Интеграли ирационалних функција

Овај материјал се директно надовезује на садржај вежби и предавања (то значи да прво треба проучити вежбе и предавања).

Неопходно је знати

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{a+x^2} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + c,\ a \neq 0 \tag{1}$$

и

$$I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\cdot\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a}}{2} + C,\ a>0. \tag{2}$$

Притом ће се од студената очекивати да ове интеграле, уколико их користе, уједно и **изведу**.

1. Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-6x+7}}\,dx$$

Уводећи линеарну смену $x = t+3 \Rightarrow dx = dt$ добијамо

$$I = \int \frac{(t+3)^2}{\sqrt{(t+3)^2-6(t+3)+7}}\,dt. = \int \frac{t^2+6t+9}{\sqrt{t^2-2}}\,dt$$

Проширивањем бројиоца, полазни интеграл I раставља се на следеће интеграле:

$$I = \int \frac{t^2-2+6t+11}{\sqrt{t^2-2}}\,dt = \int\sqrt{t^2-2}\,dt + 6\int\frac{t}{\sqrt{t^2-2}}\,dt + 11\int\frac{1}{\sqrt{t^2-2}}\,dt + c.$$

Први интеграл, на основу (1), једнак је:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{t^2-2}\,dt &= \frac{t}{2}\sqrt{t^2-2} - \ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right| + c\\ &= \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{x^2-6x+7} - \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+7}\right| + c.\end{aligned}$$

Други интеграл:

$$\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-2}} = \int\frac{2t\,dt}{2\sqrt{t^2-2}} = \int \mathrm{d}\left(\sqrt{t^2-2}\right) = \sqrt{t^2-2}+c = \sqrt{x^2-6x+7}+c.$$

Трећи интеграл је таблични:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right| + c = \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+7}\right| + c.$$

Коначно, решење полазног интеграла I, једнако је:

$$I = \frac{1}{2}(x+9)\sqrt{x^2-6x+7} + 10\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+7}\right| + c.$$

Примена Методе Остроградског би подразумевала да се за полазни интеграл претпостави решење:

$$I = (Ax+B)\sqrt{x^2-6x+7} + \int\frac{k}{\sqrt{x^2-6x+7}}\,dx$$

и пронађу константе A, B и k. Извод леве и десне стране је:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-6x+7}} &\equiv A\sqrt{x^2-6x+7} + \frac{(Ax+B)(2x-6)}{2\sqrt{x^2-6x+7}} + \frac{k}{\sqrt{x^2-6x+7}}\\ &\equiv \frac{A\left(x^2-6x+7\right)+(Ax+B)(x-3)+k}{\sqrt{x^2-6x+7}}\end{aligned}$$

и идентитет бројиоца даје:

$$\begin{aligned}x^2 &\equiv A\left(x^2-6x+7\right)+(Ax+B)(x-3)+k\\ &\equiv 2Ax^2+(-9A+B)x+k+7A-3B.\end{aligned}$$

Следи $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{9}{2}$ и $k=10$. Сада се на основу првог решења лако види да се добија исти резултат.

2. Решити неодређени интеграл:
$$I=\int\frac{2x^2+5x+6}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$$
Искористимо сад прво метод Остроградског (после тога следи и решење на други начин). Идеја метода је да се за полазни интеграл претпостави решење:
$$I=(Ax+B)\sqrt{1+x-x^2}+\int\frac{k}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$$
и пронађу константе A, B и k. Извод леве и десне стране је:
$$\begin{aligned}\frac{2x^2+5x+6}{\sqrt{1+x-x^2}} &\equiv A\sqrt{1+x-x^2}+\frac{(Ax+B)(1-2x)}{2\sqrt{1+x-x^2}}+\frac{k}{\sqrt{1+x-x^2}}\\ &\equiv \frac{A\left(1+x-x^2\right)+\left(\frac{A}{2}x+\frac{B}{2}\right)(1-2x)+k}{\sqrt{1+x-x^2}}\end{aligned}$$
и идентитет бројиоца даје:
$$\begin{aligned}2x^2+5x+6 &\equiv A\left(1+x-x^2\right)+\left(\frac{A}{2}x+\frac{B}{2}\right)(1-2x)+k\\ &\equiv x^2(-2A)+x\left(\frac{3}{2}A-B\right)+k+A+\frac{1}{2}B\end{aligned}$$
Следи $A=-1$, $B=-\frac{13}{2}$ и $k=\frac{41}{4}$. Полазни интеграл је једнак:
$$I=-\left(x+\frac{13}{2}\right)\sqrt{1+x-x^2}+\frac{41}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}+c.$$
Означимо последњи интеграл са J и уведимо линеарну смену $x=t+\frac{1}{2}\Rightarrow dx=dt$, одакле следи:
$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1+t+\frac{1}{2}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}.$$
Последњи интеграл је таблични:
$$J=\frac{1}{\sqrt{5/4}}\int\frac{dt}{\sqrt{1-\frac{t^2}{5/4}}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2}}=\arcsin\frac{2t}{\sqrt{5}}.$$
После враћања смене у интеграл J, решење полазног интеграла I је:
$$I=-\left(x+\frac{13}{2}\right)\sqrt{1+x-x^2}+\frac{41}{4}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+c.$$
Други начин да се уради овај задатак би био да се одмах уведе смена (исто као и у претходном задатку) $x=t+\frac{1}{2}\Rightarrow dx=dt$:
$$I=\int\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+5\left(t+\frac{1}{2}\right)+6}{\sqrt{1+t+\frac{1}{2}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}}\,dt=\int\frac{2t^2+7t+9}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}\,dt.$$
Даље, поступамо на следећи начин:
$$\begin{aligned}\frac{2t^2+7t+9}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}} &= \frac{2\left(t^2-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}\right)+7t+9}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}=\frac{2\left(t^2-\frac{5}{4}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}+\frac{\frac{5}{2}+7t+9}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}\\ &= \frac{2\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}^{\,2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}+\frac{7t+\frac{23}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}=2\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}+\frac{7t+\frac{23}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}.\end{aligned}$$

