

Ovaj dokument sadrži zadatke iz predmeta Elektrotehnika na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Zadaci su koncipirani tako da prate tematske celine sa predavanja i omogućavaju vežbanje ključnih pojmova i metoda. Zadaci su numerisani i raspoređeni prema oblastima koje se obrađuju na predavanjima. Preporučuje se da pokušate samostalno da rešite svaki zadatak, a zatim uporedite svoj postupak sa ponuđenim rešenjima. Posebnu pažnju obratite na analizu vektorskih veličina, jedinica i fizičkih pretpostavki. U nekim zadacima data su i potpitanja koja podstiču razumevanje i diskusiju. Kroz zadatke ćete uočiti sledeće oznake:



Za važne komentare i mesta gde studenti često greše.



Za dodatna pitanja vezano za zadatak.



Za one koji žele da rade više - ne dolazi na ispitu!



Za ideju, komentar na izvođenje.



Za preporuku uz zadatak.

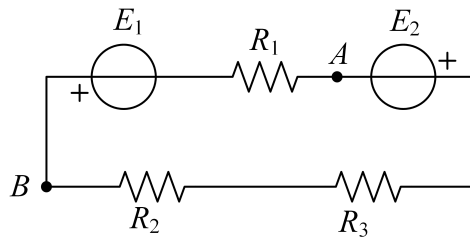
Konsultacije: Za dodatna pojašnjenja i pitanja u vezi sa predmetom možete me kontaktirati putem:

- Email: vbecejac@mas.bg.ac.rs

1 Stalne struje

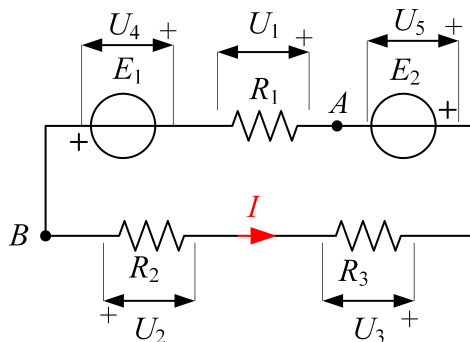
1. U kolu stalne struje prikazanom na slici poznato je $E_1 = 30 \text{ V}$, $E_2 = 25 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$ i $R_3 = 70 \Omega$. Izračunati:

- Jačinu struje u kolu.
- Napone svih elemenata.
- Napon između tačaka A i B , U_{AB} .
- Snage svih elemenata.



REŠENJE: a) Primenom Omovog zakona za prosto kolo, a prema usvojenom (proizvoljno) referentnom smeru struje dobijamo

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 - 25}{10 + 20 + 70} = \frac{1}{20} \text{ A} = 50 \text{ mA}.$$



b) Prema usvojenim (proizvoljno) referentnim smerovima napona dobijamo

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 I = 10 \cdot \frac{1}{20} = 0,5 \text{ V} \\ U_2 &= R_2 I = 20 \cdot \frac{1}{20} = 1 \text{ V} \\ U_3 &= -R_3 I = -70 \cdot \frac{1}{20} = -3,5 \text{ V} \\ U_4 &= -E_1 = -30 \text{ V} \\ U_5 &= E_2 = 25 \text{ V}. \end{aligned}$$

c) Traženi napon je

$$U_{AB} = R_1 I - E_1 = 0,5 - 30 = -29,5 \text{ V}$$

ili

$$U_{AB} = -E_2 - R_3 I - R_2 I = -25 - 3,5 - 1 = -29,5 \text{ V}.$$

d) Prema usvojenom referentnom smeru struje je

$$P_{E_1} = E_1 I = 30 \cdot \frac{1}{20} = 1,5 \text{ W}$$

$$P_{E_2} = -E_2 I = -25 \cdot \frac{1}{20} = -1,25 \text{ W}.$$

Snage otpornika možemo dobiti primenom formula $P_R = \frac{U_R^2}{R}$ ili $P_R = RI^2$. Dakle,

$$P_{R_1} = R_1 I^2 = 10 \cdot \frac{1}{400} = 25 \text{ mW},$$

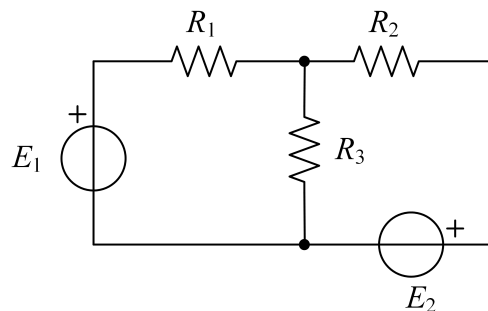
$$P_{R_2} = R_2 I^2 = 20 \cdot \frac{1}{400} = 50 \text{ mW},$$

$$P_{R_3} = \frac{U_3^2}{R_3} = \frac{12,25}{70} = 175 \text{ mW}.$$



Primetiti da je zbir snaga generatora $\sum P_{\text{gen}} = 1,5 - 1,25 = 0,25 \text{ W} = 250 \text{ mW}$, a da je zbir snaga na otpornicima $\sum P_R = 25 + 50 + 175 = 250 \text{ mW}$. Prema tome, potvrdili smo da važi zakon održanja snage.

2. Za kolo stalne struje sa slike poznato je $E_1 = 12 \text{ V}$, $E_2 = 6 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$ i $R_3 = 3 \Omega$. Napisati jednačine po Kirhofovom zakonima i izračunati snagu idealnih naponskih generatora.

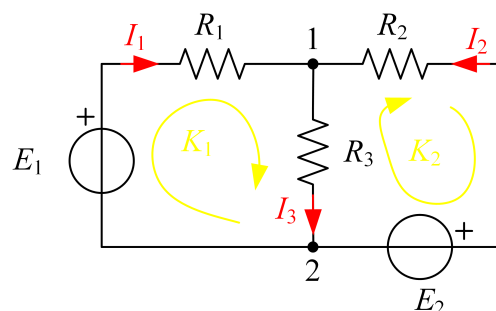


REŠENJE: Broj jednačina po I Kirhofovom zakonu (KZ) je $n_{\check{c}} - 1$, gde je $n_{\check{c}}$ broj čvorova u kolu. Broj jednačina po II Kirhofovom zakonu je $n_g - n_{\check{c}} + 1$, gde je n_g broj grana u kolu (grana je od čvora do čvora u teoriji grafova). Primetimo da je broj čvorova u kolu jednak $n_{\check{c}} = 2$, da je broj grana u kolu $n_g = 3$. Dakle, po I KZ ima jedna jednačina, a po II KZ imaju dve jednačine. Označimo na proizvoljan način struje i konture u kolu, kao na slici. Sistem jednačina je

$$\text{čvor 1: } -I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$K_1: E_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$

$$K_2: R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_2 = 0.$$



Zamenom vrednosti dobija se

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$-2I_1 - 3I_3 = -12$$

$$3I_3 + 5I_2 = 6.$$

Rešavanjem sistema jednačina se dobija $I_1 = \frac{78}{31} \approx 2,52$ A, $I_2 = -\frac{6}{31} \approx -0,19$ A i $I_3 = \frac{72}{31} \approx 2,32$ A.

