Ovaj dokument sadrži zadatke iz predmeta Elektrotehnika na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Zadaci su koncipirani tako da prate tematske celine sa predavanja i omogućavaju vežbanje ključnih pojmova i metoda. Zadaci su numerisani i raspoređeni prema oblastima koje se obrađuju na predavanjima. Preporučuje se da pokušate samostalno da rešite svaki zadatak, a zatim uporedite svoj postupak sa ponuđenim rešenjima. Posebnu pažnju obratite na analizu vektorskih veličina, jedinica i fizičkih pretpostavki. U nekim zadacima data su i potpitanja koja podstiču razumevanje i diskusiju. Kroz zadatke ćete uočiti sledeće oznake:

Za važne komentare i mesta gde studenti često greše.

Za dodatna pitanja vezano za zadatak.

Za one koji žele da rade više - ne dolazi na ispitu!.

Za ideju, komentar na izvođenje.

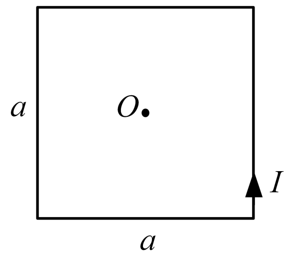
Za preporuku uz zadatak.

Konsultacije: Za dodatna pojašnjenja i pitanja u vezi sa predmetom možete me kontaktirati putem:

- Email: vbecejac@mas.bg.ac.rs

1 Elektromagnetizam

1. U kvadratnoj žičanoj konturi dužine stranice a postoji stalna struja jačine I. Kontura se nalazi u vakuumu. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u centru konture.

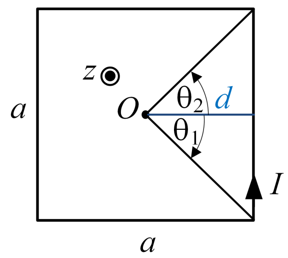


Rešenje: Magnetska indukcija pravolinijskog strujnog provodnika u vakuumu se može dobiti primenom formule

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1 \right),$$

pri čemu je d normalna razdaljina povučena iz tačke na strujni provodnik, a uglovi θ_1 i θ_2 se računaju u odnosu na tu normalu, pri čemu se smer rasta ugla poklapa sa smerom struje i $\theta_2 > \theta_1$.

Prema oznakama sa slike, za svaku stranicu kvadratne konture je $d = \frac{a}{2}$, $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$ i $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$.



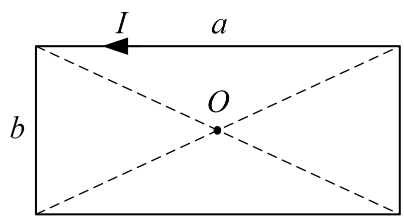
Referentni smerovi magnetske indukcije za sve četiri stranice se poklapaju. Algebarski intenzitet je

$$\begin{aligned} B = 4B_1 &= 4 \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi a} \cdot 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}, \end{aligned}$$

u odnosu na referentni smer sa slike gde smo proizvoljno usvojili z-osu. Konačno,

$$\mathbf{B} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}\mathbf{i}_\mathrm{z}.$$

2. U pravougaonoj žičanoj konturi, dužina stranica a i b, postoji stalna struja jačine I. Kontura se nalazi u vakuumu. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u centru konture.

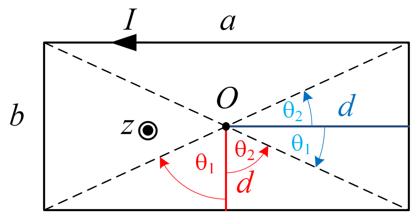


Rešenje: Prema referentnom smeru koji se poklapa sa z-osom, za stranicu dužine b, algebarski intenzitet vektora magnetske indukcije je

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \left(\frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \left(-\frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \right) \right)$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} 2 \cdot \frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Za stranicu dužine a je

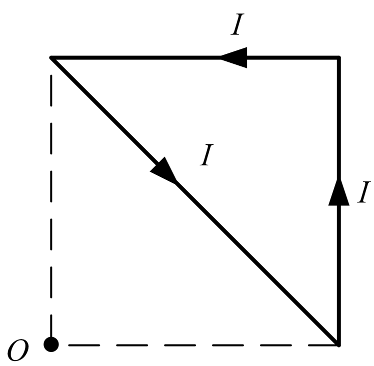
$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{b}{2}} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \left(\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \left(-\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \right) \right)$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{b}{2}} 2 \cdot \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



Konačno,

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{B}_1 + 2\mathbf{B}_2 = \frac{2\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2+b^2}} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \mathbf{i}_z$$
$$= \frac{2\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2+b^2}} \frac{b^2+a^2}{ab} \mathbf{i}_z = \frac{2\mu_0 I}{\pi ab} \sqrt{a^2+b^2} \mathbf{i}_z.$$

3. Žičana kontura ima oblik jednakokrako pravouglog trougla, dužine katete a. Kontura se nalazi u vazduhu. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u tački O.

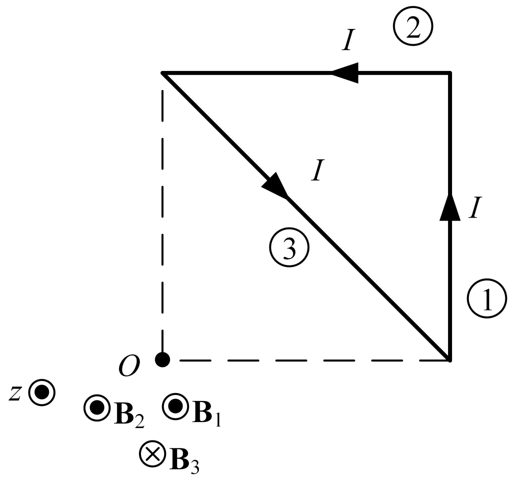


Rešenje: Vektor magnetske indukcije u tački O je

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3.$$

Za katetu, na slici označenu sa 1, je $d = a$, $\theta_1 = 0$ i $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$, za katetu označenu sa 2 je $d = a$, $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$ i $\theta_2 = 0$ i za hipotenuzu, označenu sa 3 je $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ i $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$. Dobija se

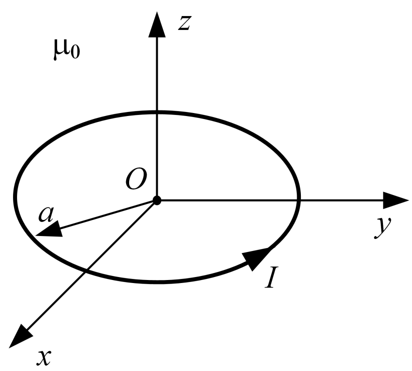
$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0\right)\mathbf{i}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_z$$
$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sin 0 - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathbf{i}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_z$$
$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{a\sqrt{2}}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)(-\mathbf{i}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{a\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}}\cdot\cancel{2}\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}(-\mathbf{i}_z)\,.$$



Konačno,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right)\mathbf{i}_z$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sqrt{2} - 2\right)\mathbf{i}_z.$$

4. Žičana kontura ima oblik kružnice poluprečnika a. Kontura se nalazi u vazduhu i u njoj je uspostavljena stalna struja jačine I. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u tački O.



