Парцијална интеграција - 2. део

Овај материјал се директно надовезује на садржај вежби и предавања (то значи да прво треба проучити вежбе и предавања).

1. Извести рекурентну формулу за рачунање интеграла

(1) $$I = \int \cos^n x\, dx$$

и на основу тога израчунати $\displaystyle\int \cos^5 x\, dx$. Ако изаберемо:

$$\begin{aligned} u &= \cos^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1)\cdot\cos^{n-2} x \cdot (-\sin x)\ dx \\ v &= \int \cos x\, dx = \sin x \end{aligned}$$

парцијалном интеграцијом се добија:

$$\begin{aligned} I_n &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + \int \sin x \cdot (n-1)\cdot \cos^{n-2} x \cdot \sin x\, dx \\ &= \sin x\cdot\cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\cdot \sin^2 x\, dx \\ &= \sin x\cdot\cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\cdot \left(1-\cos^2 x\right) dx \\ &= \sin x\cdot\cos^{n-1} x + (n-1)\left(\int \cos^{n-2} x\, dx - \int \cos^n x\, dx\right) \end{aligned}$$

Препознајући да је код наведених интеграла подинтегрална функција у суштини подинтегрална функција полазног интеграла:

$$\begin{aligned} I_n &= \sin x\cdot\cos^{n-1} x + (n-1)\cdot(I_{n-2} - I_n) \\ &= \sin x\cdot\cos^{n-1} x + (n-1)\cdot I_{n-2} - (n-1)\cdot I_n \end{aligned}$$

Решавањем по I_n:

$$\begin{aligned} I_n + (n-1)\cdot I_n &= \sin x\cdot\cos^{n-1} x + (n-1)\cdot I_{n-2} \Rightarrow \\ n\cdot I_n &= \sin x\cdot\cos^{n-1} x + (n-1)\cdot I_{n-2} \end{aligned}$$

добијамо решење интеграла:

(2) $$I_n = \frac{1}{n}\sin x\cdot\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Напоменимо и то да је ова рекурзија потпуно аналогна рекурзији за интеграл $\int \sin^n x\, dx$. Наиме, ако у ту рекурзију, која гласи

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x\cdot\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx$$

(што се може добити на идентичан начин као за косинус и саветује се студентима да ураде за вежбу) ставимо $x = \dfrac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$ и искористимо $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$, добијамо

$$-\int \cos^n t\, dt = -\frac{1}{n}\sin t\cdot\cos^{n-1} t - \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} t\, dt,$$

односно

$$\int \cos^n t\, dt = \frac{1}{n}\sin t\cdot\cos^{n-1} t + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} t\, dt,$$

што је очито исто што и (2). Терминални интеграл зависи од парности броја $n \in \mathbb{N}$. Конкретно, за $n = 5$ имамо

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{1}{5}\sin x\cdot\cos^4 x + \frac{4}{5} I_3 \\ &= \frac{1}{5}\sin x\cdot\cos^4 x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\sin x\cdot\cos^2 x + \frac{2}{3} I_1\right) \\ &= \frac{1}{5}\sin x\cdot\cos^4 x + \frac{4}{15}\sin x\cdot\cos^2 x + \frac{8}{15}\int \cos x\, dx \\ &= \frac{1}{5}\sin x\cdot\cos^4 x + \frac{4}{15}\sin x\cdot\cos^2 x + \frac{8}{15}\sin x + c. \end{aligned}$$

Интеграл I_5 смо, наравно, могли решавати као

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,dx &= \int \cos^4 x\cdot\cos x\,dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x\,dx = \int \left(1-t^2\right)^2 dt\\ &= \int \left(1-2t^2+t^4\right)dt = t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+c\\ &= \sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+c.\end{aligned}$$

Наравно, могуће је уверити се помоћу адиционих формула да се два облика решења овог задатка добијена на различите начине разликују за константу.

Иинтеграл

$$I_n=\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$$

испуњава рекурзију

(3) $$I_n=\frac{1}{2a^2\,(n-1)}\left[\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+(2n-3)\,I_{n-1}\right],$$

(што је на вежбама изведено за $a=1$, а студентима се саветује да га сами изведу у општем случају) при чему је иницијални (терминални) интеграл

$$I_n=\int \frac{dx}{x^2+a^2}=arctg\frac{x}{a}+c.$$

Јасно је да ће цела ова прича "пролазити" и ако се a^2 замени са $-a^2$. Другим речима, интеграл

$$J_n=\int \frac{dx}{\left(x^2-a^2\right)^n}$$

испуњава рекурзију

(4) $$J_n=\frac{1}{-2a^2\,(n-1)}\left[\frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^{n-1}}+(2n-3)\,J_{n-1}\right],$$

при чему је иницијални (терминални) интеграл

$$J_1=\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c.$$

2. Решити неодређени интеграл

$$I=\int \frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)dx}{\left(x^2-3x-1\right)^3}$$

Након "чувене" смене $x=t+\frac{3}{2}\Rightarrow dx=dt$ добијамо

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{\left(1-\frac{t+\frac{3}{2}}{2}\right)dt}{\left(\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-3\left(t+\frac{3}{2}\right)-1\right)^3}=\int \frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t\right)dt}{\left(t^2-\frac{13}{4}\right)^3}\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\left(t^2-\frac{13}{4}\right)^3}-\frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{\left(t^2-\frac{13}{4}\right)^3}=\frac{1}{4}J-\frac{1}{2}K.\end{aligned}$$

Интеграл K решавамо стандарно сменом

$$u=t^2-\frac{13}{4}\Rightarrow du=2t\,dt\Rightarrow t\,dt=\frac{1}{2}\,du:$$

$$K=\int \frac{\frac{1}{2}\,du}{u^3}=-\frac{1}{4}u^{-2}+c_2=-\frac{1}{4}\left(t^2-\frac{13}{4}\right)^{-2}+c_2=-\frac{1}{4}\left(x^2-3x-1\right)^{-2}+c_2.$$

За решавање интеграла J користимо (4):

$$\begin{aligned}
J &= -\frac{1}{2\cdot\dfrac{13}{4}\cdot 2}\left[\frac{t}{\left(t^2-\dfrac{13}{4}\right)^3}+3\int\frac{dt}{\left(t^2-\frac{13}{4}\right)^2}\right]+c_1\\
&= -\frac{1}{13}\left[\frac{t}{\left(t^2-\dfrac{13}{4}\right)^3}-3\frac{1}{2\cdot\dfrac{13}{4}\cdot 2}\left[\frac{t}{t^2-\frac{13}{4}}+\int\frac{dt}{t^2-\frac{13}{4}}\right]\right]+c_1\\
&= -\frac{1}{13}\left[\frac{t}{\left(t^2-\dfrac{13}{4}\right)^3}-\frac{3}{13}\left[\frac{t}{t^2-\frac{13}{4}}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{13}{4}}}\ln\left(\frac{t-\sqrt{\frac{13}{4}}}{t+\sqrt{\frac{13}{4}}}\right)\right]\right]+c_1\\
&= -\frac{1}{13}\left[\frac{x-\frac{3}{2}}{\left(x^2-3x-1\right)^3}-\frac{3}{13}\left[\frac{x-\frac{3}{2}}{x^2-3x-1}+\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left(\frac{x-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}}{x-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}}\right)\right]\right]+c_1
\end{aligned}$$

А. Пејчев