Ovaj dokument sadrži zadatke iz predmeta Elektrotehnika na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Zadaci su koncipirani tako da prate tematske celine sa predavanja i omogućavaju vežbanje ključnih pojmova i metoda. Zadaci su numerisani i raspoređeni prema oblastima koje se obrađuju na predavanjima. Preporučuje se da pokušate samostalno da rešite svaki zadatak, a zatim uporedite svoj postupak sa ponuđenim rešenjima. Posebnu pažnju obratite na analizu vektorskih veličina, jedinica i fizičkih pretpostavki. U nekim zadacima data su i potpitanja koja podstiču razumevanje i diskusiju. Kroz zadatke ćete uočiti sledeće oznake:

Za važne komentare i mesta gde studenti često greše.

Za dodatna pitanja vezano za zadatak.

Za one koji žele da rade više - ne dolazi na ispitu!.

Za ideju, komentar na izvođenje.

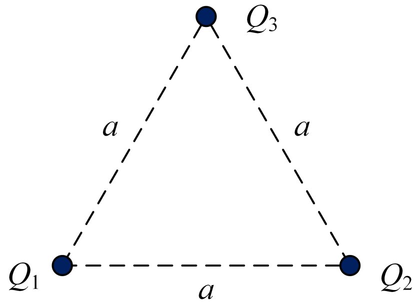
Za preporuku uz zadatak.

Konsultacije: Za dodatna pojašnjenja i pitanja u vezi sa predmetom možete me kontaktirati putem:

- Email: vbecejac@mas.bg.ac.rs
-

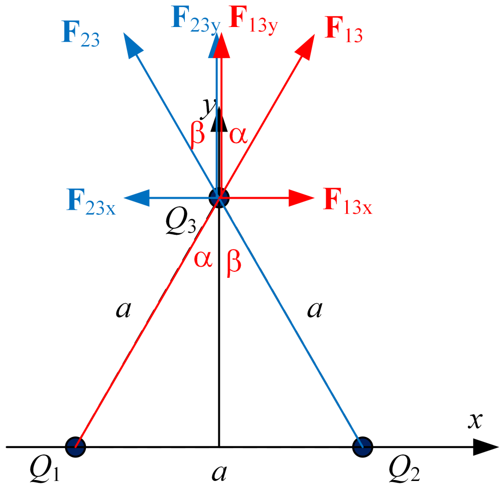
1 Elektrostatika

1. Tri mala tela, naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = 100$ pC i $Q_3 = -200$ pC, nalaze se u vazduhu, u temenima jednakostraničnog trougla stranice $a = 2$ cm. Izračunati vektor jačine elektrostatičke sile koja deluje na telo naelektrisanja Q_3.



Rešenje: Uvedimo koordinatni sistem kao na slici. Vektor elektrostatičke sile ćemo dobiti primenom Kulonovog zakona, koji pišemo

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{r}_{012}.$$



Konkretno, u ovom zadatku silu na tačkasto naelektrisanje Q_3 ćemo dobiti superpozicijom sila:

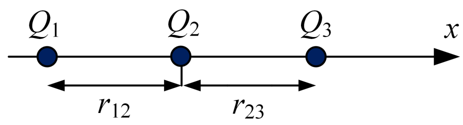
$$\begin{aligned}
\mathbf{F_3} =& \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}^2} \mathbf{r_{013}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}^2} \mathbf{r_{023}} \\
=& \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{a^2} (\sin\alpha \mathbf{i}_\mathrm{x} + \cos\alpha \mathbf{i}_\mathrm{y}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overset{Q_1}{\cancel{Q_2}} Q_3}{a^2} (-\sin\beta \mathbf{i}_\mathrm{x} + \cos\beta \mathbf{i}_\mathrm{y}) \\
=& \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{a^2} \left(\frac{a/2}{a} \mathbf{i}_\mathrm{x} + \frac{a\sqrt{3}/2}{a} \mathbf{i}_\mathrm{y} \right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{a^2} \left(-\frac{a/2}{a} \mathbf{i}_\mathrm{x} + \frac{a\sqrt{3}/2}{a} \mathbf{i}_\mathrm{y} \right) \\
=& \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{a^2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i}_\mathrm{y} \\
=& 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-12} \cdot (-200) \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 10^{-4}} \cdot \sqrt{3} \mathbf{i}_\mathrm{y} \\
=& -450\sqrt{3}\, \mathbf{i}_\mathrm{y} \text{ nN}.
\end{aligned}$$

Ovaj zadatak ilustruje primenu Kulonovog zakona u sistemu sa više tačkastkih naelektrisanja u vakuumu. Važno je razumeti da se ukupna sila na naelektrisanje Q_3 dobija kao **vektorski** zbir pojedinačnih sila koja na njega deluju od strane Q_1 i Q_2.

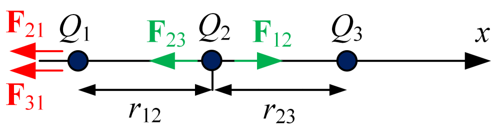
Da li smo mogli na samom početku rešavanja zadatka da predvidimo koju će komponentu imati vektor sile

Da li bi se tražena sila promenila ukoliko naelektrisanja Q_1 i Q_2 zamene mesta? Šta ako je $Q_1 \neq Q_2$?

2. Tri tačkasta naelektrisanja su postavljena na x-osi, kao na slici. Ukoliko je $Q_1 = 20\ \mu$C, $Q_2 = -6\ \mu$C i $Q_3 = 10\ \mu$C i rastojanje između naelektrisanja Q_1 i Q_2 je $r_{12} = 45$ cm, a rastojanje između Q_2 i Q_3 je $r_{23} = 50$ cm. Odrediti silu na tačkasta naelektrisanja Q_1 i Q_2.