Rešenje: Bio-Savarov zakon za koplanarni sistem je

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\theta \frac{I\,\mathrm{d}\theta}{r}. \tag{1}$$

U ovom kontekstu, koplanarni sistem znači da se svi strujni elementi i tačka gde se traži vektor magnetske indukcije nalaze u istoj ravni.

U relaciji (1) je sa r označeno odstojanje od posmatranog strujnog elementa ($I\,\mathrm{d}\mathbf{l}$) do tačke gde se magnetska indukcija traži, a ugao θ se računa od proizvoljno odabranog poluprečnika do potega r.

U konkretnom slučaju je algebarski intenzitet vektora magnetske indukcije

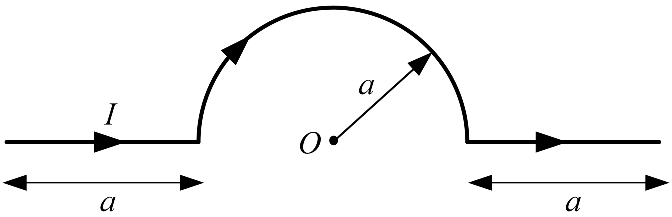
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot 2\pi = \frac{\mu_0 I}{2a},$$

prema referentom smeru koji se poklapa sa z-osom.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2a}\mathbf{i}_z.$$

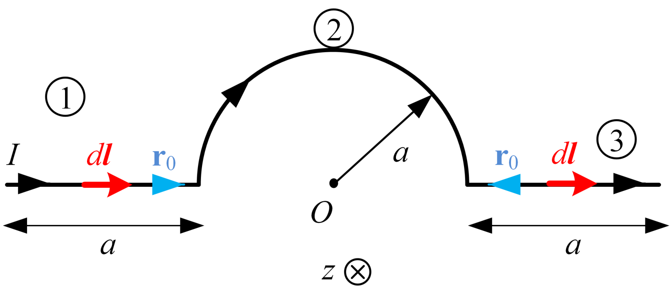
Relaciju (1) je zgodno koristiti kada se u zadatku javljaju strujne kružnice ili delovi strujnih kružnica (kružni lukovi). Naravno, moramo imati koplanarni sistem. Takođe, važno je prisetiti se da u matematici prava i tačka uvek određuju jednu ravan, dok sa kružnim lukom i tačkom to nije u opštem slučaju tačno.

5. Žičana kontura ima oblik kao na slici. Kontura se nalazi u vazduhu i u njoj je uspostavljena stalna struja jačine I. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u tački O.



Rešenje: U zadatku iako su delovi 1 i 3 pravolinijski segmenti, ne može se upotrebiti formula $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$ jer se ne može odrediti normalno rastojanje povučeno iz tačke na segment. Stoga će biti primenjen Bio-Savarov zakon za linijske struje

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2}.$$

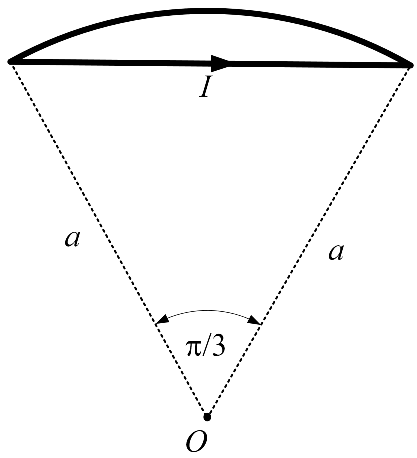


Primetimo da je za segment 1 $\sin(\measuredangle\,\mathrm{d}\mathbf{l}, \mathbf{r}_0) = \sin 0 = 0$, a za 2 je $\sin(\measuredangle\,\mathrm{d}\mathbf{l}, \mathbf{r}_0) = \sin\pi = 0$ pa je stoga i $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = 0$.

Preostaje samo polukružnica od koje je vektor magnetske indukcije

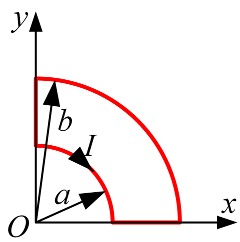
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \mathbf{i}_z = \frac{\mu_0 I}{4a}\mathbf{i}_z.$$

6. (Za samostalni rad) Žičana kontura ima oblik kao na slici. Kontura se nalazi u vazduhu i u njoj je uspostavljena stalna struja jačine I. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u tački O.



Rezultat: $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\pi}{3}\right)\mathbf{i}_\mathrm{z}$, gde je ort $\mathbf{i}_\mathrm{z}$ uperen u papir.

7. (Za samostalni rad) Žičana kontura ima oblik kao na slici. Kontura se nalazi u vazduhu i u njoj je uspostavljena stalna struja jačine I. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u tački O.

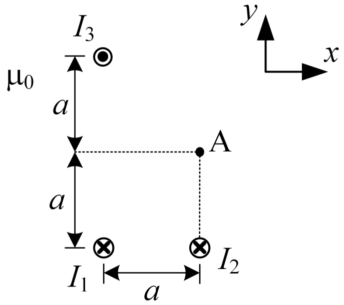


Rezultat: $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0 I}{8}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)\mathbf{i}_\mathrm{z}$.

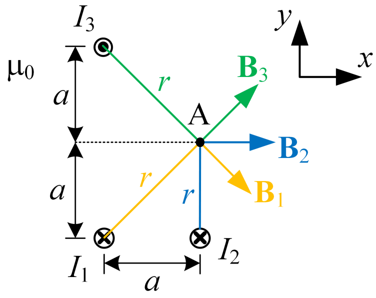
8. (Za samostalni rad) Žičana kontura ima oblik jednakostraničnog trougla dužine stranice a. Kontura se nalazi u ravni crteža, u vakuumu, i u noj je uspostavljena stalna struja jačine I. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u težištu konture.

Rezultat: $B = \dfrac{9\mu_0 I}{2\pi a}$, prema referentnom smeru iz papira.

9. Kroz tri veoma dugačka, tanka, paralelna pravolinijska provodnika, koji su u poprečnom preseku raspoređeni kao na slici, postoje struje $I_1 = I_3 = 1$ A i $I_2 = 2$ A. Izračunati vektor magnetske indukcije u tački A, ako je $a = 2$ cm.



Rešenje: Algebarski intenzitet vektora magnetske indukcije, prema referentnim smerovima prikazanim na slici od dugačkog provodnika je $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.



