

7. Osnovne teoreme diferencijabilnih funkcija

Iz definicije izvoda proizilaze sledeće posledice:

- ako je $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$ jer za dovoljno malo Δx :

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow f(x + \Delta x) - f(x) > 0 \Rightarrow f(x + \Delta x) > f(x)$$

što sa činjenicom $x + \Delta x > x$ daje da je funkcija strogo rastuća, odnosno opadajuća ako je prvi izvod negativan,

- posebno razmatramo tačke $x = a$ u kojima je $f'(a) = 0$, što znači da je u $x = a$ tangenta na $f(x)$ paralelna sa x-osom.

Definicija 7.1. Realna funkcija $f(x)$ definisana u okolini tačke $c \in \mathbb{R}$, ima u toj tački lokalni maksimum, minimum, ako:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall x) \mid x - c \mid < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(c)$$

odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall x) \mid x - c \mid < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(c)$$

□

Ukoliko važe stroge nejednakosti kažemo da ima *strogi lokalni maksimum* ili *minimum*.

Teorema 7.1 (Fermaov-a teorema). Ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački c , i u toj tački ima lokalni ekstrem, onda je $f'(c) = 0$.

Dokaz. Ako u tački c ima $f(x)$ ima lokalni ekstrem, važi jedna od sledećih nejednakosti:

$$f(c + h) - f(c) \geq 0 \vee f(c + h) - f(c) \leq 0$$

gde je $c + h$ iz okoline tačke c . Takođe iz diferencijabilnosti funkcije sledi da je:

$$f(c + h) - f(c) = f'(c)h + \alpha(h)h$$

gde $\alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Ako pretpostavimo da je $f'(c) \neq 0$ onda poslednju nejednakost možemo napisati na sledeći način:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} = f'(c) + \alpha(h)$$

Za malo $|h|$ može se zaključiti da desna strana ima stalan znak, dok to sa levom nije slučaj, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $f'(c) \neq 0$. □

Teorema 7.2 (Rolova teorema). Neka je funkcija $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$, i diferencijabilna na (a, b) i $f(a) = f(b)$. Tada u intervalu (a, b) postoji tačka c , takva da je $f'(c) = 0$.

Dokaz. Ako je funkcija $f(x)$ konstanta na $[a, b]$ onda je trivijalno ispunjeno tvrđenje. Ako funkcija nije konstantna na $[a, b]$ na kome je neprekidna, i ako je $f'(x) > 0$ na (a, b) ona je strogo rastuća pa ne može biti ispunjeno $f(a) = f(b)$. To znači da ne može imati izvod konstantnog znaka. Slično za pretpostavku da je $f'(x) < 0$ dolazimo do istog zaključka. Na intervalu (a, b) funkcija ima izvod različitog znaka i postoje tačke iz tog intervala u kojima dostiže svoj minimum i maksimum. Tada na osnovu teoreme (7.1) sledi da postoji c iz (a, b) takvo da je $f'(c) = 0$. □

Rolova teorema daje dovoljne uslove za postojanje tačke u kojoj je izvod funkcije jednak nuli. Takve tačke nazivamo stacionarnim tačkama. Fizička interpretacija sastoji se u tome, da ako imamo neprekidnu funkciju na $[a, b]$ koja u svakoj tački ima tangentu i za koju znamo da je $f(a) = f(b)$, onda mora postojati tačka u kojoj je tangenta paralelna sa x-osom.

Teorema 7.3 (Lagranžova teorema). *Neka je funkcija $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$, i diferencijabilna na (a, b) . Tada u intervalu (a, b) postoji tačka c , takva da je:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Dokaz. Posmatrajmo $\varphi(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda x$$

Funkcija $\varphi(x)$ je neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b) kao zbir dve neprekidne i diferencijabilne funkcije na istim intervalima. Da bi bilo $\varphi(a) = \varphi(b)$ potrebno je:

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Tada funkcija $\varphi(x)$ ispunjava uslove (7.2) teoreme i to za posledicu ima postojanje tačke c iz intervala (a, b) takve da je:

$$\varphi'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) + \lambda = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Lagranžova teorema donosi postojanje tačke u kojoj je tangenta paralelna sečici, što znači da je u tački $(c, f(c))$ tangenta paralelna sečici koja prolazi kroz tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Teoremu Lagranža nazivaju još i *teoremom o srednjoj vrednosti* diferencijalnog računa.