Prema odabranim referentim smerovima struje, snage idealnih naponskih generatora su

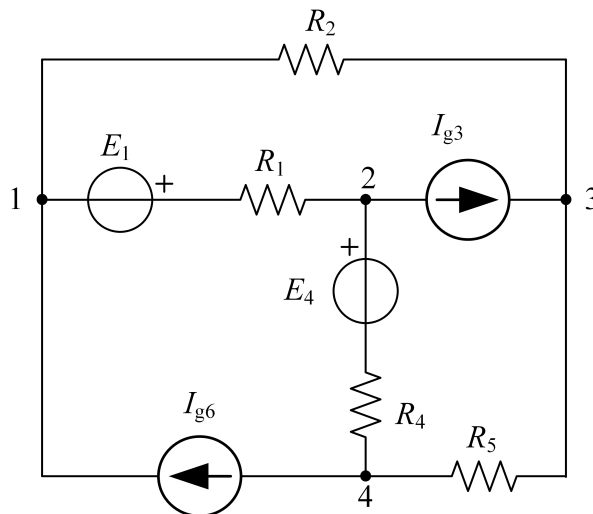
$$P_{E1} = E_1 I_1 = 30,24 \text{ W}$$

$$P_{E2} = E_2 I_2 = -1,14 \text{ W}.$$



Primetiti da se idealni naponski generator E_1 ponaša kao generator, a da se idealni naponski generator E_2 ponaša kao prijemnik.

3. Za kolo sa stalne struje sa slike je $E_1 = 60$ V, $E_4 = -20$ V, $I_{g3} = 10$ mA, $I_{g6} = 30$ mA, $R_1 = 60 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_4 = 1,5$ k Ω i $R_5 = 1$ k Ω . Napisati sistem jednačina po Kirhofovima zakonima i izračunati snagu otpornika R_4 .



REŠENJE: U kolu sa slike postoje 4 čvora i 6 grana. Broj jednačina po I KZ je 3, a po II KZ je 3. Za orijentacije sa slike pišemo jednačine

$$\text{čvor 1: } I_1 - I_2 - I_{g6} = 0$$

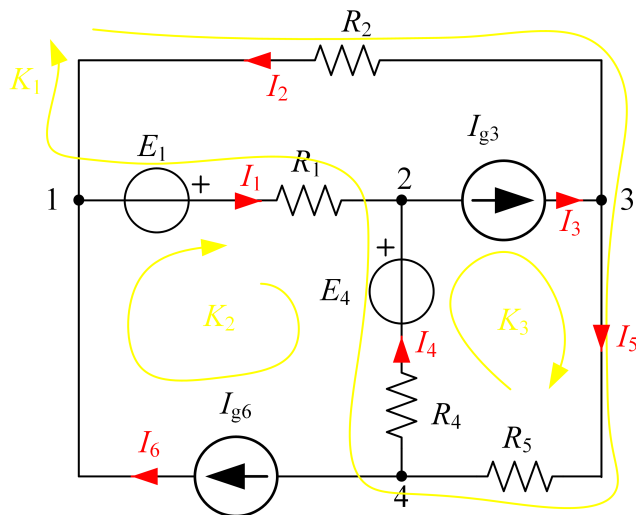
$$\text{čvor 2: } -I_1 - I_4 + I_{g3} = 0$$

$$\text{čvor 3: } I_2 - I_{g3} + I_5 = 0.$$

$$K_1 : -R_2 I_2 + E_1 - R_1 I_1 - E_4 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = 0$$

$$K_2 : I_6 = I_{g6}$$

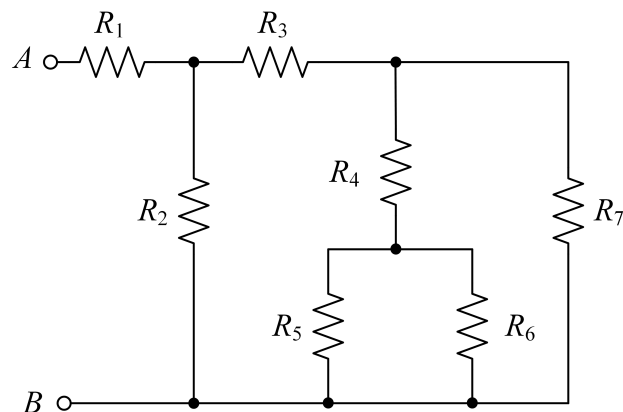
$$K_3 : I_3 = I_{g3}.$$



Zamenom brojnih vrednosti i rešavanjem sistema jednačina dobija se $I_1 = 50 \text{ mA}$, $I_2 = 20 \text{ mA}$, $I_3 = I_{g3} = 10 \text{ mA}$, $I_4 = -40 \text{ mA}$, $I_5 = -10 \text{ mA}$ i $I_6 = I_{g6} = 30 \text{ mA}$. Snaga otpornika R_4 je

$$P_{R4} = R_4 I_4^2 = 1500 \cdot (-40)^2 \cdot 10^{-6} = 2,4 \text{ W}.$$

4. Za otporničku mrežu prikazanu na slici, izračunati ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B ukoliko je $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 90 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = 22 \Omega$, $R_5 = R_6 = 4 \Omega$ i $R_7 = 8 \Omega$.



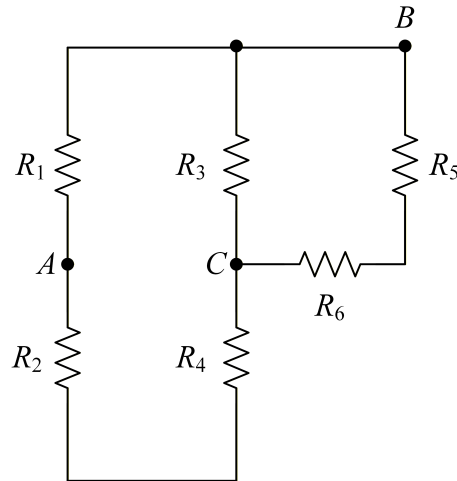
REŠENJE: Ekvivalentna otpornost između tačaka A i B je kombinacija rednih i paralelnih veza i data je izrazom

$$\begin{aligned} R_{\text{ekv}} &= [(R_5 \parallel R_6 + R_4) \parallel R_7 + R_3] \parallel R_2 + R_1 \\ &= [(4 \parallel 4 + 22) \parallel 8 + 4] \parallel 90 + 1 \\ &= \left[\left(\frac{4 \cdot 4}{4 + 4} + 22 \right) \parallel 8 + 4 \right] \parallel 90 + 1 \\ &= [(2 + 22) \parallel 8 + 4] \parallel 90 + 1 \\ &= \left[\frac{24 \cdot 8}{24 + 8} + 4 \right] \parallel 90 + 1 \\ &= (6 + 4) \parallel 90 + 1 = \frac{10 \cdot 90}{10 + 90} + 1 \\ &= 9 + 1 = 10 \Omega. \end{aligned}$$



Prilikom formiranja izraza za ekvivalentnu otpornost operator \parallel ima prednost nad operatorom $+$.