Primetimo da, kako važi $I_1 = I_3$, zbog simetrije imamo samo x-komponentu.

$$B_{1x} = B_{3x} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a},$$

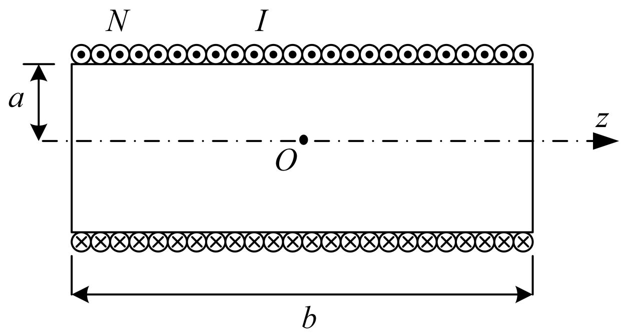
dok je

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\mathbf{i}_\mathrm{x}.$$

Konačno,

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= 2B_{1x}\mathbf{i}_\mathrm{x} + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\mathbf{i}_\mathrm{x} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\mathbf{i}_\mathrm{x} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi a}\left(I_1 + I_2\right)\mathbf{i}_\mathrm{x} = \frac{\cancel{4\pi}\cdot 10^{-7}}{\cancel{2\pi\cdot 2}\cdot 10^{-2}}3\mathbf{i}_\mathrm{x} \\ &= 3\cdot 10^{-5}\mathbf{i}_\mathrm{x} = 30\ \mu\mathrm{T}\,\mathbf{i}_\mathrm{x}.\end{aligned}$$

10. Izračunati magnetsku indukciju od dugačkog solenoida, kružnog poprečnog preseka, poluprečnika $a = 1$ cm i dužine $b = 50\pi$ cm, smatrati da je $b \gg a$. Broj zavojaka na solenoidu je $N = 500$ i u njima je uspostavljena stalna struja jačine $I = 1$ A.



Rešenje: Solenoid je nosač na koji je ravnomerno i gusto namotana izolovana žica u jednom sloju. Na ovaj način je dobijen spiralni namotaj. Na slici su zavojci nacrtani razmaknuto, zbog preglednosti, ali se u praksi postavljaju toliko blizu da im se izolacije dodiruju.

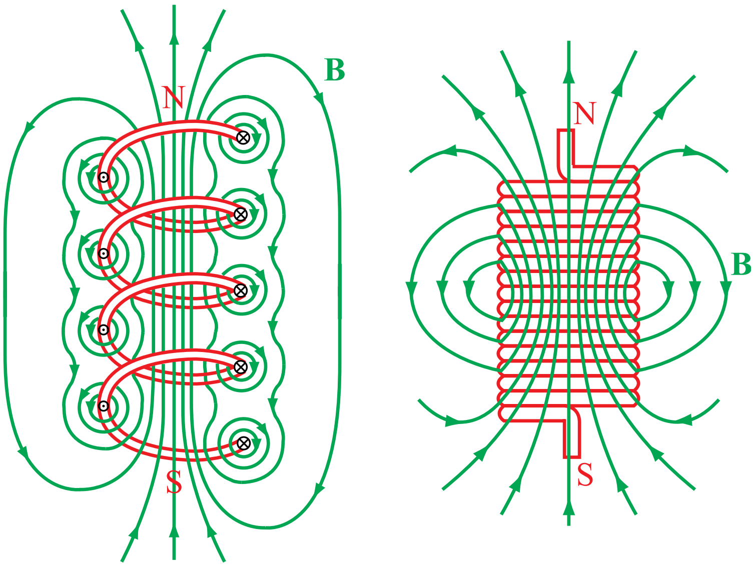
Magnetska indukcija dugačkog solenoida je data formulom

$$B = \frac{\mu_0 N I}{b} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 500\cdot 1}{50\pi\cdot 10^{-2}} = 40\cdot 10^{-5} = 400\ \mu\mathrm{T}.$$

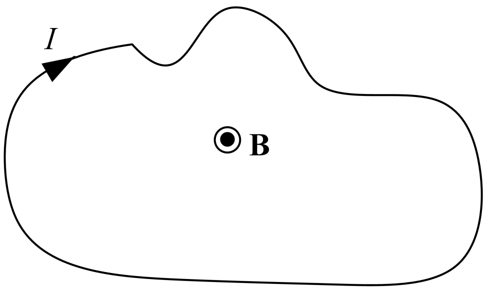
Jačina magnetskog polja dugačkog solenoida je homogena unutar njega, sve dok se ne približimo otvorima.

Na slici su prikazane linije polja vektora magnetske indukcije ređe namotane žice oko držača, linije polja, po pravilu izlaze iz svernog pola (N) i ulaze u južni pol (S), praveći u ovom slučaju veliku petlju izvan solenoida. Vidljivo je da dosta linija „beži" van solenoida. Unutar solenoida polje je i dalje prisutno, ali je manje homogeno i slabije koncentrisano. Dakle, imamo veći rasipni fluks.

Kod gusto zbijenih zavojaka, linije su veoma guste unutar solenoida i gotovo sve su paralelne. Ukoliko je solenoid, teorijski, beskonačno dugačak, magnetske indukcije van njega nema.



11. Kontura prikazana na slici se nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije $\mathbf{B}$, kao na slici. U konutri je upostavljena stalna struja jačine I. Odrediti magnetsku silu na konturu.



Rešenje: Magnetska sila koja deluje na jedan strujni element konture je data izrazom

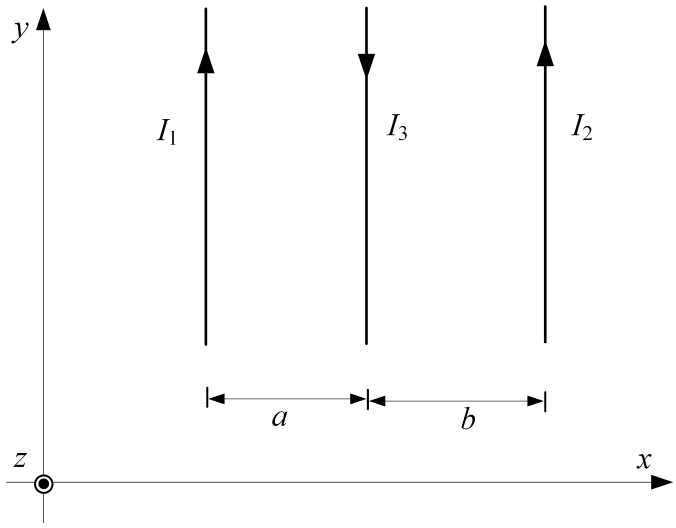
$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I\,\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Rezultantnu silu dobijamo vektorskim sabiranjem sila na sve strujne elemente konture, tj.

$$\mathbf{F} = I \cdot \left(\cancelto{0}{\oint_C \mathrm{d}\mathbf{l}} \right) \times \mathbf{B} = 0.$$

Rezultantna magnetska sila na strujnu **konturu** (zatvoren put) u **homogenom** magnetskom polju je uvek nula. Međutim, iako je ukupna sila nula, na različite delove konture mogu delovati lokalne magnetske sile, koje mogu izazvati moment sile.

12. Tri dugačka pravolinijska provodnika leže u ravni crteža, kao na slici, pri čemu je $a = 25$ mm i $b = 30$ mm. U provodnicima su uspostavljene stalne struje $I_1 = 10$ A, $I_2 = 15$ A i $I_3 = 20$ A. Izračunati vektor podužne magnetske sile na provodnik sa strujom I_3, $\mathbf{F}_3'$.