Teorema 7.4 (Košijeva teorema). *Ako su funkcije $f(x), g(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidne na $[a, b]$, i diferencijabilne na (a, b) , i $g'(x) \neq 0$ za $x \in (a, b)$. Tada u intervalu (a, b) postoji tačka c , takva da je:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Dokaz. Kako je $g'(x) \neq 0$ sledi da je $g(b) \neq g(a)$ što onemogućava postojanje $g'(c) = 0$. Definišimo funkciju $\varphi(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

Funkcija $\varphi(x)$ je neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b) kao zbir dve neprekidne i diferencijabilne funkcije na istim intervalima. Da bi bilo $\varphi(a) = \varphi(b)$ potrebno je:

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Tada funkcija $\varphi(x)$ ispunjava uslove teoreme (7.2) i to za posledicu ima postojanje tačke c iz intervala (a, b) takve da je:

$$\varphi'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) + \lambda g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

Košijeva teorema je uopštavanje Lagranžove teoreme jer se stavljanjem $g(x) = x$ dobija Lagranžova teorema.

Teorema 7.5 (Lopitalovo pravilo). *Neka su $f(x)$, $g(x)$ diferencijabilne na (a, b) gde $g'(x) \neq 0$ za $x \in (a, b)$, i*

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$$

ako postoji

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

ili je jednak $+\infty$, $-\infty$ tada postoji:

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

ili je jednak $+\infty$, $-\infty$.

Dokaz. Iz uslova teoreme sledi da su obe funkcije neprekidne za svako $x \in (a, c]$ gde je $a < c < b$. Ako se funkcije dodefinišu u tački a tako da je $f(a) = 0$ i $g(a) = 0$, onda su ispunjeni uslovi (7.4) na $[a, x]$ gde je $x \in (a, c]$. To znači da postoji $d \in (a, x)$ takvo da je:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(d)}{g'(d)}$$

Ako $x \rightarrow a_+$ onda mora i $d \rightarrow a_+$ pa je:

$$\lim_{d \rightarrow a+} \frac{f'(d)}{g'(d)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Kako limes na levoj strani postoji to mora postojati i na desnoj strani. □

Neodređeni izrazi oblika $\frac{0}{0}$ kada $x \rightarrow a_+$ mogu se rešavati Lopitalovim pravilom, prelaskom na graničnu vrednost izvoda brojioca i imenioca. Jednostavno se vidi da se ovo može produžiti na više izvode imenioca i brojioca. Takođe može se pokazati da slična teorema važi kada je neodređen izraz oblika $\frac{\infty}{\infty}$.

7.1. Jedan način ispitivanja i crtanja grafika funkcije

Ispitivanje i crtanje grafika funkcije može se na nekoliko načina podeliti u više tačaka. Podela prikazana u ovoj sekciji, nastala je posmatranjem i pregledom ispitnih zadataka na Mašinskom fakultetu. U većini tačaka se slaže sa opšte prihvaćenim postupcima i podelama. Neka je data funkcija u analitičkom obliku $y = f(x)$.

1. Naći oblast definisanosti funkcije D_f . Ako je funkcija pogodnog oblika, može se analizirati i V_f , u smislu da se traži $f(x) > 0$. Na ovaj način se stiče pregled u kojim kvadrantima se funkcija nalazi. Napomenimo da ukoliko je funkcija sastavljena od zbira, proizvoda ili količnika funkcija, tada se oblast definisanosti dobija kao *presek oblasti definisanosti svake od tih funkcija*.
2. Da bi stekli potpuni pregled odnosa funkcije sa osama potrebno je ispitati da li sledeće jednačine imaju rešenja.
 - $f(x) = 0$ što odgovara traženju nula funkcije i njenom preseku sa x osom, i

- $y_0 = f(0)$ što odgovara preseku funkcije sa y osom.

Da bi smanjili oblast ispitivanja funkcije potrebno je ispitati i parnost-neparnost funkcije, i njenu periodičnost. Dakle potrebno je utvrditi da li je:

$$f(-x) = \pm f(x) \text{ i / ili } f(T+x) = f(x)$$

Važno je napomenuti da je veliki broj funkcija ne ispunjava navedene uslove parnosti ili neparnosti, kao i periodičnosti.