5. Za otporničku mrežu sa slike poznato je $R_1 = 15 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $R_4 = 15 \Omega$, $R_5 = 10 \Omega$ i $R_6 = 5 \Omega$. Izračunati ekvivalentnu otpornost između tačaka **a)** A i B , **b)** B i C i **c)** A i C .



REŠENJE: a) Ekvivalentna otpornost je

$$\begin{aligned} R_{AB} &= ((R_5 + R_6) \parallel R_3 + R_4 + R_2) \parallel R_1 \\ &= (15 \parallel 30 + 15 + 5) \parallel 15 \\ &= 30 \parallel 15 = \frac{30 \cdot 15}{45} = 10 \Omega. \end{aligned}$$

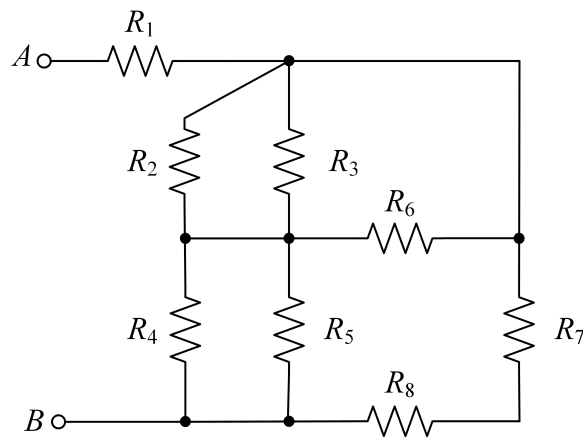
b)

$$\begin{aligned} R_{BC} &= (R_5 + R_6) \parallel R_3 \parallel (R_1 + R_2 + R_4) \\ &= 15 \parallel 30 \parallel 35 = 10 \parallel 35 \\ &= \frac{10 \cdot 35}{45} = \frac{10 \cdot 7}{9} = \frac{70}{9} \Omega. \end{aligned}$$

c)

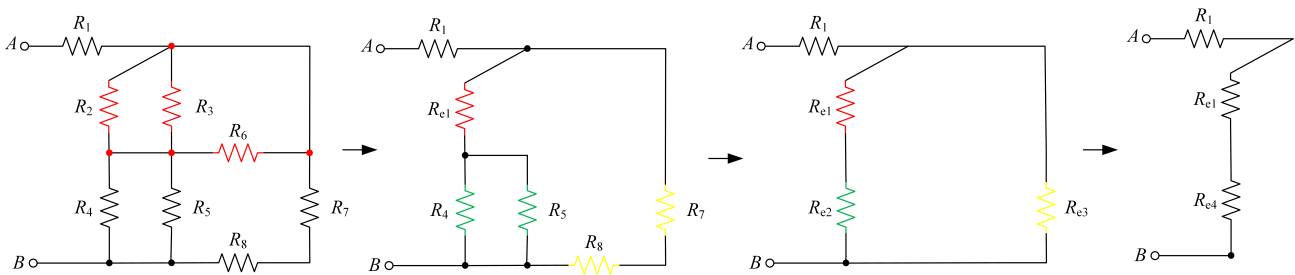
$$\begin{aligned} R_{AC} &= ((R_5 + R_6) \parallel R_3 + R_1) \parallel (R_2 + R_4) \\ &= (15 \parallel 30 + 15) \parallel 20 \\ &= 25 \parallel 20 = \frac{25 \cdot 20}{45} = \frac{100}{9} \Omega. \end{aligned}$$

6. Za otporničku mrežu sa slike poznato je: $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 12 \Omega$, $R_4 = R_5 = 4 \Omega$, $R_6 = 4 \Omega$, $R_7 = R_8 = 2 \Omega$. Izračunati ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B , R_{AB} .

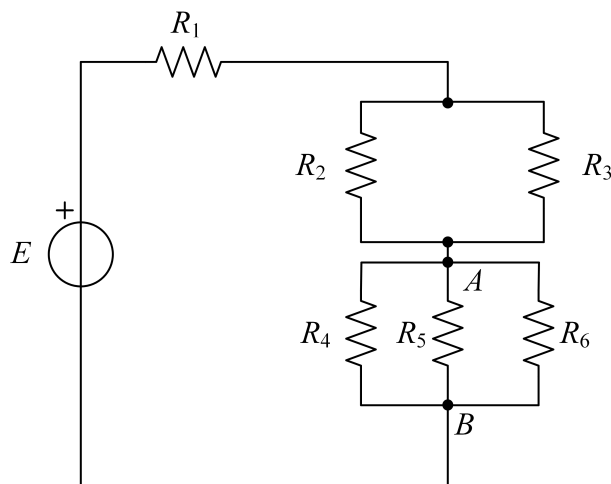


REŠENJE: Ekvivalentna optornost može se dobiti postepenim transfiguracijama radnih i paralelnih veza. Na taj način dobijamo

$$\begin{aligned}
 R_{AB} &= \left(\underbrace{R_2 \parallel R_3 \parallel R_6}_{=R_{e1}} + \underbrace{R_4 \parallel R_5}_{=R_{e2}} \right) \parallel \left(\underbrace{R_7 + R_8}_{=R_{e3}} \right) + R_1 \\
 &= (6 \parallel 12 \parallel 4 + 4 \parallel 4) \parallel 4 + 3 \\
 &= (4 \parallel 4 + 2) \parallel 4 + 3 \\
 &= (2 + 2) \parallel 4 + 3 \\
 &= 2 + 3 = 5 \Omega.
 \end{aligned}$$



7. U prikazanom kolu stalne struje poznato je $E = 66 \text{ V}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = R_5 = R_6 = 15 \Omega$. Izračunati snagu idealnog naponskog generatora i snagu na otporniku R_4 .