Rešenje: Prema oznakama sa slike imamo da je sila na tačkasto naelektrisanje Q_1:



$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_1}{r_{12}^2}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{(r_{12}+r_{23})^2}(-\mathbf{i}_\mathrm{x})\\ &= 9\cdot 10^9\cdot\frac{-6\cdot 10^{-6}\cdot 20\cdot 10^{-6}}{45^2\cdot 10^{-4}}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) + 9\cdot 10^9\cdot\frac{20\cdot 10^{-6}\cdot 10\cdot 10^{-6}}{95^2\cdot 10^{-4}}(-\mathbf{i}_\mathrm{x})\\ &= -\frac{16}{3}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) + \frac{720}{361}(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) = 3{,}34\mathbf{i}_\mathrm{x}\ \mathrm{N}.\end{aligned}$$

Sila na tačkasto naelektrisanje Q_2 je:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\mathbf{i}_\mathrm{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3 Q_2}{r_{23}^2}(-\mathbf{i}_\mathrm{x})\\ &= 9\cdot 10^9\cdot\frac{20\cdot 10^{-6}\cdot(-6)\cdot 10^{-6}}{45^2\cdot 10^{-4}}\mathbf{i}_\mathrm{x} + 9\cdot 10^9\cdot\frac{10\cdot 10^{-6}\cdot(-6)\cdot 10^{-6}}{50^2\cdot 10^{-4}}(-\mathbf{i}_\mathrm{x})\\ &= -\frac{16}{3}\mathbf{i}_\mathrm{x} + \left(-\frac{54}{25}\right)(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) = -3{,}17\,\mathbf{i}_\mathrm{x}\ \mathrm{N}.\end{aligned}$$

3. Dve kuglice su naelektrisane količinom naelektrisanja $Q_1 = 10$ nC i $Q_2 = 30$ nC, a nalaze se na rastojanju r u vakuumu. Koliko je rastojanje r ako je intenzitet sile uzajamnog delovanja kuglica 27 mN?

Rešenje: Intenzitet uzajamnog delovanja kuglica je

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1 Q_2|}{r^2} \Longrightarrow r = \sqrt{\frac{|Q_1 Q_2|}{4\pi\varepsilon_0\,|\mathbf{F}|}}.$$

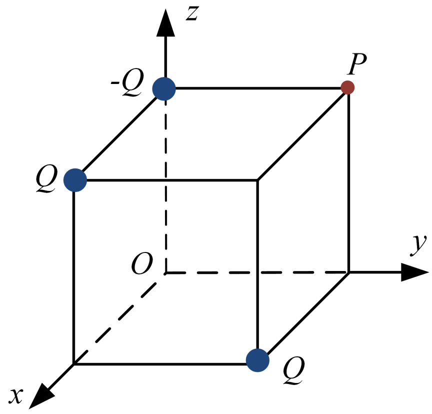
Odavde je

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{9\cdot\cancel{10^9}\cdot\frac{10\cdot\cancel{10^{-9}}\cdot 30\cdot 10^{-9}}{27\cdot 10^{-3}}}\\ &= \sqrt{100\cdot 10^{-6}} = 10\cdot 10^{-3} = 10\ \mathrm{mm}.\end{aligned}$$

4. **(Za samostalni rad)** Jedno tačkasto naelektrisanje Q se nalazi u koordinatnom početku Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema, a drugo tačkasto naelektrisanje Q_1 se nalazi u koordinati (a, a). Odrediti izraz za električnu silu kojom naelektrisanje Q deluje na naelektrisanje Q_1.

Rezultat: $\mathbf{F} = \dfrac{QQ_1\sqrt{2}}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\mathbf{i}_\mathrm{x} + \mathbf{i}_\mathrm{y}\right).$

5. Tri tačkasta naelektrisanja Q, Q i $-Q$ su raspoređena u temenima kocke ivice dužine a, kao na slici. Sredina je vakuum. Odrediti izraz za vektor jačine električnog polja u tački P.



Rešenje: Vektor jačine električnog polja ćemo dobiti superpozicijom električnih polja zadata tri tačkasta naelektrisanja. Za naelektrisanje postavljeno na koordinatama $(0, 0, a)$, $(a, 0, a)$ i $(a, a, 0)$ imamo, respektivno:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-Q}{a^2}\mathbf{i}_\mathrm{y} \\
\mathbf{E}_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{x}+\mathbf{i}_\mathrm{y}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{x}+\mathbf{i}_\mathrm{y}\right) \\
\mathbf{E}_3 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{x}+\mathbf{i}_\mathrm{z}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{x}+\mathbf{i}_\mathrm{z}\right).
\end{aligned}$$

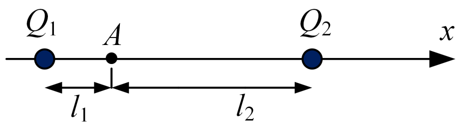
Konačno,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} = \mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{y}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{x}+\mathbf{i}_\mathrm{y}-\mathbf{i}_\mathrm{x}+\mathbf{i}_\mathrm{z}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{y}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-2\mathbf{i}_\mathrm{x}+\mathbf{i}_\mathrm{y}+\mathbf{i}_\mathrm{z}\right)\right).
\end{aligned}$$

! Vektor jačine električnog polja tačkastog naelektrisanja ima radijalan pravac. To ja pravac duž vektora položaja $\mathbf{r}$, koji spaja centar simetrije, u ovom slučaju tačkasto naelektrisanje, sa nekom tačkom u prostoru.

Odrediti izraz za vektor jačine električnog polja u tački P od naelektrisanja postavljenog u tačku $(a, 0, 0)$.

6. Intenzitet električnog polja u tački A, koja se nalazi između dva tačkasta naelektrisanja Q_1 i Q_2 je jednak nuli. Ako je $l_2 = 3l_1$, izračunati odnos između naelektrisanja Q_2/Q_1?



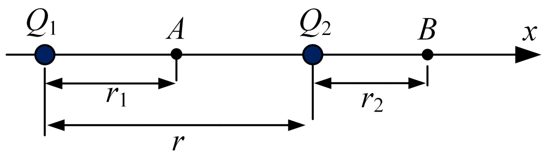
Rešenje: Prema uslovu zadatka je

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0 = \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{Q_1}{\cancel{l_1^2}} \cancel{\mathbf{i}_\mathrm{x}} + \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{Q_2}{9\cancel{l_1^2}} (-\cancel{\mathbf{i}_\mathrm{x}}) \,. \tag{1}$$

Iz relacije (1) je

$$Q_1 - \frac{Q_2}{9} = 0 \Longrightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = 9.$$

7. Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = 4$ pC se nalaze u vazduhu na rastojanju $r = 30$ cm, kao na slici. **a)** Izračunati vektor električnog poljau tačkama A i B ako su rastojanja $r_1 = 20$ cm i $r_2 = 10$ cm. **b)** Izračunati potencijale tačaka A i B, kao i napon U_{AB}. Smatrati da je referentna tačka u beskonačnosti. **c)** Izračunati silu koja bi delovala na uneto naelektrisanje $Q_0 = 1$ pC u tačku A.



