Интеграли функција у којима се јавља квадратни трином

Овај материјал се директно надовезује на садржај вежби и предавања (то значи да прво треба проучити вежбе и предавања).

Свих пет задатка се заснивају на увођењу смене

$$x = t - \frac{q}{2p} \Rightarrow dx = dt, \tag{1}$$

којом се квадратни трином $px^2+qx+r,\ \ p, q \neq 0$, своди на једноставнији облик. У свим наведеним примерима се овакав израз налази у имениоцу подинтегралне функције. Неопходни су нам следећи таблични интеграли ($a \neq 0$):

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c, \tag{2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + c, \tag{3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+A}\right) + c \tag{4}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, \tag{5}$$

при чему се од студената очекује да овај последњи интеграл увек изнова **изведу**.

1. Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \frac{1}{2x^2+x-1}\, dx.$$

Решење: Како је:

$$2x^2+x-1 = 2\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right),$$

линеарна смена 1 гласи $x = t - \frac{1}{4} \Rightarrow dx = dt$. Полазни интеграл постаје:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{2\left(\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \int \frac{dt}{2\left(t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \int \frac{dt}{2\left(t^2-\frac{9}{16}\right)}. \end{aligned}$$

Добијен је интеграл типа (5):

$$I = \int \frac{dt}{2\left(t^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}} \ln\left|\frac{t-\frac{3}{4}}{t+\frac{3}{4}}\right| + c.$$

Коначно после враћања смене, решење полазног интеграла I, једнако је:

$$I = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1}\right| + c. \quad \square$$

Ово је заправо био један од основних интеграла везано за квадратни трином. Таква су и наредна три интеграла (који се чак, као што ћемо видети, своде на интеграле основне табеле интеграла).

2. Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \frac{1}{2x^2 - x + 1}\,dx.$$

Како је:

$$2x^2 - x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right),$$

линеарна смена гласи $x = t + \dfrac{1}{4} \Rightarrow dx = dt$. Полазни интеграл постаје:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{2\left(\left(t+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \int \frac{dt}{2\left(t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \int \frac{dt}{2\left(t^2 + \frac{7}{16}\right)}. \end{aligned}$$

Добијен је интеграл типа (2) из основне табеле интеграла:

$$I = \int \frac{dt}{2\left(t^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}} arctg\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right) + c.$$

Коначно после враћања смене, решење полазног интеграла I, једнако је:

$$I = \frac{1}{\sqrt{7}} arctg\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right) + c.$$

3. Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - 3x^2}}.$$

Како је:

$$1 - 2x - 3x^2 = -3\left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right),$$

линеарна смена гласи $x = t - \dfrac{\frac{2}{3}}{2\cdot 1} = t - \dfrac{1}{3} \Rightarrow dx = dt$. Полазни интеграл постаје:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{\sqrt{3\left(-\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(t-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\right)}} \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{3\left(-t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{9} - \frac{2}{3}t + \frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right)}} \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{3\left(\frac{4}{9} - t^2\right)}}. \end{aligned}$$

Добијен је интеграл типа (3) из основне табеле интеграла:

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{t}{\frac{2}{3}}\right) + c = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{3x+1}{2}\right) + c$$

4. Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}}.$$

Линеарна смена у овом случају гласи $x = t - \dfrac{1}{2} \Rightarrow dx = dt$. Полазни интеграл постаје:

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}}.$$

Добијен је интеграл типа (4) из основне табеле интеграла:

$$I = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}\right) + c = \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x}\right) + c.$$

А. Пејчев