REŠENJE: Primitimo da su otpornici R_2 i R_3 vezani paralelno pa je

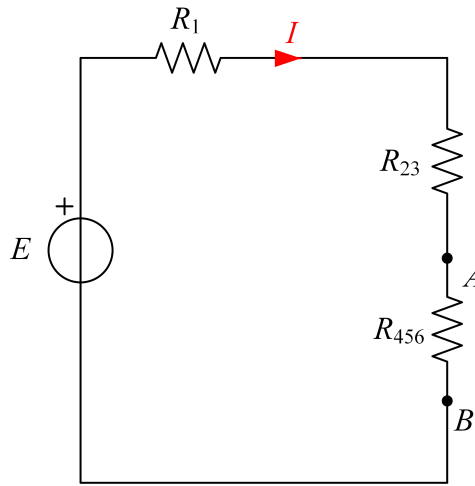
$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{40 \cdot 10}{50} = 8 \Omega.$$

Takođe su i otpornici R_4 , R_5 i R_6 vezani paralelno pa je

$$\frac{1}{R_{456}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = \frac{3}{15} \implies R_{456} = 5 \Omega.$$

Na dobijeno prosto kolo primenjujemo Omov zakon i struja je

$$I = \frac{E}{R_1 + R_{23} + R_{456}} = \frac{66}{20 + 8 + 5} = 2 \text{ A.}$$



Snaga idealnog naponskog generatora je

$$P_E = EI = 66 \cdot 2 = 132 \text{ W.}$$

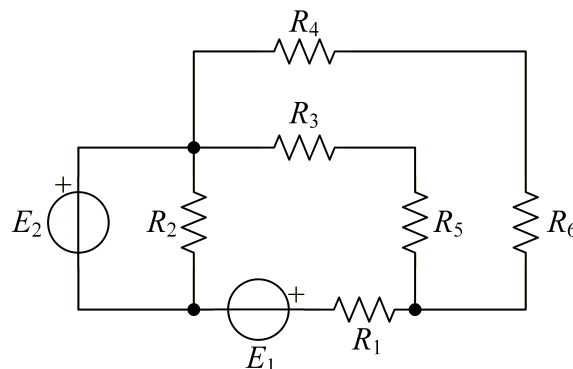
Kako je napon na otporniku R_{456} jednak naponu na otpornicima R_4 , R_5 i R_6 dobijamo

$$U_{AB} = R_{456}I = 5 \cdot 2 = 10 \text{ V}$$

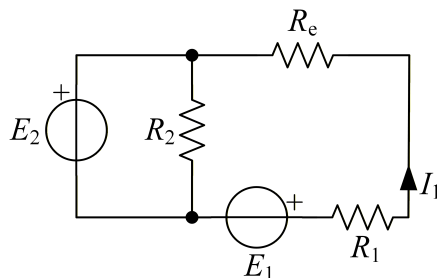
pa je snaga

$$P_{R4} = \frac{U_{AB}^2}{R_4} = \frac{100}{15} = 6,67 \text{ W.}$$

8. U kolu sa slike sve pobude su jednosmerne. Poznato je $E_1 = 20 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 25 \Omega$, $R_3 = 12 \Omega$, $R_4 = 5 \Omega$, $R_5 = 8 \Omega$ i $R_6 = 15 \Omega$. Izračunati ems E_2 tako da snaga idealnog naponskog generatora E_1 bude $P_{E_1} = 20 \text{ W}$.

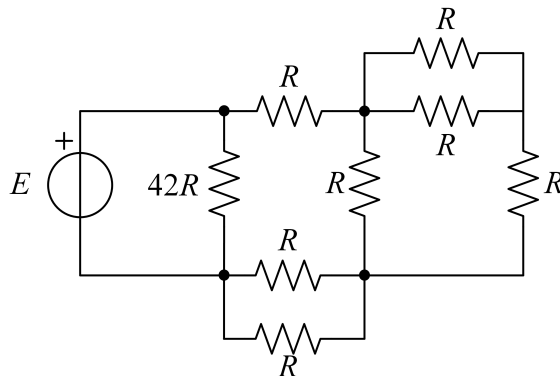


REŠENJE: Primititi da je redna veza otpornika R_4 i R_6 u paraleli sa rednom vezom otpornika R_3 i R_5 . Tada je $R_e = (R_4 + R_6) \parallel (R_3 + R_5) = 20 \parallel 20 = 10 \Omega$. Iz snage na ems E_1 može se izračunati struja $I_1 = \frac{P_{E_1}}{E_1} = 1 \text{ A}$. Dobijamo kolo kao na slici. Primenom II Kirhofovog zakona, ima se



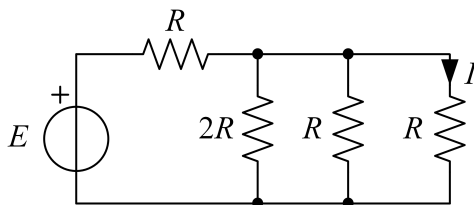
$$E_2 + (R_e + R_1) I_1 - E_1 = 0 \implies E_2 = -(R_e + R_1) I_1 + E_1 = -30 \cdot 1 + 20 = -10 \text{ V}.$$

9. (Zadatak za samostalni rad) Za kolo prikazano na slici poznato je $R = 0,5 \text{ k}\Omega$ i $E = 63 \text{ V}$. Izračunati ekvivalentnu otpornost koju vidi idealni naponski generator i struju kroz otpornik $42R$.



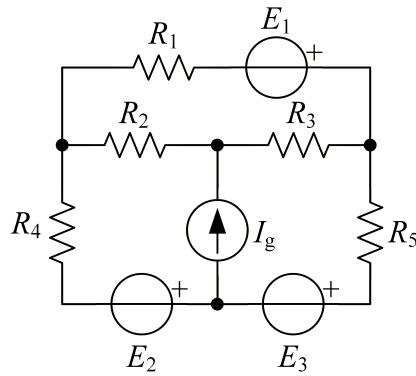
REZULTAT: $R_{ekv} = 2R = 1 \text{ k}\Omega$, $I_{42R} = 3 \text{ mA}$.

10. (Zadatak za samostalni rad) U kolu prikazanom na slici poznato je $R = 5 \Omega$. Ukoliko je struja $I = 1 \text{ A}$ izračunati vrednost ems idealnog naponskog generatora.

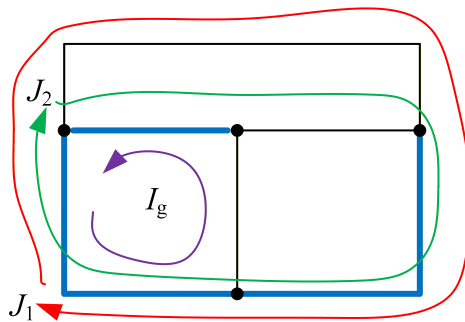


REZULTAT: $E = 17,5 \text{ V}$.