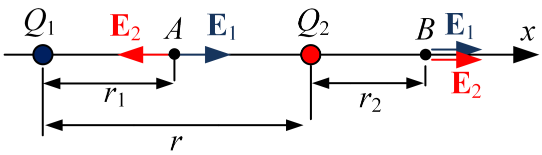
Rešenje: **a)** Vektor jačine električnog polja od tačkastih naelektrisanja u traženim tačkama ćemo dobiti primenom formule

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{i}_r$$

i uz korišćenje superpozicije.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_A &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\mathbf{i}_\mathrm{x} + \frac{\cancelto{Q_1}{Q_2}}{4\pi\varepsilon_0 (r - r_1)^2} (-\mathbf{i}_\mathrm{x}) \\
&= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{(r - r_1)^2} \right) \mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1}{0,2^2} - \frac{1}{0,1^2} \right) \mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= 36 \cdot 10^{-3} \cdot (-75)\, \mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= -2700 \cdot 10^{-3} \mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= -2,7 \mathbf{i}_\mathrm{x} \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_B &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \left(r + r_2\right)^2}\mathbf{i}_\mathrm{x} + \frac{\cancelto{Q_1}{Q_2}}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(r + r_2\right)^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1}{0,4^2} + \frac{1}{0,1^2}\right)\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= 36 \cdot 10^{-3} \cdot 106,25\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= 3825 \cdot 10^{-3}\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= 3,825\mathbf{i}_\mathrm{x}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
\end{aligned}
$$



b) Potencijale tačaka A i B ćemo dobiti primenom formule

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Dakle,

$$
\begin{aligned}
V_A &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{\cancelto{Q_1}{Q_2}}{4\pi\varepsilon_0 \left(r - r_1\right)} \\
&= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\left(r - r_1\right)}\right) \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,1}\right) \\
&= 36 \cdot 10^{-3} \cdot 15 = 0,54\ \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_B &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \left(r + r_2\right)} + \frac{\cancelto{Q_1}{Q_2}}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \\
&= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r + r_2} + \frac{1}{r_2}\right) \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,1}\right) \\
&= 36 \cdot 10^{-3} \cdot 12,5 = 0,45\ \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

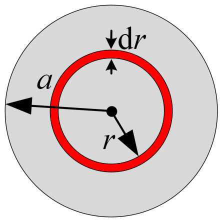
c) Sila koja bi delovala na tačkasto naelektrisanje u tački A se može dobiti iz Kulonovog zakona

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= Q_0 \cdot \mathbf{E}_A = 1 \cdot 10^{-12} \cdot (-2,7)\,\mathbf{i}_\mathrm{x} \\
&= -2,7\mathbf{i}_\mathrm{x}\ \mathrm{pN}.
\end{aligned}
$$

8. Zapreminska gustina naelektrisanja lopte poluprečnika a analitički se može opisati funkcijom $\rho = \rho_0 \cdot \frac{r}{a}$, gde je r odstojanje posmatrane tačke od centra lopte $(0 \leq r \leq a)$, a ρ_0 konstanta. Odrediti ukupno naelektrisanje lopte.

Rešenje: Ukupno naelektrisanje lopte možemo dobiti integracijom naelektrisanja raspodeljenom po sfernim ljuskama poluprečnika r i debljine $\mathrm{d}r$. Elementarna zapremina je $\mathrm{d}v = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$, pa je ukupno naelektrisanje lopte

$$Q = \int_0^a \rho_0 \frac{r}{a} \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{\rho_0}{a} \cdot 4\pi \cdot \int_0^a r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\rho_0}{a} \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{4} a^4 = \rho_0 \pi a^3.$$



9. Napisati izraz za rad električne sile prilikom premeštanja tačkastog naelektrisanja Q iz tačke A u tačku B u vakuumu. Ukoliko je elektrostatičko polje u vakuumu je $\mathbf{E} = 10\,\mathbf{i}_\mathrm{x}$ V/m, a tačkasto naelektrisanje $Q = 1$ pC, odrediti rad koji izvrši električna sila prilikom premeštanja ovog naelektrisanja iz tačke $A\,(1\,\mathrm{m}, 2\,\mathrm{m}, 3\,\mathrm{m})$ u tačku $B\,(4\,\mathrm{m}, 5\,\mathrm{m}, 6\,\mathrm{m})$.

Rešenje: Traženi izraz je

$$A = \int_A^B Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = QU_{AB}.$$

Zamenom datih brojnih vrednosti i imajući u vidu da je putanja integracije proizvoljna, dobija se

$$A = 10^{-12} \int_1^4 10\mathbf{i}_\mathrm{x} \cdot dx \cdot \mathbf{i}_\mathrm{x} = 10^{-12} \cdot 10 \cdot 3 = 30 \text{ pJ}.$$

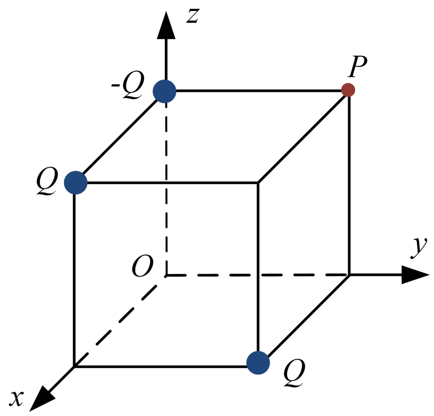
10. Za sistem naelektrisanja opisan u Zadatku 5, odrediti potencijal u tački P ukoliko je **a)** referentna tačka u beskonačnosti i **b)** ukoliko je referentna tačka u koordinatnom početku.