Rešenje: Potrebno je odrediti izraz za vektor magnetske indukcije koji provodnici sa strujama I_1 i I_2 stvaraju na mestu provodnika sa strujom I_3. Dobijamo

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}(-\mathbf{i}_z) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi b}\mathbf{i}_z = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(-\frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{b}\right)\mathbf{i}_z.$$

Sada je

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{F}_3 &= I_3\,\mathrm{d}\mathbf{l}_3 \times \mathbf{B} = I_3\,\mathrm{d}l \cdot (-\mathbf{i}_y) \times \frac{\mu_0}{2\pi}\left(-\frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{b}\right)\mathbf{i}_z \\ &= \frac{\mu_0 I_3}{2\pi}\,\mathrm{d}l \cdot \left(-\frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{b}\right)(-\mathbf{i}_x)\,, \end{aligned}$$

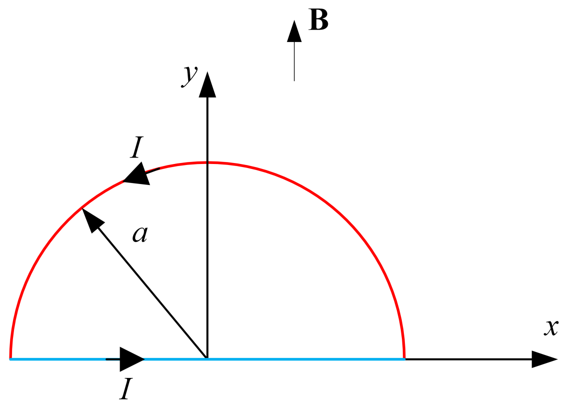
pa je

$$\mathbf{F}_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi} l \cdot \left(\frac{I_1}{a} - \frac{I_2}{b}\right)\mathbf{i}_x.$$

Podužna magnetska sila je

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3' &= \frac{\mu_0 I_3}{2\pi}\left(\frac{I_1}{a} - \frac{I_2}{b}\right)\mathbf{i}_x \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{2\pi}\left(\frac{10}{25 \cdot 10^{-3}} - \frac{15}{30 \cdot 10^{-3}}\right)\mathbf{i}_x \\ &= -400\mathbf{i}_x\ \mu\mathrm{N/m}. \end{aligned}$$

13. Na slici je prikazana kontura koja se sastoji iz jednog polukružnog dela, poluprečnika a i jednog pravolinijskog segmenta dužine $2a$. U konturi je uspostavljena struja jačine I i nalazi se u homogenom magnetskom polju, indukcije $\mathbf{B}$. Odrediti magnetsku silu na **polukružni** deo konture.



Rešenje: I način: Kako se kontura nalazi u homogenom magnetskom polju, rezultantna magnetska sila na nju je jednaka nuli. Dakle,

$$\mathbf{F}_{\text{rez}} = \mathbf{F}_{\text{prav}} + \mathbf{F}_{\text{lučni}} = 0 \qquad \Longrightarrow \mathbf{F}_{\text{lučni}} = -\mathbf{F}_{\text{prav}}.$$

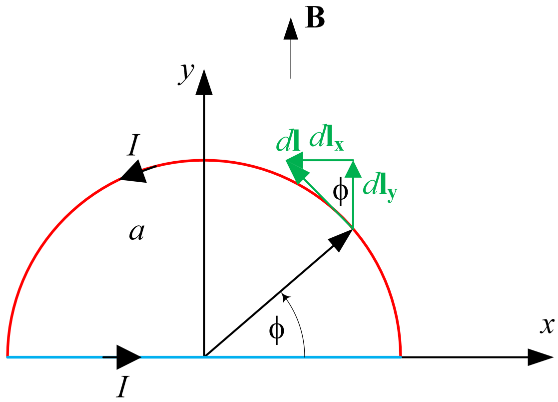
Sila na pravolinijski deo je

$$\mathbf{F}_{\text{prav}} = I \cdot \left(\int_M^N \mathrm{d}\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = I \left(\int_M^N \mathrm{d}l \cdot \mathbf{i}_{\text{x}} \right) \times B \cdot \mathbf{i}_{\text{y}} = I \cdot 2a \cdot \mathbf{i}_{\text{x}} \times B \cdot \mathbf{i}_{\text{y}} = 2IaB \cdot \mathbf{i}_{\text{z}},$$

pa je

$$F_{\text{lučni}} = -2IaB \cdot \mathbf{i}_{\text{z}}.$$

II način: Strujni element $\mathrm{d}\mathbf{l}$ se može razložiti na komponetne



$$\mathrm{d}\mathbf{l} = a \left(-\sin\phi \mathbf{i}_{\text{x}} + \cos\phi \mathbf{i}_{\text{y}} \right) \mathrm{d}\phi$$

pa je sila na jedan strujni element

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{F}_{\text{lučni}} &= Ia \left(-\sin\phi \mathbf{i}_{\text{x}} + \cos\phi \mathbf{i}_{\text{y}} \right) \mathrm{d}\phi \times B \cdot \mathbf{i}_{\text{y}} \\ &= -IBa \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \cdot \mathbf{i}_{\text{z}}, \end{aligned}$$

a ukupna sila se dobija integracijom

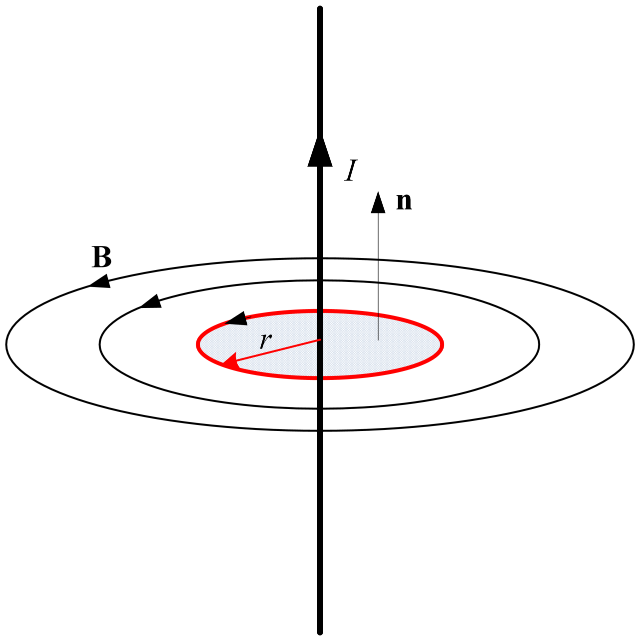
$$\mathbf{F}_{\text{lučni}} = -IBa \int_0^\pi \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \mathbf{i}_{\text{z}} = IBa \cos\phi \Big|_0^\pi \mathbf{i}_{\text{z}} = -2IBa \cdot \mathbf{i}_{\text{z}}.$$

14. (Za samostalni rad) Dva dugačka pravolinijska provodnika se nalaze na udaljenosti od 2,5 cm. Sila po jedinici dužine koju svaka žica deluje na drugu je 40 μN/m. Struja u jednoj žici iznosi 0,6 A. Žice se međusobno odbijaju. **a)** Izračunati struju u drugoj žici i **b)** da li su struje istog ili suprotnog smera?

Rezultat: a) $I_2 = 8,33$ A i b) suprotnog smera.

15. Primenom Amperovog zakona izvesti izraz za jačinu magnetskog polja u okolini beskonačno dugačkog pravolinijskog provodnika u kome je uspostavljena stalna struja jačine I.