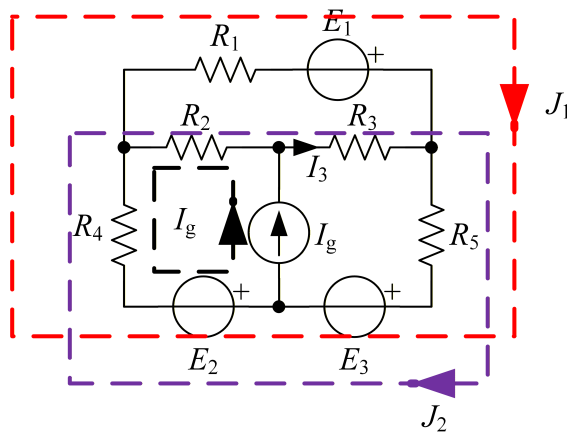
11. Za kolo stalne struje prikazanom na slici poznato je $E_1 = 4 \text{ V}$, $E_2 = 2 \text{ V}$, $E_3 = 2 \text{ V}$, $I_g = 4 \text{ A}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$. **a)** Nacrtati graf kola i jasno naznačiti stablo. **b)** Označiti osnovne konture za odabrano stablo. **c)** Napisati sistem jednačina po metodi konturnih struja i rešiti ga. **d)** Na osnovu toga, izračunati snagu otpornika R_3 .



REŠENJE: Graf je matematička struktura definisana kao uređeni par $G = (V, E)$, gde je V skup čvorova (vertices) i grana (edges) koji povezuje čvorove. Električno kolo može se predstaviti grafom gde čvor (node) predstavlja električni spoj više elemenata (tačka istog potencijala) i grana (branch) tj. element kola između dva čvorova. Graf kola je skup svih čvorova i grana koji opisuju topologiju električne mreže.



Stablo grafa je podgraf koji sadrži sve čvorove originalnog grafa, ali ne sadrži nijednu konturu (zatvorenu petlju). U stablu grafa nikada ne sme da se nađe grana sa idealnim strujnim generatorom. Spojnica je svaka grana grafa koja ne pripada stablu. Osnovna kontura je zatvorena putanja koja nastaje kada se jedna (i samo jedna) spojnica doda stablu grafa. Svaka spojnica definiše jednu osnovnu konturu, pa broj spojnica predstavlja broj osnovnih kontura tj. broj jednačina koje se pišu po metodi konturnih struja. Za konturu koja prolazi kroz idealni strujni generator već znamo struju pa se jednačina ne piše.



$$J_1 : (R_1 + R_5 + R_4) J_1 + (R_4 + R_5) J_2 - R_4 I_g = -E_3 - E_2 + E_1$$

$$J_2 : (R_4 + R_5) J_1 + (R_2 + R_3 + R_5 + R_4) J_2 - (R_2 + R_4) I_g = -E_3 - E_2$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se sistem jednačina

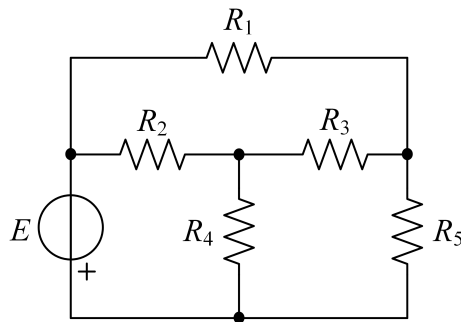
$$\begin{aligned} 5J_1 + 3J_2 &= 8 \\ 3J_1 + 9J_2 &= 12. \end{aligned}$$

Postavljeni sistem jednačina se može rešiti Gausovim metodom eliminacije ili pomoću determinanti, kada se primenjuju Kramerove formule:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 9 = 36 \\ D_{J_1} &= \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = 72 - 36 = 36 \\ D_{J_2} &= \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 60 - 24 = 36, \end{aligned}$$

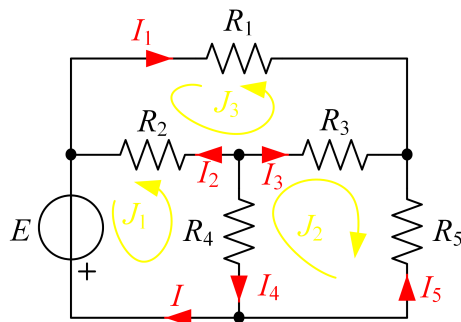
pa je $J_1 = \frac{D_{J_1}}{D} = 1$ A i $J_2 = \frac{D_{J_2}}{D} = 1$ A. Struja kroz otpornik R_3 je $I_3 = J_2 = 1$ A. Snaga otpornika je $P_{R_3} = R_3 I_3^2 = 4 \cdot 1^2 = 4$ W.

12. Za prikazano kolo stalne struje poznato je $E = 21$ V, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$ i $R_5 = 2 \Omega$. Izračunati **a)** sve struje u kolu, **b)** ukupnu snagu Džulovih gubitaka u kolu.



REŠENJE: Primenom metode konturnih struja, za konture prikazane na slici dobija se

$$\begin{aligned} J_1 : & (R_2 + R_4) J_1 + R_4 J_2 - R_2 J_3 = E \\ J_2 : & R_4 J_1 + (R_3 + R_4 + R_5) J_2 + R_3 J_3 = 0 \\ J_3 : & -R_2 J_1 + R_3 J_2 + (R_1 + R_2 + R_3) J_3 = 0. \end{aligned}$$



Zamenom brojnih vrednosti dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned} 3J_1 + J_2 - 2J_3 &= 21 \\ J_1 + 4J_2 + J_3 &= 0 \\ -2J_1 + J_2 + 4J_3 &= 0 \end{aligned}$$

čije je rešenje $J_1 = 15 \text{ A}$, $J_2 = -6 \text{ A}$ i $J_3 = 9 \text{ A}$.