Rešenje: **a)** Električni potencijal tačke A od tačkaskog naelektrisanja je dat izrazom

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_\mathrm{ref}}\right), \tag{1}$$

gde su r_a i r_ref odstojanja naelektrisanja Q do tačke A i referentne tačke, respektivno. Kako je referentna tačka u beskonačnosti, dobijamo

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \cancelto{0}{\frac{1}{r_\mathrm{ref}}}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_a}.$$



Superpozicijom dobijamo

$$V_A = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(-1+\sqrt{2}\right).$$

Studenti često prave greške, zbog sličnostima sa izrazom za vektor jačine električnog polja. Potencijal opada linearno sa rastojanjem između tačkastkog naelektrisanja koje stvara elektrostatičko polje i tačke u kojoj se određuje potencijal. Eektrostatičko polje opada sa kvadratom udaljenosti tačkastog naelektrisanja od tačke gde određuje vektor jačine elektrostatičkog polja. Takođe, potencijal je skalar, a električno polje je vektor.

b) Ukoliko je referentna tačka u koordinatnom početku, primenom relacije (1) dobijamo

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{a\sqrt{2}}\right) + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{a\sqrt{2}}\right) = 0.$$

11. (Za samostalni rad) Dva tačkasta naelektrisanja Q i $-Q$ se nalaze u tačkama sa koordinatama $(0,0,a)$ i $(0,0,-a)$, respektivno. Odrediti izraz za potencijal u tački $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$.

Rezultat: $V = \dfrac{Q}{3\pi\varepsilon_0 a}$.

12. Tačkasto naelektrisanje Q se nalazi u koordinatnom početku Dekartovog sistema. Odrediti rad prilikom premeštanja tačkastog naelektrisanja Q_0 iz tačke $(a,0,0)$ do tačke $(-2a,0,0)$ duž x-ose. Da li bi se rad promenio ukoliko bi se promenila putanja premeštanja naelektrisanja Q_0?

Rešenje: Na naelektrisanje Q_0 koje se kreće u elektrostatičkom polju $\mathbf{E}$ deluje električna sila $\mathbf{F} = Q_0\mathbf{E}$. Rad koji se izvrši električna sila prilikom pomeranja naelektrisanja Q_0 iz tačke A u tačku B je

$$\begin{aligned} A &= \int_A^B \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_A^B Q_0\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = Q_0\int_A^B \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \\ &= Q_0 U_{AB} = Q_0\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right) = \frac{Q_0 Q}{8\pi\varepsilon_0 a}. \end{aligned}$$

Prisetimo se da jedan sistem u stanju statičke ravnoteže ne može menjati svoju energiju, pa ne može izvršiti nikakav rad. Time dobijamo

$$\boxed{\oint_C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0,} \tag{1}$$

U jednačini (1) je sa kružićem na integralu označena kontura (zatvorena putanja). Kako je elektrostatičko polje konzervativno (kao i polje gravitacije) rad ne zavisi od putanje integracije, već samo od položaja početne i krajnje tačke. Integralna relacija (1) je direktna posledica zakona o održanju energije.

13. Naelektrisanja $Q_1 = 5$ nC i $Q_0 = -2$ nC se nalaze na međusobnoj udaljenosti od $r_1 = 1$ m. Koliki je izvršen rad i ko će ga izvršiti ako se naelektrisanje Q_0 približi na rastojanje $r_2 = 0,5$ m od naelektrisanja Q_1?

Rešenje: Neka je naelektrisanje Q_0 u početnom trenutku u tački A, a u krajnjem trenutku u tački B. Traženi rad je jednak

$$\begin{aligned} A = Q_0 U_{AB} &= Q_0 \cdot \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(-2 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-9}\right) \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{0,5}\right) \\ &= 90 \cdot 10^{-9} = 90 \text{ nJ}. \end{aligned}$$

Pozitivan rezultat znači da je rad izvršilo električno polje. Primetiti da su naelektrisanja suprotnih znakova pa je električna sila privlačna. Ovo implicira da je do premeštanja naelektrisanja Q_0 došlo zbog električnih sila polja.

Do rešenja smo mogli doći i preko razlike početne i krajnje elektrostatičke energije.

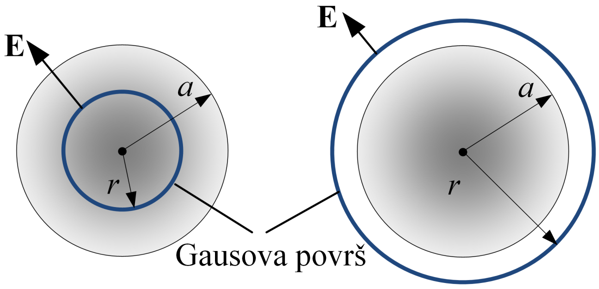
14. Koristeći se Gausovim zakonom, odrediti vektor jačine električnog polja od naelektrisanja koje je opisano u zadatku 3. Odrediti napon između tačaka A i B koje se nalaze na udaljenostima $\frac{a}{2}$ i $\frac{3a}{2}$ od centra, respektivno.

Rešenje: Gausov zakon (teorema) kaže da je izlazni fluks vektora jačine električnog polja kroz zatvorenu površ S, koje stvara naelektrisanje Q, jednako naelektrisanju Q podeljenom dielektričnom konstantom ε_0. Matematički

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.}$$

Ovo je ujedno i jedna od osnovnih integralnih jednačina za elektrostatičko polje u vakuumu.

Zbog simetrije, linije električnog polja će biti radijalnog karaktera i intenzitet će biti isti u svim tačkama zamišljene sferne površine poluprečnika r, koja je koncentrična sa zadatom naelektrisanom loptom. Važno je dakle, koliko naelektrisanja se nalazi unutar zamišljene Gausove zatvorene površi.



Razlikujemo dva slučaja:
1. Za $r \leq a$ imamo

$$\begin{aligned} E \cdot \cancel{4\pi} r^2 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho_0 \frac{R}{a} \cdot \cancel{4\pi} R^2 \, \mathrm{d}R \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho_0}{a} \cdot \frac{1}{4} r^4 \end{aligned}$$

pa je odavde

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 a} \mathbf{i}_r. \tag{1}$$

2. Za $r > a$ imamo

$$\begin{aligned} E \cdot \cancel{4\pi} r^2 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^a \rho_0 \frac{R}{a} \cdot \cancel{4\pi} R^2 \, \mathrm{d}R \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho_0}{a} \cdot \frac{1}{4} a^4 \end{aligned}$$

pa je odavde

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 r^2} \mathbf{i}_r. \tag{2}$$

Primetimo da kada u izrazima (1) i (2) zamenimo $r = a$ dobijamo isti rezultat. Ovo znači da je jačina električnog polja neprekidna funkcija rastojanja r, merenog od centra lopte. Strogo matematički gledano imamo $\lim\limits_{r \to a^-} E(r) = \lim\limits_{r \to a^+} E(r)$.