Rešenje: Amperov zakon možemo koristiti u situacijama sa visokim stepenom simetrije (cilindrična i ravanska geometrija). U ovom slučaju je u pitanju cilindrična geometrija. Zbog simetrije, linije polja vektora magnetske indukcije su koncentrične kružnice centrirane na osi provodnika.



Uzmimo jednu Amperovu konturu koja ima oblik kružnice poluprečnika r. Usmerenje konture se poklapa sa smerom linija polja magnetske indukcije, kao na slici. Amperov zakon je

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 \cdot \sum_{\mathrm{kroz}\, C} I = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Dakle, cirkulacija vektora magnetske indukcije jednaka je struji koja je prošla kroz površ oslonjenu na konturu, pomnožena za konstantu, permeabilnost vakuuma.

U svim tačkama Amperove konture, vektor magnetske indukcije je konstantan i kao takav može izaći ispred integrala, pa se dobija

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Longrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

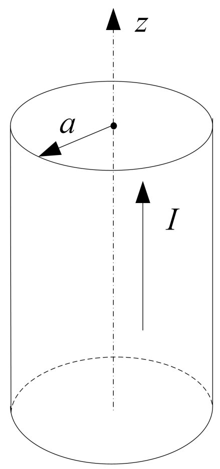
Da li se primenom Amperovog zakona može odrediti magnetska indukcija u okolini provodnika konačnih dimenzija?

Izvorni Amperov zakon NIJE potpun u slučaju vremenski promenljivih polja. Prvi koji je dao potpun oblik Amperovog zakona (dopunio ga je) bio je škotski fizičar i matematičar Džejms Klerk Maksvel, koji je u svom čuvenom delu iz 1864. godine *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* demonstrirao da električno i magnetsko polje putuju kroz prostor kao talas brizinom svetlosti. Uopšten Amperov zakon koji važi i za slučaj brzopromenljivih polja glasi

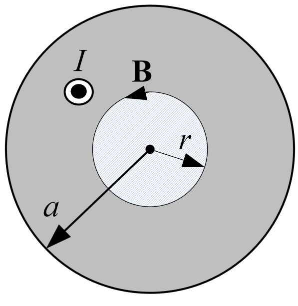
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Na ovaj način je Maksvel predvideo i da električno polje može da indukuje magnetsko. Maksvelovo predviđanje je potvrđeno nešto kasnije kada je 1887. godine nemački fizičar Hajnrih Herc eksperimentalno dobio elektromagnetski talas. Interesantno je i da je Herc upitan čemu služe dobijeni talasi odgovorio: „To nema nikakvu praktičnu primenu. Ovo je samo eksperiment koji dokazuje da je Maksvel bio u pravu – jednostavno imamo te misteriozne elektromagnetske talase koje ne možemo videti golim okom. Ali oni postoje."
Amperov zakon koji je upotrebljen u rešenju ovog zadatka važi ekzaktno za stacionarna polja u vakuumu.

16. Primenom Amperovog zakona odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u proizvoljnoj tački prostora od dugačkog pravolinijskog provodnika poluprečnika a u kome je uspostavljena stalna struja jačine I, ravnomerno raspoređena po poprečnom preseku provodnika.



Rešenje: U zadatku imamo cilindričnu geometriju. Linije polja vektora magnetske indukcije su koncentrične kružnice centrirane na osi provodnika. Može se primeniti Amperov zakon. Razlikujemo dva slučaja, kada određujemo vektor magnetske indukcije unutar i izvan provodnika. Posmatrajmo poprečni presek provodnika, kao na slici.



Za $r \leq a$ je

$$B \cdot 2\pi \cancel{r} = \mu_0 \underbrace{\frac{I}{a^2 \cancel{\pi}}}_{J} r^{\cancel{2}} \cancel{\pi} \Longrightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2},$$

dok je vektor

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \mathbf{i}_\phi,$$

gde je sa $\mathbf{i}_\phi$ označen cirkularan ort, uperen u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na časovniku.

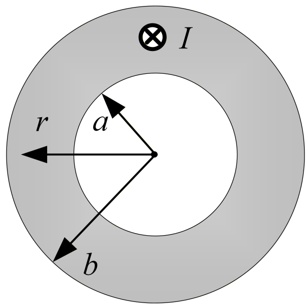
Za $r > a$ je

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Longrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

dok je vektor

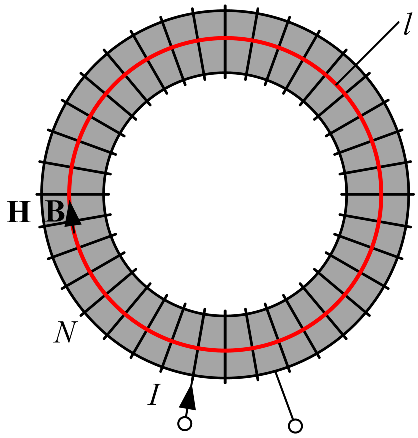
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{i}_\phi.$$

17. (Za samostalan rad) Dat je veoma dugačak provodnik unutrašnjeg poluprečnika a i spoljašnjeg poluprečnika b. U provodniku je upostavljena stalna struja jačine I, kao na slici. Skicirati linije polja vektora $\mathbf{B}$ i označiti smer tog vektora. Odrediti intenzitet vektora magnetske indukcije u funkciji odstojanja od ose provodnika r, za $0 < r < +\infty$.



Rezultat: Linije polja su koncentrične kružnice, centrirane na osi provodnika, usmerene u smeru kretanja kazaljke na časovniku (negativan matematički smer). Za $r \leq a$ je $B = 0$, za $a < r < b$ je $B = \dfrac{\mu_0 I \left(r^2 - a^2\right)}{2\pi \left(b^2 - a^2\right) r}$ i $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ za $r \geq b$.

18. Dužina srednje linije tankog torusa od kartona je dužine $l = 0,2\pi$ m. Na jezgro je ravnomerno i gusto namotano $N = 500$ zavojaka žice i u njima je uspostavljena stalna struja jačine $I = 1$ A. Izračunati vektore jačine magnetskog polja i magetske indukcije u torusu. Da li bi se jačina magnetskog polja i magnetske indukcije promenile ukoliko se umesto kartonskog torusa upotrebi gvozdeni torus sa $\mu_\mathrm{r} = 1000$?