a) Struje u kolu su sada, prema usvojenim referentnim smerovima

$$I_1 = -J_3 = -9 \text{ A}, \quad I_2 = J_1 - J_3 = 6 \text{ A}$$

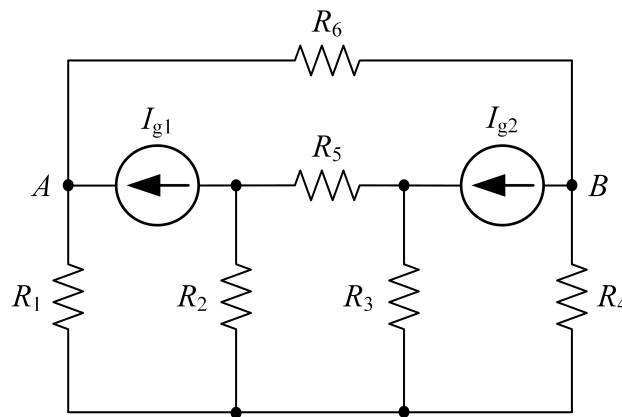
$$I_3 = J_2 + J_3 = 3 \text{ A}, \quad I_4 = -J_1 - J_2 = -9 \text{ A}$$

$$I_5 = -J_2 = 6 \text{ A}, \quad I = -J_1 = -15 \text{ A}.$$

b) Ukupna snaga Džulovih gubitaka se može dobiti kao zbir snage na svim otpornicima, međutim, to bi iziskivalo dosta vremena. Primitimo da u kolu postoji samo jedan generator pa je, prema zakonu održanja snage, ukupna snaga Džulovih gubitaka

$$P_{\text{Juk}} = -EI = -21 \cdot (-15) = 315 \text{ W}.$$

13. Za kolo sa slike poznato je $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_5 = R_6 = 2 \text{ k}\Omega$, $I_{g1} = 80 \text{ mA}$ i $I_{g2} = 40 \text{ mA}$. Izračunati snagu na otporniku R_4 i napon U_{AB} .



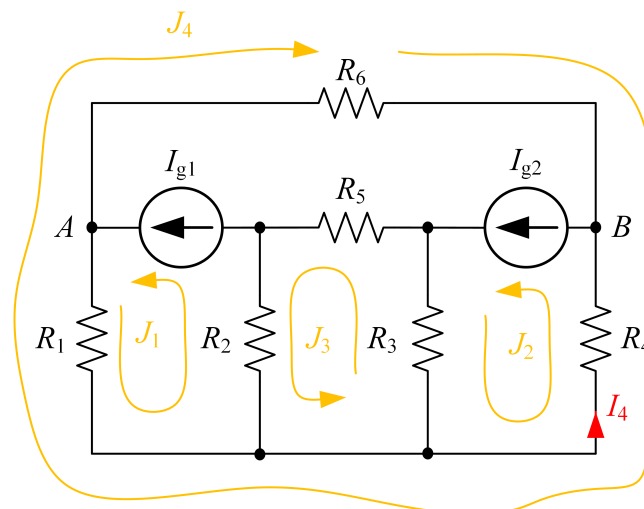
REŠENJE: U ovom kolu postoje idealni strujni generatori, pa se konture moraju odabrati na takav način da je svaki strujni generator obuhvaćen samo jednom konturom. Za konture odabrane kao na slici, pišemo jednačine:

$$J_1 = I_{g1}$$

$$J_2 = I_{g2}$$

$$-R_2 J_1 - R_3 J_2 + (R_2 + R_3 + R_5) J_3 = 0$$

$$-R_1 J_1 - R_4 J_2 + (R_1 + R_4 + R_6) J_4 = 0.$$



Zamenom brojnih vrednosti dobija se

$$J_1 = 80 \text{ mA}, \quad J_2 = 40 \text{ mA}$$

$$-4 \cdot 80 - 4 \cdot 40 + 10 \cdot J_3 = 0 \implies J_3 = 48 \text{ mA}$$

$$-4 \cdot 80 - 4 \cdot 40 + 10J_4 = 0 \implies J_4 = 48 \text{ mA}.$$

Prema odabranom referentnom smeru za struju I_4 se dobija

$$I_4 = J_2 - J_4 = 40 - 48 = -8 \text{ mA}.$$

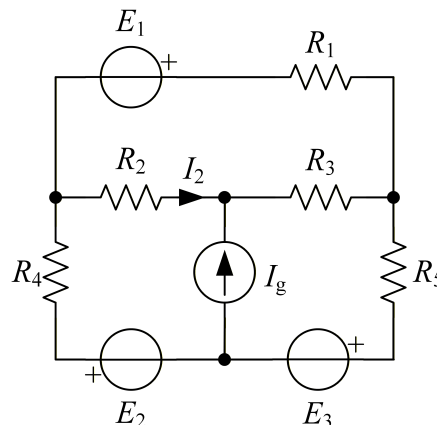
Tražena snaga je

$$P_{R4} = R_4 I_4^2 = 4 \cdot 64 = 256 \text{ mW}.$$

Napon U_{AB} je

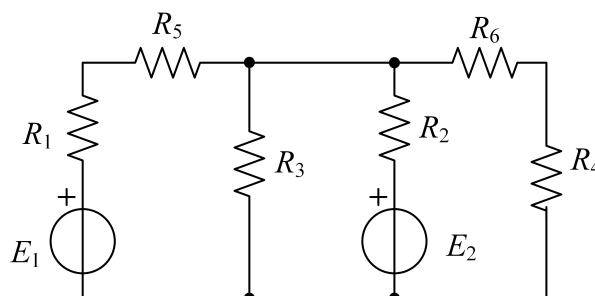
$$\begin{aligned} U_{AB} &= R_1 (J_1 - J_4) + R_4 (J_2 - J_4) \\ &= 4 \cdot (80 - 48) + 4(40 - 48) \\ &= 4 \cdot 32 + 4 \cdot (-8) \\ &= 96 \text{ V}. \end{aligned}$$

14. U kolu stalne struje, poznato je $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$, $E_3 = -20 \text{ V}$, $I_g = 40 \text{ mA}$, $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = 50 \Omega$, $R_4 = 100 \Omega$, $R_5 = 100 \Omega$. Izračunati struju I_2 .



REZULTAT: $I_2 = 55 \text{ mA}$.

15. U prikazanom kolu jednosmerne struje, ems izvora su $E_1 = 3 \text{ V}$, $E_2 = 9 \text{ V}$, otpornosti otpornika su $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_3 = 600 \Omega$, $R_4 = 400 \Omega$, $R_5 = 150 \Omega$ i $R_6 = 200 \Omega$. Izračunati snagu Džulovih gubitaka na otporniku R_2 .