Da li je vektor jačine električnog polja ma koje raspodele naelektrisanja u vakuumu uvek neprekidna funkcija rastojanja? Ako nije, možete li dati primer?

Napon je

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_{a/2}^{3a/2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{a/2}^{a} \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 a} \, \mathrm{d}r + \int_a^{3a/2} \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 r^2} \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0 a} \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_{a/2}^{a} + \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_a^{3a/2} \\ &= \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0 a} \cdot \frac{1}{3} \left(a^3 - \frac{a^3}{8} \right) + \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{\frac{3a}{2}} + \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{\rho_0}{12\varepsilon_0 a} \cdot \frac{7a^3}{8} + \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0} \frac{1}{3a} \\ &= \frac{15\rho_0 a^2}{96\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

15. Dve koncentrične sfere, poluprečnika $R_1 = 5$ cm i $R_2 = 9$ cm nalaze se u vazduhu. Spoljašnja sfera naelektrisana je količinom naelektrisanja $Q_2 = 10$ nC. Izračunati kolikom količinom naelektrisanja, Q_1, treba naelektrisati unutrašnju sferu da bi potencijal spoljašnje sfere bio $V_2 = 2$ kV. Smatrati da je referentna tačka u beskonačnosti.

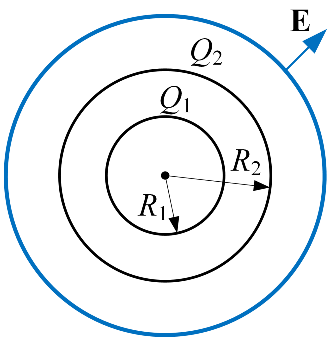
Rešenje: Kako postoji zahtev za potencijalom spoljašnje sfere, počećemo od njega. Prema definiciji, potencijal tačke A je integral električnog polja po proizvoljnoj putanji od te tačke do referentne tačke:

$$V_A = \int_A^{\mathrm{ref}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Potencijal spoljašnje sfere je

$$V_2 = \int_{R_2}^{+\infty} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{R_2}^{+\infty} E(r) \cdot \mathrm{d}r, \tag{1}$$

jer su linije električnog polja, zbog simetrije, radijalne. U ovom zadatku vektor jačine električnog polja se može odrediti iz Gausovog zakona. Primetimo iz granica integracije u izrazu (1) da je potrebno odrediti samo električno polje na intervalu $(R_2, +\infty)$.



Postavimo Gausovu površ kao na slici. Ukupno obuhvaćeno naelektrisanje ovako odabranom površi je $Q_1 + Q_2$ pa dobijamo za $r > R_2$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Primenom izraza (1) imamo

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_{R_2}^{+\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_2}^{+\infty} r^{-2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_2}^{+\infty} \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\cancelto{0}{\frac{1}{\infty}} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} Q_1 &= 4\pi\varepsilon_0 R_2 V_2 - Q_2 = \frac{1}{\cancel{9} \cdot 10^9} \cdot \cancel{9} \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^{-9} \\ &= 20 \cdot 10^{-9} - 10 \cdot 10^{-9} = 10 \text{ nC}. \end{aligned}$$

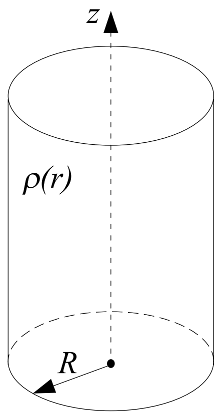
? Koliko bi bilo električno polje unutar manje sfere, a koliko između sfera?

Da li bi se zadatak promenio ukoliko unutrašnja sfera ne bi bila šuplja, već da je kompletna od metala?

Ako bi referentna tačka bila na nekom drugom mestu, npr. u centru, da li bi se promenio izraz za potencijal spoljašnje sfere?

Koliki bi bio rad potreban da se jedno tačkasto naelektrisanje Q_0 prebaci sa unutrašnju na spoljašnju sferu?

16. U veoma dugačkom cilindru poluprečnika R ravnomerno je raspoređena zapreminska gustina naelektrisanja $\rho(r) = \rho_0$, gde je ρ_0 konstanta. Odrediti vektor jačine električnog polja u proizvoljnoj tački prostora.



Rešenje: Kako je cilindar veoma dugačak, polje je aksijalno simetrično u odnosu na osu cilindra. Da bismo odredili intenzitet električnog polja na ostojanju r od ose, primenićemo Gausov zakon. Biramo koaksijalno postavljeni valjak poluprečnika baze r i visine h. Električno polje je tangencijalno na baze i normalno na omotač pa fluks postoji samo kroz omotač valjka. Razlikujemo slučajeve:

1) $r \leq R$:

$$\oint_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E \cdot \cancel{2\pi} r \cancel{h} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho_0 \cancel{2\pi} r' \cancel{h}\,\mathrm{d}r'$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\rho_0 \cdot \frac{1}{2}r^2 = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \Longrightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\mathbf{i}_r.$$

2) $r > R$:

$$E \cdot \cancel{2\pi} r \cancel{h} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R \rho_0 \cancel{2\pi} r' \cancel{h}\,\mathrm{d}r'$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\rho_0 \cdot \frac{1}{2}R^2 \Longrightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}\mathbf{i}_r.$$

Studentima se predlaže da skiciraju funkciju jačine električnog polja u funkciji rastojanja, kao i da primete da je to neprekidna funkcija.

17. Naelektrisana lopta ima uniformno raspoređeno naelektrisanje $Q = 8$ µC. Odredi intenzitet električnog polja na rastojanju $r = 20$ cm od centra lopte. Lopta se može smatrati tačkastim naelektrisanjem.

Rezultat: $E = 1,8$ MV/m.

18. Beskonačna ravna žica je naelektrisana podužnom gustinom naelektrisanja $Q' = \lambda = 5$ nC/m. Koristeći Gausov zakon, odredi električno polje na rastojanju $r = 10$ cm od žice.

Rezultat: $E = 900$ V/m.

19. Beskonačna ravna ploča ima površinsku gustinu naelektrisanja $\sigma = 4$ µC/m². Koristeći Gausov zakon, odredi električno polje sa obe strane ploče.

Rezultat: 226 kV/m.

20. Unutar sferne Gausove površi polupečnika $R = 30$ cm nalazi se više naelektrisanja: $Q_1 = 3$ µC, $Q_2 = -1$ µC i $Q_3 = 2$ µC. Odredi ukupni električni fluks kroz površ.

