$\max_{[1.1,1.3]} |g'(x)| = 0.45,$$

па је $g(x)$ контракција са коефицијентом $q = 0.45$. Како решење припада интервалу $[1.1, 1.3]$, а треба га израчунати на три сигурне цифре, тражена тачност је $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2}$. Ако за оцену тачности користимо растојање две узастопне итерације, треба рачунати док не буде испуњен услов

$$|x_{n+1} - x_n| \leq 0.006.$$

Полазећи од почетне апроксимације $x_0 = 1.2$ добијамо низ апроксимација решења

$$x_0 = 1.2, \qquad x_1 = 1.182, \qquad x_2 = 1.175, \qquad x_3 = 1.173,$$

те је, с обзиром на то да је $|x_3 - x_2| < 0.006$, тражено решење $x^* = 1.17$.

**2.10.** Према теореми о средњој вредности је

$$|f(x) - f(y)| = \left(1 - \frac{1}{1+\xi^2}\right) |x - y|, \qquad \xi \in (x, y).$$

Дакле, $q = q(x,y) = 1 - 1/(1+\xi^2) < 1$, али не постоји мајоранта ове функције која не зависи од $x$ и $y$, а мања је од 1. Пресликавање $f$ нема непокретну тачку јер би у тој тачки било

$$x^* = \pi/2 + x^* - \arctan x^*, \qquad \text{тј.} \qquad \arctan x^* = \pi/2,$$

што није могуће за коначну вредност $x^*$.