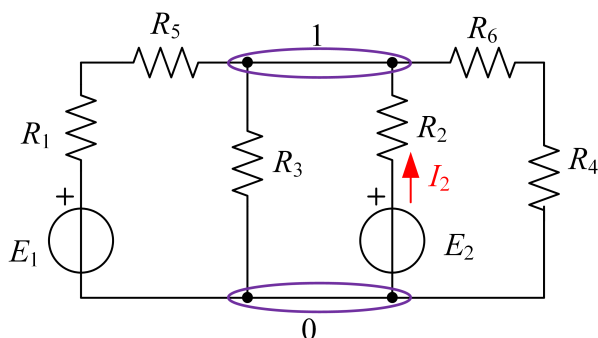
REŠENJE: Zadatak ćemo rešiti primenom metode potencijala čvorova. U kolu ima dva čvora, pa imamo jednu jednačinu po ovom metodu.

$$V_1 \left(\frac{1}{R_1 + R_5} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6 + R_4} \right) = \frac{E_1}{R_1 + R_5} + \frac{E_2}{R_2}$$

$$V_1 \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{600} + \frac{1}{100} + \frac{1}{600} \right) = \frac{3}{200} + \frac{9}{100}$$

$$V_1 \cdot \frac{11}{600} = \frac{21}{200} \Rightarrow V_1 = \frac{63}{11} \text{ V} = 5,7273 \text{ V.}$$

Struja koja je uspostavljena u grani sa R_2 i E_2 je

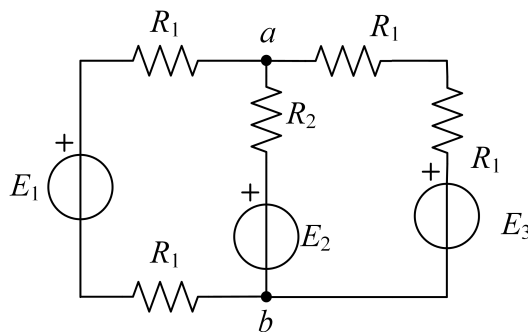


$$I_2 = \frac{V_0 - V_1 + E_2}{R_2} = \frac{9 - 5,7273}{100} = 0,033 \text{ A} = 33 \text{ mA}$$

pa je

$$P_{R_2} = R_2 I_2^2 = 0,11 \text{ W.}$$

16. Za kolo stalne struje sa slike poznate su otpornosti otpornika $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, ems generatora $E_1 = 2 \text{ V}$, $E_2 = E_3 = 4 \text{ V}$. Izračunati napon U_{ab} .



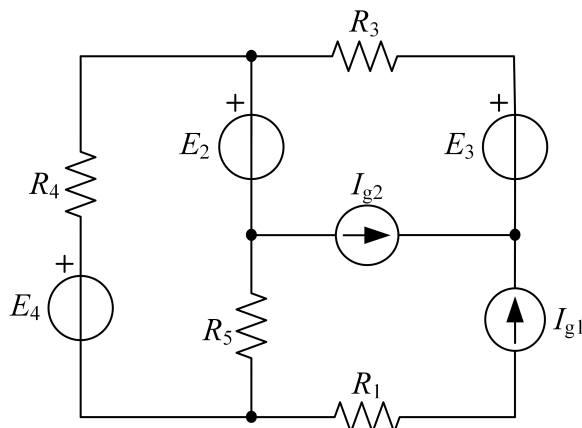
REŠENJE: U kolu postoje samo dva čvora, a i b pa je zgodno primeniti metod potencijala čvorova. Usvajanjem da je čvor b referentni možemo pisati

$$V_a \left(\frac{1}{R_1 + R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_1} \right) = \frac{E_1}{R_1 + R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_1 + R_1}$$

$$V_a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} \Leftrightarrow V_a \cdot \frac{3}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow V_a = \frac{10}{3} \text{ V.}$$

Ovo je ujedno i napon U_{ab} .

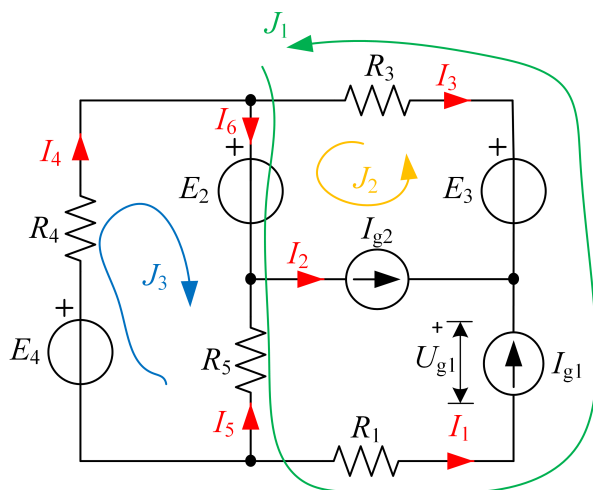
17. U kolu na slici poznato je $I_{g1} = 12$ A, $I_{g2} = 6$ A, $E_2 = 30$ V, $E_3 = 20$ V, $E_4 = 40$ V, $R_1 = 10$ Ω , $R_3 = 40$ Ω , $R_4 = 20$ Ω , $R_5 = 30$ Ω . **a)** Izračunati sve struje u kolu. **b)** Izračunati snagu strujnog generatora I_{g1} .



REŠENJE: a) Prema metodi konturnih struja pišemo jednačine

$$J_1 = I_{g1} = 12 \text{ A}, \quad J_2 = I_{g2} = 6 \text{ A}$$

$$R_5 J_1 + (R_4 + R_5) J_3 = E_4 - E_2 \iff 30 \cdot 12 + 50 \cdot J_3 = 10 \implies J_3 = -7 \text{ A}.$$



Prema označenim referentnim smerovima struje u kolu su:

$$I_1 = J_1 = 12 \text{ A}, \quad I_2 = I_{g2} = 6 \text{ A}, \quad I_3 = -J_1 - J_2 = -18 \text{ A}$$

$$I_4 = J_3 = -7 \text{ A}, \quad I_5 = -J_1 - J_3 = -5 \text{ A}, \quad I_6 = J_2 + J_1 + J_3 = 11 \text{ A}.$$

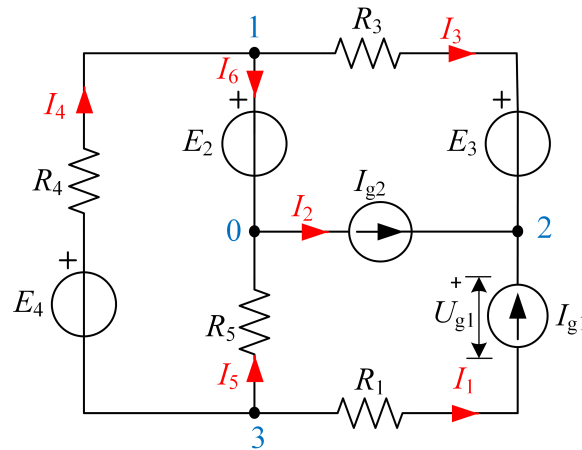
b) Napon idealnog strujnog generatora I_{g1} je

$$\begin{aligned} U_{g1} &= -E_3 - R_3 I_3 + E_2 - R_5 I_5 + R_1 I_1 \\ &= -20 - 40 \cdot (-18) + 30 - 30 \cdot (-5) + 10 \cdot 12 \\ &= 1000 \text{ V}. \end{aligned}$$