Rezultat: $\Psi = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{\varepsilon_0}$ Vm.

21. Poluprečnik unutrašnjeg provodnika sfernog vazdušnog kondenzatora iznosi $r_1 = 2$ cm, a unutrašnji poluprečnik spoljašnjeg provodnika je $r_2 = 3$ cm. Napon između unutrašnjeg i spoljašnjeg provodnika je $U_{12} = 150$ V. Izračunati **a)** površinske gustine naelektrisanja obe elektrode. **b)** Najveću jačinu elektrostatičkog polja u kondenzatoru. **c)** Kapacitivnost kondenzatora.

Rešenje: Neka je unutrašnja elektroda kondenzatora opterećena sa Q, a spoljašnja sa $-Q$. U prostoru između elektroda $r \in (r_1, r_2)$ električno polje se može dobiti primenom Gausovog zakona:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \Longrightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad r \in (r_1, r_2)$$

Integracijom ovog polja od r_1 do r_2 dobija se napon

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Odavde je

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2 U_{12}}{r_2 - r_1} = \frac{\frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot \cancel{10^{-2}} \cdot 150}{(3-2) \cdot \cancel{10^{-2}}}$$

$$Q = 1 \text{ nC}.$$

Površinska gustina naelektrisanja unutrašnje elektrode je

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi r_1^2} = \frac{10^{-9}}{4\pi \cdot 4 \cdot 10^{-4}} \approx 200 \, \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}.$$

Površinska gustina naelektrisanja spoljašnje elektrode je

$$\sigma_2 = \frac{-Q}{4\pi r_2^2} = \frac{-10^{-9}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{-4}} \approx -88,4 \, \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}.$$

Najveća jačina elektrostatičkog polja je za $r = r_1^+$ tj.

$$E_{\max} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9}}{4\cdot 10^{-4}} = 22,5\ \frac{\mathrm{MV}}{\mathrm{m}}.$$

Kapacitivnost kondenzatora je

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} = \frac{\frac{1}{9\cdot 10^9}\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 3\cdot \cancel{10^{-2}}}{(3-2)\cdot \cancel{10^{-2}}}$$
$$= \frac{6}{9}\cdot 10^{-7} = \frac{200}{3} = 66,67\ \mathrm{nF}.$$

22. Metalna naelektrisana lopta poluprečnika $a = 5$ cm nalazi se na potencijalu $V = 100$ V. Izračunati potencijal i intenzitet jačine električnog u tački A na rastojanju $b = 10$ cm od centra lopte.

Rešenje: Kako je lopta metalna, električno polje unutar lopte je jednako nuli tj. $E = 0$ za $r < a$, gde je r odstojanje centra lopte do posmatrane tačke. Električno polje izvan lopte, za $r > a$ možemo dobiti primenom Gausovog zakona i ono je

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\ \ r > a. \tag{1}$$

Metalna lopta je ekvipotencijalna i njen potencijal je

$$V = \int_a^{+\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

pa je odavde $Q = 4\pi\varepsilon_0 aV$. Potencijal proizvoljne tačke izvan lopte je

$$V = \int_r^{+\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\mathrm{d}R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\cancel{4\pi\varepsilon_0} aV}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} r} = \frac{aV}{r},$$

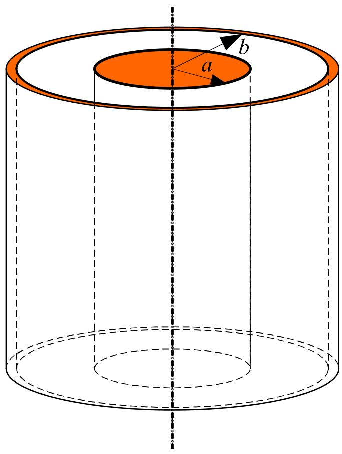
a potencijal u tački na rastojanju b je

$$V\,(r=b) = \frac{aV}{b} = \frac{5\cdot 100}{10} = 50\ \mathrm{V}.$$

Iz relacije (1) imamo

$$E\,(r=b) = \frac{\cancel{4\pi\varepsilon_0} aV}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} b^2} = \frac{5\cdot 10^{-2}\cdot 100}{100\cdot 10^{-4}} = 500\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

23. Koaksijalni vod, prikazan na slici, ima unutrašnji poluprečnik spoljašnje elektrode b. Kritično električno polje vazduha je $E_{\mathrm{kr}0}$. Izračunati **a)** poluprečnik unutrašnje elektrode a, tako da probojni napon ovog kondenzatora bude maksimalan i **b)** podužnu kapacitivnost koaksijalnog voda.



Rešenje: Neka je podužna gustina naelektrisanja unutrašnje elektrode Q'. Tada primenom Gausovog zakona možemo dobiti električno polje između elektroda:

$$E = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 r}, \ r \in (a, b) .$$

Napon između elektroda je

$$U = \int_a^b \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}.$$

Najveće električno polje je uz unutrašnju elektrodu, za $r = a^+$ pa dobijamo

$$\frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 a} \leq E_{\mathrm{kr0}} \Longrightarrow Q'_{\mathrm{max}} = 2\pi\varepsilon_0 a E_{\mathrm{kr0}}.$$

Probojni napon dobijamo kada izraz za Q'_{max} zamenimo u izraz za napon:

$$U_{\mathrm{pr}} = \frac{\cancel{2\pi\varepsilon_0} a E_{\mathrm{kr0}}}{\cancel{2\pi\varepsilon_0}}\ln\frac{b}{a} = aE_{\mathrm{kr0}}\ln\frac{b}{a}.$$

Maksimalni probojni napon dobijamo iz uslova

$$\frac{dU_{\mathrm{pr}}}{da} = E_{\mathrm{kr0}}\left(\ln\frac{b}{a} + a\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{-b}{a^2}\right) = 0 \Longleftrightarrow \ln\frac{b}{a} = 1,$$

pa je $\frac{b}{a} = e$, a odavde je $a = \frac{b}{e}$. Podužna kapacitivnost je po definiciji

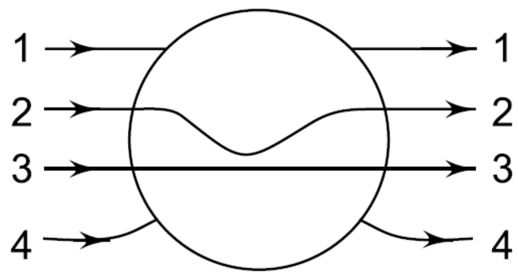
$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}.$$