Rešenje: Ukoliko je torus tanak i ukoliko se magnetsko rasipanje zanemaruje, tada je vektor $\mathbf{B}$ jednak u celom jezgru. Primenom Amperovog zakona na srednju liniju torusa, dobija se

$$B \cdot l = \mu_0 N I \Longrightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 1}{0,2\pi} = 1 \text{ mT}.$$

Iz relacije $B = \mu_0 H$ dobijamo da jačina magnetskog polja

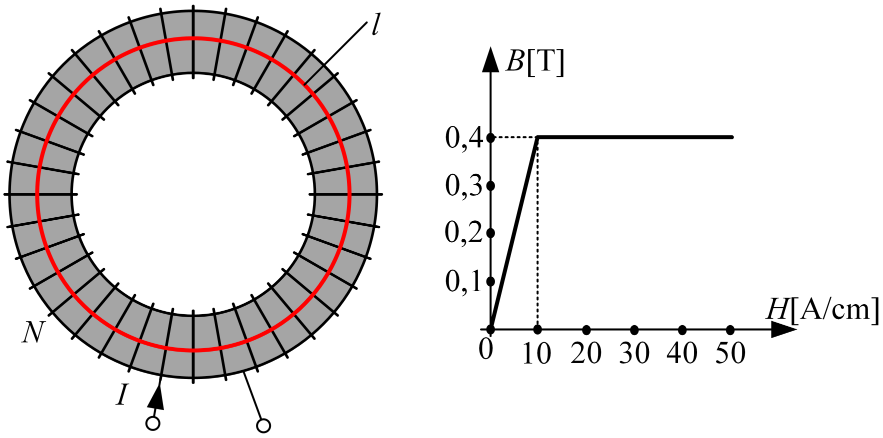
$$H = \frac{NI}{l} = 795,77 \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

Ukoliko bi se umesto kartonskog jezgra upotrebilo gvozdeno jezgro, jačina magnetskog polja se ne bi promenila, ali bi se promenila magnetska indukcija

$$B = \frac{\mu_0 \mu_\mathrm{r} N I}{l} = 1 \text{ T}.$$

Dakle, gvozdeni torus višestruko povećava magnetsku indukciju, što je osnova za upotrebu feromagnetnih materijala u transformatorima, motorima i elektromagnetima.
Torusi se u elektrotehnici koriste zbog brojnih praktičnih prednosti koje proističu iz njihovog oblika i elektromagnetskih karakteristika. Osnovna prednost torusa je što omogućava zatvoren tok magnetskog polja. Kod torusa linije polja magnetske indukcije ostaju zatvorene unutar jezgra, što drastično smanjuje curenje fluksa u okolinu. Ovo je posebno važno kod uređaja koji zahtevaju visoku efikasnost i niske elektromagnetske smetnje, kao što su transformatori.

19. Dužina srednje linije tankog torusa je dužine $l = 0,4$ m. Na jezgro je ravnomerno i gusto namotano $N = 1000$ zavojaka žice i u njima je uspostavljena stalna struja jačine $I = 1,6$ A. Karakteristika magnetisanja materijala od koga je jezgro načinjeno je prikazana na slici. Izračunati vektor magnetske indukcije u jezgru.

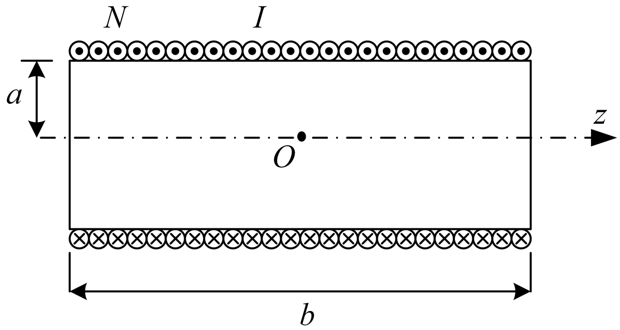


Rešenje: Primenom Amperovog zakona dobijamo

$$H \cdot l = NI \Longrightarrow H = \frac{NI}{l} = \frac{1000 \cdot 1,6}{0,4} = 4000 \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 40 \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}}.$$

Sa karakteristike magnetisanja materijala dobijamo da je $B = 0,4$ T.

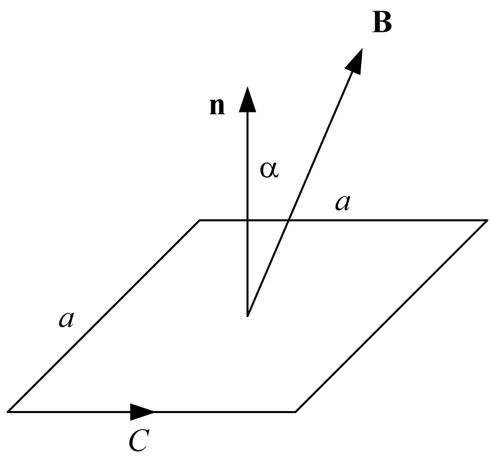
20. (Za samostalni rad) Primenom Amperovog zakona izvesti izraz za vektor magnetske indukcije unutar dugačkog solenoida, kružnog poprečnog preseka, poluprečnika a koji ima N gusto namotanih zavojaka sa strujom jačine I i dužinu b ($b \gg a$).



Rezultat: $B = \dfrac{\mu_0 NI}{b}$.

Da li se primenom Amperovog zakona može odrediti i magnetska indukcija kratkog solenoida? Da li je u ovom zadatku bitan poprečni presek solenoida? Objasniti.

21. Kvadratna kontura, dužine stranice a, nalazi se u homogenom magnetskom polju indkucije B, kao na slici. Odrediti izraz za magnetski fluks kroz površinu oslonjenu na ovu konturu. Normalna na površ konture i vektor magnetske indukcije zaklapaju ugao α.

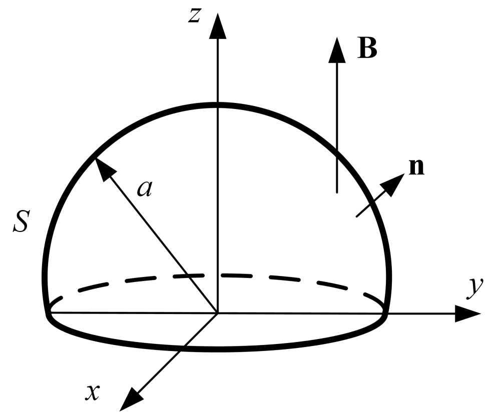


Rešenje: Magnetski fluks je dat izrazom

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S B \cdot \mathrm{d}S \cdot \cos(\measuredangle \mathbf{B}, \mathrm{d}\mathbf{S}) = B \cdot a^2 \cos\alpha.$$

Da li će izraz za fluks zavisiti od oblika površi koja se osloni na kvadratnu konturu?

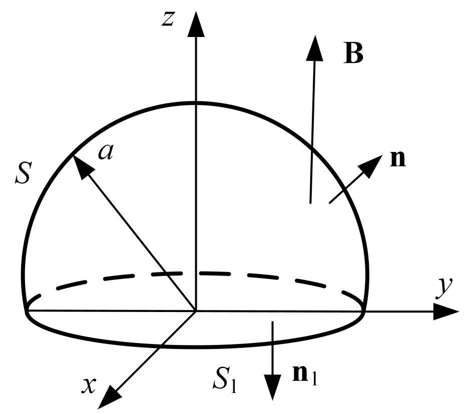
22. Površ S ima oblik polusfere poluprečnika $a = 1$ cm, kao na slici. Polusfera se nalazi u homogenom magnetskom polju $\mathbf{B} = 1\mathbf{i}_z$ T. Izračunati magnetski fluks kroz površ S u odnosu na datu normalu $\mathbf{n}$.



Rešenje: Najlakši način da se reši ovaj zadatak je da primenimo zakon o konzervaciji magnetskog fluksa, koji govori da je fluks vektora magnetske indukcije kroz **zatvorenu** površ jednak nuli. Matematički

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Kako je u zadatku data polusferna površ koja je **otvorena**, potrebno je nadodati još jednu otvorenu površ, oblika kružnog diska S_1, kao na slici.