3. Uobičajeno je u ovoj tački ispitivati asimptotsko ponašanje funkcije. U ovom slučaju ispitivaćemo ponašanje funkcije na rubovima definisanosti, ako su rubovi konačne tačke. To u suštini znači da nas interesuju samo vertikalne asimptote. Ako je $\varepsilon > 0$ i $\varepsilon \rightarrow 0$ i ako pretpostavimo da je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ tada je potrebno naći sledeće granične vrednosti:

$$\lim_{x \rightarrow a+\varepsilon} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a+\varepsilon) \text{ i / ili } \lim_{x \rightarrow a-\varepsilon} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a-\varepsilon)$$

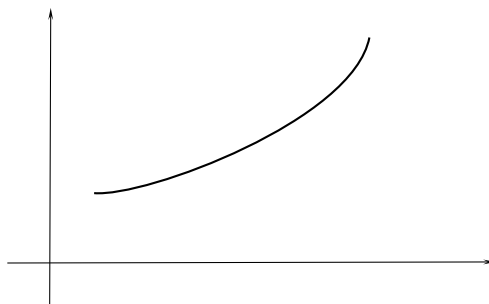
Važno je napomenuti da samo otvoreni intervali konačnih vrednosti zahtevaju ispitivanje navedenih graničnih vrednosti. Na primer, ako je: $D_f = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ onda je potrebno naći sledeću graničnu vrednost:

$$\lim_{x \rightarrow a-\varepsilon} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a-\varepsilon)$$

4. Potrebno je ispitati postojanje ekstremnih vrednosti i monotonosti funkcije. To znači da je potrebno pronaći $f'(x)$ i u skladu sa poznatim osobinama izvoda ispitati da li postoje takve vrednosti iz D_f koje ispunjavaju uslov $f'(a) = 0$. Ako takvih tačaka ima onda uz ispitivanje monotonosti sa $f'(x) > 0$ pokazujemo da funkcija u a ima lokalni ekstrem. Takođe, potrebno je pronaći tačke u kojima funkcija nije diferencijabilna što se ispituje sledećim graničnim vrednostima:

$$\lim_{x \rightarrow a+\varepsilon} f'(x) \text{ i / ili } \lim_{x \rightarrow a-\varepsilon} f'(x)$$

5. Konveksnost i konkavnost kao i postojanje prevojnih tačka dobija se ispitivanjem drugog izvoda funkcije. Ako postoji tačka a iz oblasti definisanosti funkcije takva da je $f''(a) = 0$, uz ispitivanje da li je $f''(x) > 0$ pokazujemo da funkcija u a ima prevojnu tačku. Ako je u nekom intervalu $f''(x) > 0$ kažemo da je funkcija *konveksna* i ima sledeći oblik:



Slika 1: Konveksna funkcija

U suprotnom kažemo da je funkcija *konkavna*.

6. Ispitujemo postojanje horizontalnih asimptota date funkcije pokazujući postojanje sledećih graničnih vrednosti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \text{ i / ili } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

Ako postoje ove granične vrednosti kažemo da je prava $y = a$ horizontalna asimptota funkcije na desnoj poluravni, i $y = b$ je asimptota funkcije na levoj poluravni funkcije.

7. Potrebno je ispitati da li postoje kose asimptote date funkcije. Zato je potrebno pronaći sledeće granične vrednosti:

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, & l_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) \\ k_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, & l_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 x) \end{aligned}$$

Ako je postoje granične vrednosti i pri tome je $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ kažemo da je prava $y = k_1 x + l_1$ kosa asimptota u desnoj poluravni, a prava $y = k_2 x + l_2$ kosa asimptota u levoj poluravni.

8. Na osnovu prethodnih tačaka i nekoliko izračunatih vrednosti funkcije potrebno je u koordinatnom sistemu skicirati grafik funkcije $y = f(x)$.

Čitaocu se preporučuje da sve rezultate odmah nacрта, jer se na taj način jednostavno dobija sam crtež grafika funkcije. Takođe ako to vreme i uslovi dozvoljavaju, preporučuje se izračunavanje nekoliko vrednosti funkcije (na primer u -1, +1, -2, +2...).

Primer 7.1. Ispitati i nacrtati grafik funkcije:

$$f(x) = |x| e^{\frac{1}{x}}$$

Dokaz. Držeći se definisanih tačaka, dobijamo:

1. Jednostavno se utvrđuje da je:

$$D_f = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Takođe $f(x) > 0 \Rightarrow \top$ odakle je funkcija uvek pozitivna.

2. Kako je:

$$f(-x) = |-x| e^{\frac{1}{-x}} = |x| e^{-\frac{1}{x}} \neq \pm f(x)$$

sledi funkcija nije ni parna ni neparna. Takođe:

$$f(x) = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

pokazuje da nema nula. Takođe ne seče ni y osu.