Za slučaj kada je probojni napon maksimalan dobijamo

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln e} = 2\pi\varepsilon_0.$$

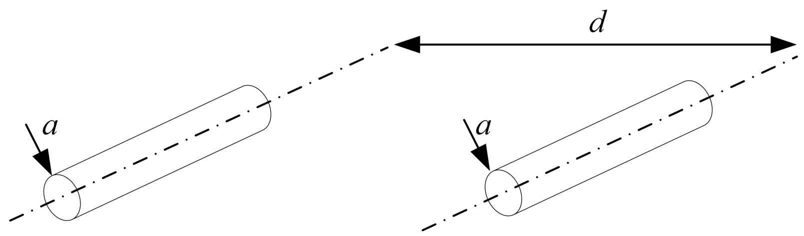
> Odavde je i jedinica u SI sistemu za permitivnost vakuuma $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$.

24. Metalna sfera se nalazi u homogenom električnom polju. Koja od prikazanih linija električnog polja je tačna?

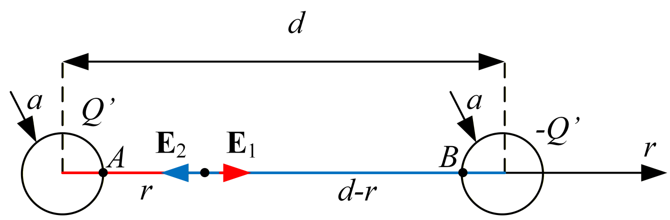


Rešenje: Kako je sfera metalna u njoj nema električnog polja. Stoga linije 2 i 3 odmah otpadaju. Kako električno polje na površi provodnika ima samo normalnu komponentu, u obzir dolaze samo linije polja 4.

25. Odrediti izraz za podužnu kapcitivnost tankog simetričnog vazdušnog dvožičnog voda, poluprečnika provodnika a i međusobnog rastojanja provodnika voda d ($d \gg a$). Ukoliko je vod priključen na izvor stalnog napona U, odrediti izraz za vektor podužne sile na desni provodnik voda.



Rešenje: Kako je $d \gg a$, raspodela naelektrisanja na jednom provodniku neće uticati na raspodelu naelektrisanja na drugom. Vektor električnog polja u proizvoljnoj tački prostora između provodnika je



$$\mathbf{E} = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{i}_r + \frac{-Q'}{2\pi\varepsilon_0 (d-r)}(-\mathbf{i}_r) = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right)\mathbf{i}_r.$$

Napon između elektroda je

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^{d-a} \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right)\mathrm{d}r \\ &= \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{d-a}{a} + \ln\frac{d-a}{a}\right) \approx \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d^2}{a^2} \\ &= \frac{Q'}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

Podužna kapacitivnost je

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{a}}. \tag{1}$$

Podužna sila na desni provodnik je

$$\mathbf{F}' = -Q'\cdot\mathbf{E} = -Q'\cdot\frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 (d-a)}\mathbf{i}_r \approx -\frac{Q'^2}{2\pi\varepsilon_0 d}\mathbf{i}_r. \tag{2}$$

Kako u postavci zadatka nije dato podužno naelektrisanje već napon, iz izraza (1) dobija se

$$Q' = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{a}}U,$$

pa zamenom u (2)

$$\mathbf{F}' = -\frac{\frac{\pi^2\varepsilon_0^2}{\ln^2\frac{d}{a}}U^2}{2\pi\varepsilon_0 d}\mathbf{i}_r = -\frac{\pi\varepsilon_0 U^2}{2d\ln^2\frac{d}{a}}\mathbf{i}_r.$$

26. Pločasti kondenzator ima površinu elektroda $S = 200\ \text{cm}^2$ i razmak između ploča $d = 5$ mm. Kritično električno polje za vazduh je $E_{\text{kr}} = 30\ \text{kV/cm}$. Izračunati **a)** maksimalni napon na koji se može priključiti kondenzator, a da ne dođe do proboja i b) maksimalnu električnu energiju kondenzatora.

Rešenje: Maksimalni napon je dat izrazom

$$U_{\max} = E_{\text{kr}} \cdot d = 3 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 15\ \text{kV}.$$

Maksimalna energija je

$$\begin{aligned} W_{C\max} &= \frac{1}{2} C U_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} U_{\max}^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{200 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-3}} \cdot 225 \cdot 10^6 \\ &= \frac{1}{80\pi} = 3,98\ \text{mJ}. \end{aligned}$$

27. Sferni vazdušni kondenzator ima poluprečnik unutrašnje elektrode $a = 4$ cm i unutrašnji poluprečnik spoljašnje elektrode $b = 10$ cm. Na kondenzator je doveden napon $U = 12$ kV. Odrediti električnu energiju uskladištenu u kondenzatoru.

Rezultat: $W_e = 534\ \mu\text{J}$.

28. Vazdušni sferni kondenzator ima poluprečnik unutrašnje elektrode a i unutrašnji poluprečnik spoljašnje elektrode $b = 100$ mm. Izračunati poluprečnik a tako da maksimalna električna energija bude što veća i kolika je u tom slučaju. Smatrati da pri tome ne dolazi do proboja kao i da je kritično električno polje za vazduh $E_{\text{kr}} = 30\ \text{kV/cm}$.

Rešenje: Električna energija kondenzatora je

$$W_C = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

gde je kapacitivnost $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$. Maksimalna električna energija će biti za $Q_{\max} = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E_{\text{kr}}$ tj.

$$W_C = \frac{1}{2} \frac{\left(4\pi\varepsilon_0 a^2 E_{\text{kr}}\right)^2}{\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}} = \frac{1}{2} \frac{4\pi\varepsilon_0 a^3 E_{\text{kr}}^2}{b} (b-a)$$

