Парцијална интеграција - 1. део

Овај материјал се директно надовезује на садржај вежби и предавања (то значи да прво треба проучити вежбе и предавања).

1. Решити неодређени интеграл:

$$I = \int x^n \ln x \, dx.$$

Решење: Ако се изабере:

$$u = \ln x \Rightarrow u = \frac{1}{x}\, dx, \quad v = \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

тада је:

$$I = \ln x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx.$$

Решење интеграла је:

$$I = \int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + c.$$

2. Решити неодређени интеграл:

$$I = \int x^2 \cdot \sin x \, dx.$$

Решење: Ако се одабере:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\, dx, \quad v = \int \sin x \, dx = -\cos x,$$

применом парцијалне интеграције добија се:

$$I = -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \cdot J. \tag{1}$$

Понављањем поступка за интеграл:

$$J = \int x \cdot \cos x \, dx,$$

где је:

$$u = x \Rightarrow du = dx, \quad v = \int \cos x \, dx = \sin x,$$

парцијалном интеграцијом се добија:

$$J = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x.$$

Коначно решење добијамо заменом последњег израза у (1):

$$I = -x^2 \cos x + 2 \cdot x \sin x + 2 \cos x + c. \tag{2}$$

3. Решити неодређени интеграл

$$I = \int \left(4x^3 - 2x^2\right) e^x \, dx.$$

Основном трансформацијом интеграла добија се:

$$I = \int \left(4x^3 - 2x^2\right) e^x \, dx = 4 \int x^3 e^x \, dx - 2 \int x^2 e^x \, dx = 4I_3 - 2I_2.$$

где су интеграли I_3 и I_2 интеграли функције облика "x^n пута e^x". Користећи поменуту рекурентну везу:

$$\begin{aligned}
I &= 4\left(x^3 e^x - 3I_2\right) - 2\left(x^2 e^x - 2I_1\right) \\
&= 4\left(x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2I_1\right)\right) - 2\left(x^2 e^x - 2\left(e^x (x-1)\right)\right) \\
&= 4\left(x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2\left(e^x (x-1)\right)\right)\right) - 2\left(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x\right) \\
&= 4e^x \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) - 2e^x \left(x^2 - 2x + 2\right) \\
&= e^x \left(4x^3 - 14x^2 + 28x - 28\right) + c.
\end{aligned}$$

Сабирци у заградама су сукцесивни изводи претходног сабирка уз промену знака. Ако се последњи израз среди на одговарајући начин:

$$I \quad = \quad e^x \cdot \left[\left(4x^3 - 2x^2\right) - \left(12x^2 - 4x\right) + (24x - 4) - 24 \right] + c$$

закључује се да су сабирци сукцесивни изводи полинома који се налази уз e^x.

На основу претходних уопштења следи:

$$I = \int \mathbb{P}(x)\, e^x \, dx = e^x \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \mathbb{P}^{(i)}(x) + c, \tag{3}$$

где је $\mathbb{P}(x)$ полином n-тог степена, а са $\mathbb{P}^{(i)}(x)$ означен је i-ти извод полинома.

4. Решити неодређени интеграл:

$$I_0 = \int \arcsin x \, dx$$

Изаберимо делове подинтегралне функције (овај пример је мало специфичнији с обзиром на то како бирамо v):

$$u = \arcsin x \Rightarrow \, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \int dx = x$$

и применимо парцијалну интеграцију:

$$I_0 = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x - J$$

Решавање интеграла I своди се на реавање интеграла J, то се стандарндо спроводи сменом

$$u = 1 - x^2 \Rightarrow \, du = -2x \, dx \Rightarrow x \, dx = -\frac{1}{2} \, du$$

$$J = \int \frac{-\frac{1}{2} \, du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} \, du = -\sqrt{u} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

Коначно, решење датог интеграла је:

$$I_0 = \int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

А. Пејчев