Следи

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(2\sqrt{\frac{5}{4} - t^2} + \frac{7t + \dfrac{23}{2}}{\sqrt{\dfrac{5}{4} - t^2}} \right) dt \\
&= 2 \int \sqrt{\sqrt{\frac{5}{4}}^2 - t^2}\, dt + 7 \int \frac{t\, dt}{\sqrt{\dfrac{5}{4} - t^2}} + \frac{23}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{\sqrt{\dfrac{5}{4}}^2 - t^2}}.
\end{aligned}
$$

На основу (2) је

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{\sqrt{\frac{5}{4}}^2 - t^2}\, dt &= \frac{t \cdot \sqrt{\dfrac{5}{4} - t^2} + \dfrac{5}{4} \arcsin \dfrac{2t}{\sqrt{5}}}{2} + C \\
&= \frac{\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{1 + x - x^2} + \dfrac{5}{4} \arcsin \dfrac{2x-1}{\sqrt{5}}}{2} + C.
\end{aligned}
$$

Сада на исти начин као у првом решењу добијамо

$$
\begin{aligned}
&-\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{1 + x - x^2} - \frac{5}{4} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} - 7\sqrt{1 - x - x^2} + \frac{23}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} \\
= \ &-\left(x + \frac{13}{2}\right) \sqrt{1 + x - x^2} + \frac{41}{4} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + c.
\end{aligned}
$$

Покушај увођења неке од Ојлерових смена би могао бити трећи начин да се ради овакав задатак. Нпр., ако би се увела смена

$$
\sqrt{-x^2 + x + 1} = tx + 1,
$$

одакле након квадрирања добијамо

$$
-x^2 + x + 1 = t^2x^2 \pm 2tx + 1 \Rightarrow -x + 1 = t^2 x + 2t \Rightarrow 1 - 2t = x\left(t^2 + 1\right),
$$

следи:

$$
x = \frac{1-2t}{t^2+1} \Rightarrow dx = \left(\frac{1-2t}{t^2+1}\right)' dt = \frac{-2(t^2+1) - (1-2t)\cdot 2t}{\left(t^2+1\right)^2}\, dt = 2\frac{t^2 - t - 1}{\left(t^2+1\right)^2}\, dt.
$$

Сада је

$$
\sqrt{-x^2 + x + 1} = tx + 1 = \frac{t(1-2t) + t^2 + 1}{t^2+1} = \frac{-t^2 + t + 1}{t^2+1}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&2\left(\frac{1-2t}{t^2+1}\right)^2 + 5\left(\frac{1-2t}{t^2+1}\right) + 6 = \frac{2(1-2t)^2 + 5(1-2t)(t^2+1) + 6(t^2+1)^2}{(t^2+1)^2} \\
= \ &\frac{2(1 - 4t + 4t^2) + 5(-2t^3 + t^2 - 2t + 1) + 6(t^4 + 2t^2 + 1)}{(t^2+1)^2} \\
= \ &\frac{6t^4 - 10t^3 + 25t^2 - 18t + 13}{(t^2+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Дакле,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\dfrac{6t^4 - 10t^3 + 25t^2 - 18t + 13}{(t^2+1)^2}}{\dfrac{-t^2 + t + 1}{t^2+1}} \cdot 2\frac{t^2 - t - 1}{\left(t^2+1\right)^2}\, dt \\
&= -2 \int \frac{6t^4 - 10t^3 + 25t^2 - 18t + 13}{(t^2+1)^3}\, dt,
\end{aligned}
$$

што као интеграл рационалне функције, али није баш приступачно за решавање. Стога Ојлерове често није баш исплативо тек тако уводити.

А. Пејчев