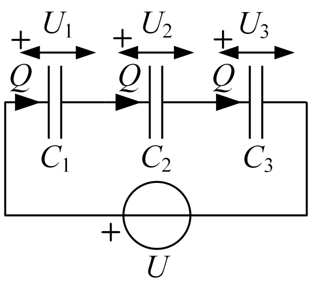
pa je

$$\frac{dW_C}{da} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{E_{\text{kr}}^2}{b} \left(3a^2 b - 4a^3\right) = 0 \Longrightarrow a = \frac{3b}{4} = 75\ \text{mm}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} W_{C\max} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^9 \cdot 0,1} \cdot \left(3 \cdot 10^6\right)^2 \cdot \left(75 \cdot 10^{-3}\right)^3 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \\ &= \frac{1}{1,8} \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^{12} \cdot 75^3 \cdot 10^{-9} \cdot 25 \cdot 10^{-3} \\ &= 5 \cdot 10^{-9} \cdot 75^3 \cdot 25 = \frac{27}{512}\ \text{J} \end{aligned}$$

29. Na izvor napona $U = 100$ V priključena su tri redno vezana kondenzatora nepoznatih kapacitivnosti C_1, C_2 i C_3, kao na slici. Izmereni naponi na ovim kondenzatorima su: $U_1 = 20$ V, $U_2 = 30$ V i $U_3 = 50$ V, respektivno, a količina elektriciteta na svakom od njih je $Q = 300$ µC. Odrediti: **a)** nepoznate kapacitivnosti C_1, C_2 i C_3, **b)** ekvivalentnu kapacitivnost ove redne veze kondenzatora, **c)** ukupnu energiju ovog sistema kondenzatora.



Rešenje: a) Kako je količina elektriciteta na svakom od kondenzatora 300 µC, primenom formule

$$Q = C \cdot U,$$

možemo dobiti kapacitivnost svakog od kondenzatora

$$C_1 = \frac{Q}{U_1} = \frac{300 \cdot 10^{-6}}{20} = 15\ \mu\text{F}$$
$$C_2 = \frac{Q}{U_2} = \frac{300 \cdot 10^{-6}}{30} = 10\ \mu\text{F}$$
$$C_3 = \frac{Q}{U_3} = \frac{300 \cdot 10^{-6}}{50} = 6\ \mu\text{F}.$$

b) Ekvivalentna kapacitivnost tri redno vezana kondenzatora je data

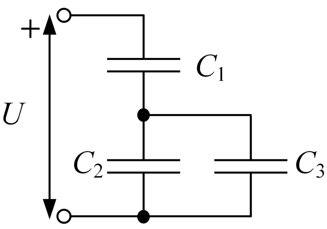
$$\frac{1}{C_{\text{ekv}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{15 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{10 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{6 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-6}}$$

pa je $C_{\text{ekv}} = 3$ µF.

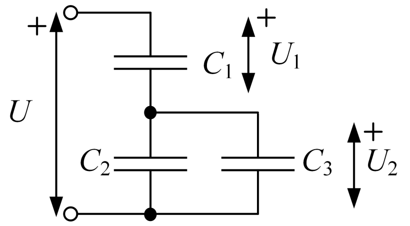
c) Ukupna energija je

$$W = \frac{1}{2} C_{\text{ekv}} U^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 = 15\ \text{mJ}.$$

30. Tri kondenzatora, $C_1 = 6$ µF, $C_2 = 3$ µF i $C_3 = 1$ µF, vezana kao na slici, priključena su na izvor napona U =100 V. Odrediti: **a)** količinu elektriciteta na svakom od kondenzatora, **b)** energiju svakog kondenzatora pojedinačno, i **c)** ukupnu energiju sistema kondenzatora.



Rešenje: a) Na slici označen je napon pobude i naponi na kondenzatorima. Iz jednačine naponske ravnoteže ima se



$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2 + C_3}$$
$$100 = Q \cdot \left(\frac{1}{6 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{4 \cdot 10^{-6}} \right),$$

pa je $Q = 240\ \mu\mathrm{C}$. Ova količina elektriciteta odgovara kondenzatoru čija je kapacitivnost C_1. Da bi se odredile količine elektriciteta na preostala dva kondenzatora, potrebno je izračunati napon U_2

$$U_2 = \frac{Q}{C_2 + C_3} = 60\ \mathrm{V},$$

pa je

$$Q_2 = C_2 \cdot U_2 = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 60 = 180\ \mu\mathrm{C}$$
$$Q_3 = C_3 \cdot U_2 = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 60 = 60\ \mu\mathrm{C}.$$

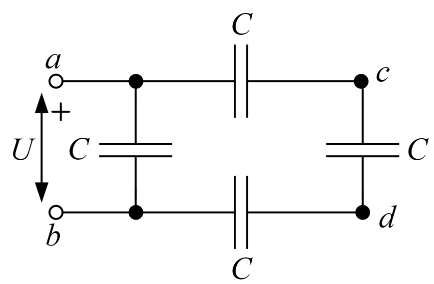
b) Energija svakog od kondenzatora je

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 40^2 = 4,8\ \mathrm{mJ}$$
$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 60^2 = 5,4\ \mathrm{mJ}$$
$$W_3 = \frac{1}{2} C_3 U_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 60^2 = 1,8\ \mathrm{mJ}.$$

c) Ukupna energija se dobija kao zbir pojedinačnih energija

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 12\ \mathrm{mJ}.$$

31. Svi kondenzatori kapacitivnosti $C = 6\ \mu\mathrm{F}$ su neopterećeni priključeni u kolo, kao na slici, i dovedeni na ulazni napon $U_{ab} = 100$ V. Odrediti **a)** napon na kondenzatoru koji se nalazi između tačaka c i d. **b)** Ukupnu energiju u sistemu.



Rešenje: a) Tri redno vezana kondenzatora imaju isto opterećenje Q. Iz relacije

$$U = \frac{Q}{C} + \frac{Q}{C} + \frac{Q}{C} = \frac{3Q}{C},$$

dobijamo da je

$$Q = \frac{CU}{3} = \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 100}{3} = 200\ \mu\text{C}.$$

Napon između tačaka c i d je

$$U_{cd} = \frac{Q}{C} = \frac{200 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6}} = 33,33\ \text{V}.$$

b) Ekvivalentna kapacitivnost između tačaka a i b se može dobiti ukoliko primetimo da su tri redno vezana kondenzatora u paraleli sa četvrtim kondenzatorom pa je

$$C_{\text{ekv}} = \frac{C}{3} + C = \frac{4C}{3} = 8\ \mu\text{F}.$$

Ova ekvivalentna kapacitivnost se nalazi na naponu U_{ab} pa je energija

$$W_{\text{uk}} = \frac{1}{2} C_{\text{ekv}} U_{ab}^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 = 4 \cdot 10^{-2} = 40\ \text{mJ}.$$