- 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0+\varepsilon} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(0+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |0+\varepsilon| e^{\frac{1}{0+\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\frac{1}{\varepsilon}}$$

Možemo primeniti l'opitalovo pravilo jer je izraz oblika $\frac{+\infty}{+\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+\varepsilon} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} \right)}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\varepsilon}} = +\infty$$

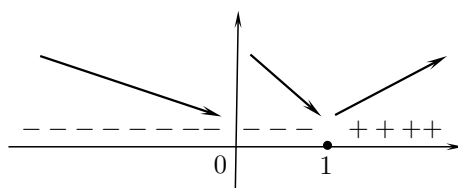
Slično se dobija:

$$\lim_{x \rightarrow 0-\varepsilon} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(0 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |0 - \varepsilon| e^{\frac{1}{0-\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = 0 \cdot 0 = 0$$

4.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} + |x| \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + x \frac{-1}{x^2} \right) \\ &= \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right) \\ &= \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} \\ &= e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x \cdot \operatorname{sgn} x} \\ &= e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{|x|} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{|x|} \cdot (x-1) \end{aligned}$$

Kako je $f'(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ i $f'(x) > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ onda funkcija $f(x)$ za $x = 1$ ima minimum. Dobijeni rezultat može se prikazati na sledeći način:

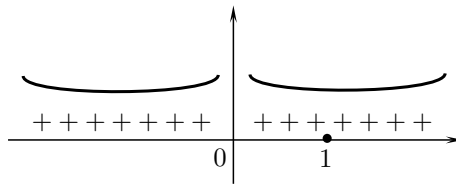


5. Nalaženje drugog izvoda treba pojednostaviti, birajući neki od izraza prvog izvoda od koga se nalazi prvi izvod. Poslednji izraz prvog izvoda nije najpogodniji jer bi trebalo tražiti izvod od jednog količnika i proizvoda. Zato iskoristimo sledeći izraz prvog izvoda:

$$f'(x) = \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right)' \\
&= \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \\
&= \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(-1 + \frac{1}{x} + 1 \right) \\
&= \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \\
&= e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{|x| \cdot x^2}
\end{aligned}$$

Odakle se dobija da je funkcija uvek konveksna i da nema prevojnih tačaka. Skicirajmo konveksnost i konkavnost na sledeći način:



6. Kako

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

jednostavno sledi da je:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| e^{\frac{1}{x}} = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

Slično je i:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| e^{\frac{1}{x}} = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

Odakle sledi da funkcija nema kosih asimptota.

7.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +1$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = -1$$

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x| e^{\frac{1}{x}} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

Izraz je oblika $\frac{0}{0}$ i može se primeniti lопitalovo pravilo:

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +1$$

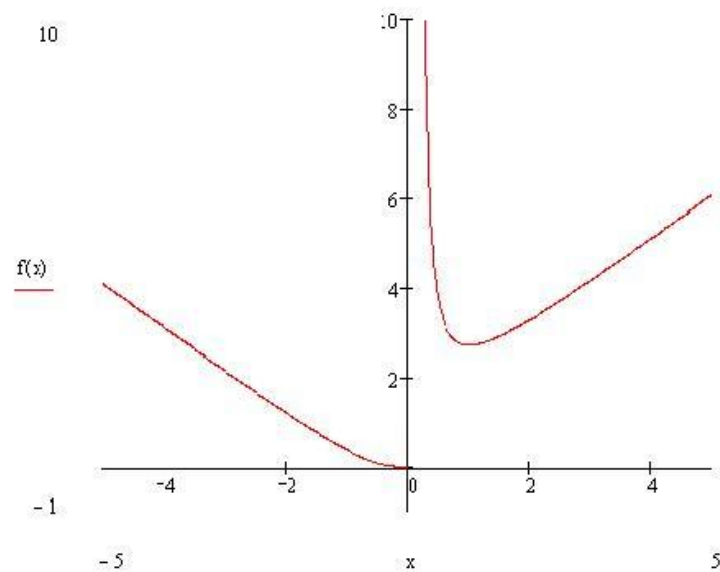
$$l_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| e^{\frac{1}{x}} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} + 1}{\frac{1}{x}}$$

Izraz je oblika $\frac{0}{0}$ i može se primeniti l'opitalovo pravilo:

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sgn} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = -1$$

što znači da je prava $y = x + 1$ kosa asimptota kada $x \rightarrow +\infty$. Slično prava $y = -x - 1$ je kosa asimptota kada $x \rightarrow -\infty$.

8. Na osnovu urađenih tačaka možemo skicirati grafik funkcije:



□