Na ovaj način je dobijena zatvorena površ

$$\oint_{S\cup S_1} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \underbrace{\int_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}_{\Phi} + \underbrace{\int_{S_1} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}_{\Phi_1} = 0. \qquad (1)$$

Integral za Φ_1 možemo dobiti relativno jednostavno

$$\Phi_1 = \int_{S_1} B_0\mathbf{i}_\mathrm{z}\cdot \mathrm{d}S\cdot(-\mathbf{i}_\mathrm{z}) = -B_0a^2\pi = -1\cdot 10^{-4}\pi = -314\ \mu\mathrm{WB},$$

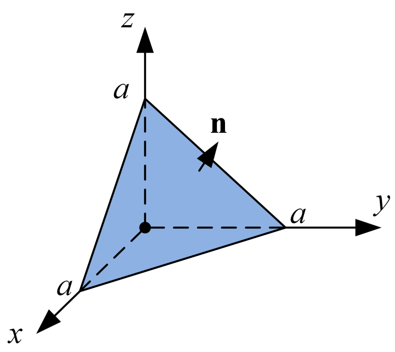
a iz relacije (1) je traženi fluks jednak

$$\Phi = 314\ \mu\mathrm{WB}.$$

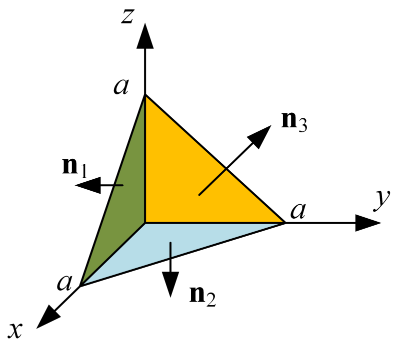
23. Površ S ima oblik jednakostraničnog trougla sa temenima u tačkama $A\,(a,0,0)$, $B\,(0,a,0)$ i $C\,(0,0,a)$. Površ se nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije

$$\mathbf{B} = B_0\left(3\mathbf{i}_\mathrm{x} + 2\mathbf{i}_\mathrm{y} + \mathbf{i}_\mathrm{z}\right).$$

Odredizi izraz za magnetski fluks kroz površ S prema normali prikazanoj na slici.



Rešenje: Nadodajmo **otvorenoj** površi iz postavke zadatke još tri površi, oblika jednakokrako pravouglog trougla, katete dužine a, kao na slici. Na ovako dobijenu piramidu, možemo primeniti zakon o konzervaciji magnetskog fluksa.



Dakle,

$$\oint_{S\cup S_1\cup S_2\cup S_3} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \underbrace{\int_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}_{\Phi} + \underbrace{\int_{S_1} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}_{\Phi_1} + \underbrace{\int_{S_2} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}_{\Phi_2} + \underbrace{\int_{S_3} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}_{\Phi_3} = 0. \tag{1}$$

Sada je

$$\Phi_1 = \int_{S_1} B_0\,(3\mathbf{i}_\mathrm{x} + 2\mathbf{i}_\mathrm{y} + \mathbf{i}_\mathrm{z})\cdot \mathrm{d}S\cdot(-\mathbf{i}_\mathrm{y}) = -2B_0\frac{a^2}{2}$$

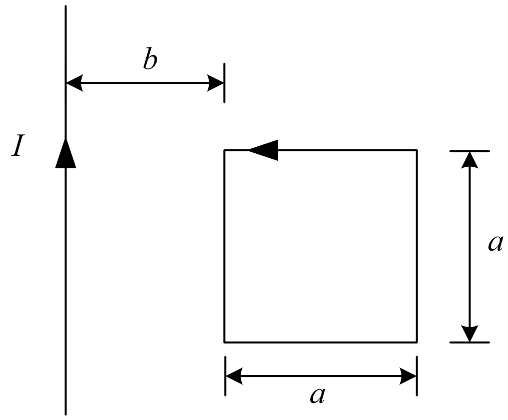
$$\Phi_2 = \int_{S_1} B_0\,(3\mathbf{i}_\mathrm{x} + 2\mathbf{i}_\mathrm{y} + \mathbf{i}_\mathrm{z})\cdot \mathrm{d}S\cdot(-\mathbf{i}_\mathrm{z}) = -B_0\frac{a^2}{2}$$

$$\Phi_3 = \int_{S_1} B_0\,(3\mathbf{i}_\mathrm{x} + 2\mathbf{i}_\mathrm{y} + \mathbf{i}_\mathrm{z})\cdot \mathrm{d}S\cdot(-\mathbf{i}_\mathrm{x}) = -3B_0\frac{a^2}{2}.$$

Iz realcije (1) je sada

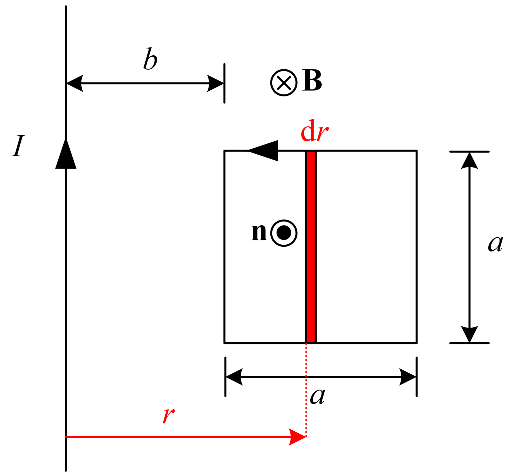
$$\Phi = -\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 6B_0\frac{a^2}{2} = 3B_0a^2.$$

24. Veoma dugačak provodnik sa stalnom strujom jačine I i kvadratna kontura dužine stranice a se nalaze u istoj ravni, kao na slici. Najbliža stranica kvadrata paralelna provodniku je na udaljenosti b od njega. Odrediti izraz za magnetski fluks kroz kvadratnu konturu.

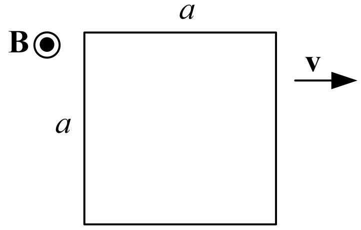


Rešenje: Magnetska indukcija veoma dugačkog provodnika sa strujom nije homogena. Algebarski intenzitet je $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$,prema referentnom smeru u papir. Ukoliko se na proizvoljan način usmeri kvadratna kontura, primenom desne zavojnice, normala na ravnu površ oslonjenu na nju je iz papira. Ukupan fluks se mora odrediti primenom integrala (magnetska indukcija nije homogena)

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot a \cdot \mathrm{d}r \cdot \cos\pi = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}.$$



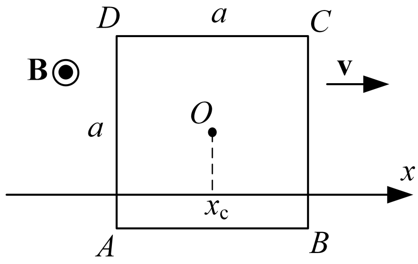
25. Kvadratna kontura stranice a nalazi se u homognenom magnetskom polju indukcije B, koje je upravno na površ kvadrata. Kvadrat se kreće konstantnom brzinom v, kao na slici. Odrediti indukovanu ems u kvadratnoj konturi.