Snaga je

$$P_{I_{g1}} = U_{g1} I_{g1} = 1000 \cdot 12 = 12000 \text{ W} = 12 \text{ kW}.$$

Zadatak ćemo rešiti i na drugi način, primenom metode potencijala čvorova. Primititi da je idealni naponski generator sam u grani. Stoga, jedan od tih čvorova mora biti referentni. Proizvoljno biramo koji će biti od ta dva. Potencijal čvora 1 u ovom slučaju je odmah određen i nije potrebno pisati jednačinu po metodi potencijala čvorova. Dakle,



$$V_1 = E_2 = 30 \text{ V.}$$

$$\text{čvor 2: } -\frac{1}{R_3}V_1 + \frac{1}{R_3}V_2 = -\frac{E_3}{R_3} + I_{g2} + I_{g1}$$

$$\text{čvor 3: } -\frac{1}{R_4}V_1 + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)V_3 = -I_{g1} - \frac{E_4}{R_4}.$$



Primetiti da otpornik R_1 nigde ne učestvuje u jednačinama po metodu potencijala čvorova jer je vezan na red sa idealnim strujnim generatorom.

Zamenom brojnih vrednosti se dobija:

$$-\frac{30}{40} + \frac{V_2}{40} = -\frac{20}{40} + 6 + 12 \implies V_2 = 730 \text{ V}$$

$$-\frac{30}{20} + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right)V_3 = -12 - \frac{40}{20} \implies V_3 = -150 \text{ V.}$$

Struje u kolu su

$$I_1 = I_{g1} = 12 \text{ A,} \quad I_2 = I_{g2} = 6 \text{ A,}$$

$$I_3 = \frac{V_1 - V_2 - E_3}{R_3} = \frac{30 - 730 - 20}{40} = -18 \text{ A.}$$

$$I_4 = \frac{V_3 - V_1 + E_4}{R_4} = \frac{-150 - 30 + 40}{20} = -7 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{V_3 - V_0}{R_5} = \frac{-150}{30} = -5 \text{ A}$$

$$I_6 = I_4 - I_3 = -7 + 18 = 11 \text{ A.}$$

Napon na strujnom generatoru je

$$U_{23} = U_{g1} - R_1 I_1 \iff V_2 - V_3 = U_{g1} - R_1 I_1$$

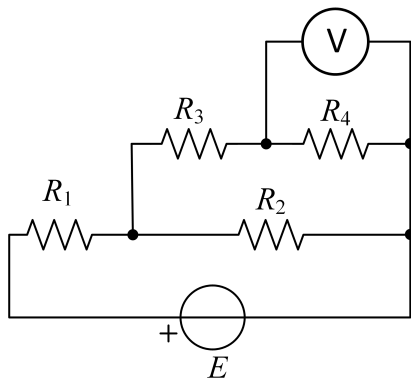
pa je

$$U_{g1} = 730 + 150 + 10 \cdot 12 = 1000 \text{ V,}$$

a odavde je snaga

$$P_{I_{g1}} = U_{g1} I_{g1} = 12 \text{ kW.}$$

18. U kolu stalne struje sa slike poznato je: $E = 18 \text{ V}$, $R_1 = 400 \Omega$, $R_3 = 100 \Omega$ i $R_4 = 500 \Omega$. Ukoliko je pokazivanje idealnog voltmetra $U_V = 5 \text{ V}$, izračunati vrednost otpornosti R_2 .

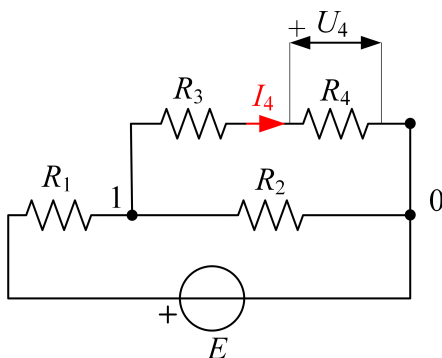


REŠENJE: Otpornost idealnog voltmetra je beskonačno velika, $R_v \rightarrow \infty$ pa ga možemo zameniti otvorenom vezom. Tada je struja kroz otpornik R_4

$$I_4 = \frac{U_V}{R_4} = \frac{5}{500} = 10 \text{ mA.}$$

Ovo je ujedno i struja kroz otpornik R_3 . Napon između tačaka 1 i 0 je

$$U_{10} = (R_3 + R_4) I_4 = 600 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 6 \text{ V.}$$

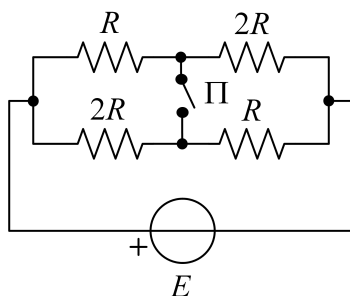


Primenom metode potencijala čvorova pišemo

$$U_{10} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \right) = \frac{E}{R_1}$$

$$6 \cdot \left(\frac{1}{400} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{600} \right) = \frac{18}{400} \implies R_2 = 300 \Omega.$$

19. Odrediti priraštaj snage idealnog naponskog generatora $E = 6 \text{ V}$ prouzrokovan zatvaranjem prekidača Π . Otpornost otpornika je $R = 2 \text{ k}\Omega$.



REŠENJE: Kako bismo odredili snagu idealnog naponskog generatora potrebno je odrediti struju kroz njegove priključke. Kada je prekidač otvoren, tada je ekvivalentan otpor koji idealni naponski generator vidi

$$R_O = (R + 2R) \parallel (2R + R) = 3R \parallel 3R = \frac{3R \cdot 3R}{3R + 3R} = \frac{3R}{2}.$$

Struja kroz idealni naponski generator je

$$I_O = \frac{E}{\frac{3R}{2}} = \frac{2E}{3R}.$$

Kada se prekidač zatvori, tada je ekvivalentan otpor koji idealni naponski generator vidi

$$R_Z = R \parallel 2R + 2R \parallel R = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} + \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2R}{3} + \frac{2R}{3} = \frac{4R}{3},$$

pa je struja kroz idealni naponski generator

$$I_Z = \frac{E}{\frac{4R}{3}} = \frac{3E}{4R}.$$

Priraštaj snage je

$$\begin{aligned} \Delta P_E &= P_E^{(z)} - P_E^{(o)} = EI_Z - EI_O = E^2 \left(\frac{2}{3R} - \frac{3}{4R} \right) \\ &= 36 \left(\frac{2}{6} - \frac{3}{8} \right) = -1,5 \text{ mW}. \end{aligned}$$