Rešenje: I način: Ukoliko je $x_c = vt$ koordinata centra zavojka, tada je koordinata leve stranice $vt - \frac{a}{2}$, a desne $vt + \frac{a}{2}$. Fluks se dobija iz

$$\Phi = \int_{vt-\frac{a}{2}}^{vt+\frac{a}{2}} B \cdot a \,\mathrm{d}x = Ba\left(vt + \frac{a}{2} - vt + \frac{a}{2}\right) = Ba^2.$$

Kako je magnetski fluks konstanta u odnosu na vreme, idukovana ems jednaka je nuli.



II način: Usled kretanja u homogenom magnetskom polju pojavljuje se dinamička indukcija pa je

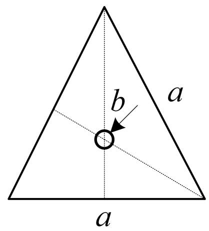
$$e_{\text{ind,din}} = \oint_C \Big(\underbrace{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}_{\mathbf{E}_{\text{ind,din}}}\Big) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Primetimo da je na stranice AB i CD $e_{\text{ind,din}} = 0$ jer je ugao između $\mathbf{E}_{\text{ind,din}}$ i $\mathrm{d}\mathbf{l}$ jednak $\frac{\pi}{2}$, a $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, preostaju stranice BC i DA:

$$e_{\text{ind,din}BC} = vba$$
$$e_{\text{ind,din}DA} = -vba,$$

a u zbiru je sve jednako nuli.

26. Žičana kontura, oblika jednakostraničnog trougla, stranice a i kružna kontura poluprečnika b ($a \gg b$) postavljeni su u istoj ravni, kao na slici. Centar kružne konture i težište trougla se poklapaju. Odrediti približno izraz za međusobnu induktivnost.

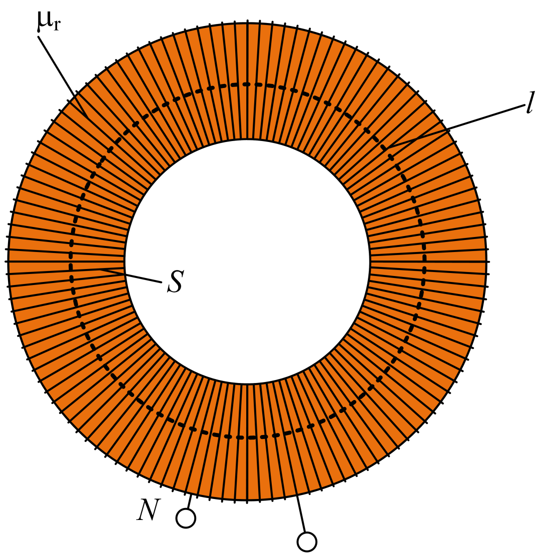


Rešenje: Odaberimo da orijentacije trougla i kružnice budu u pozitivnom matematičkom smeru. Vektor magnetske indukcije u težištu trougla je određen na prvim vežbama iz magnetizma. Dobijeno je $B = \dfrac{9\mu_0 I}{2\pi a}$, u ovom slučaju prema referentnom smeru ka posmatraču. Kako je $a \gg b$, kružnu konturu možemo smatrati jako malom pa se može smatrati da se svaka tačka površine oslonjene na konturu pkratično poklapa sa težištem trougla. Dakle,

$$\Phi \approx BS\cos 0 \approx \frac{9\mu_0 I}{2\pi a} \cdot b^2\pi.$$

Sada je $L \approx \dfrac{9\mu_0}{2a} b^2$.

27. Na tanak torus, dužine srednje linije $l = 600$ mm i površine poprečnog preseka $S = 10\ \text{cm}^2$, ravnomerno i gusto je namotano $N = 1200$ zavojaka tanke žice. Jezgro torusa je načinjeno od feromagnetskog materijala čija je relativna permeabilnost $\mu_r = 1000$. Izračunati induktivnost namotaja.



Rešenje: Prema Amperovom zakonu i konstitutivnoj relaciji $B = \mu H$ dobija se

$$Hl = NI \Longrightarrow H = \frac{NI}{l} \Longrightarrow B = \mu_0\mu_\mathrm{r}\frac{NI}{l}.$$

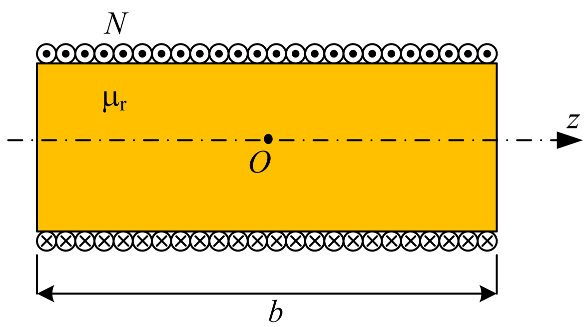
Fluks namotaja je

$$\Phi = NBS = \mu_0\mu_\mathrm{r}\frac{N^2 I}{l}$$

pa je njegova induktivnost

$$L = \mu_0\mu_\mathrm{r}\frac{N^2 S}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot \frac{1200^2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{0,6} = 3,016 \text{ H}.$$

28. Dugačak solenoid od linearnog feromagnetskog materijala permeablinosti $\mu_\mathrm{r} = 2000$ ima ravnomerno i gusto namotanu žicu sa $N = 500$ zavojaka. Dužina solenoida je $b = 0,1$ m, a površina poprečnog preseka je $S = 1$ cm^2. Izračunati induktivnost namotaja.



Rešenje: Vektor magnetske indukcije dugačkog solenoida je

$$B = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}NI}{b},$$

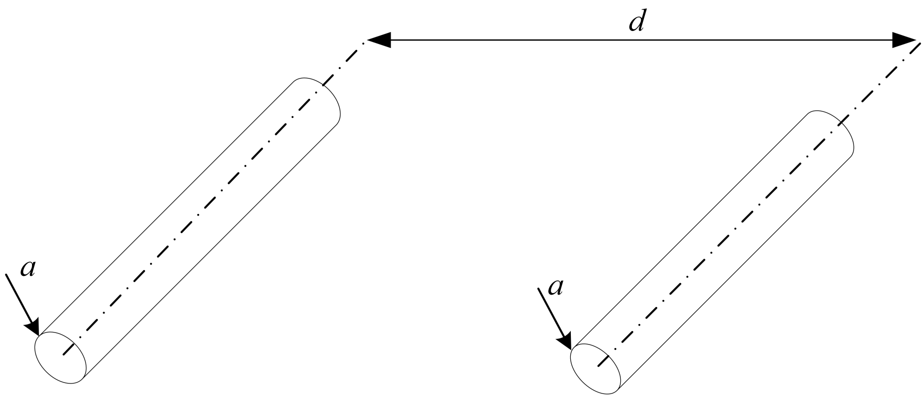
a fluks namotaja je

$$\Phi = NBS = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}N^2 I}{b}S,$$

pa je induktivnost namotaja data izrazom

$$L = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}N^2 S}{b} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2000 \cdot 500^2 \cdot 10^{-4}}{0,1} = 0,628 \text{ H}.$$

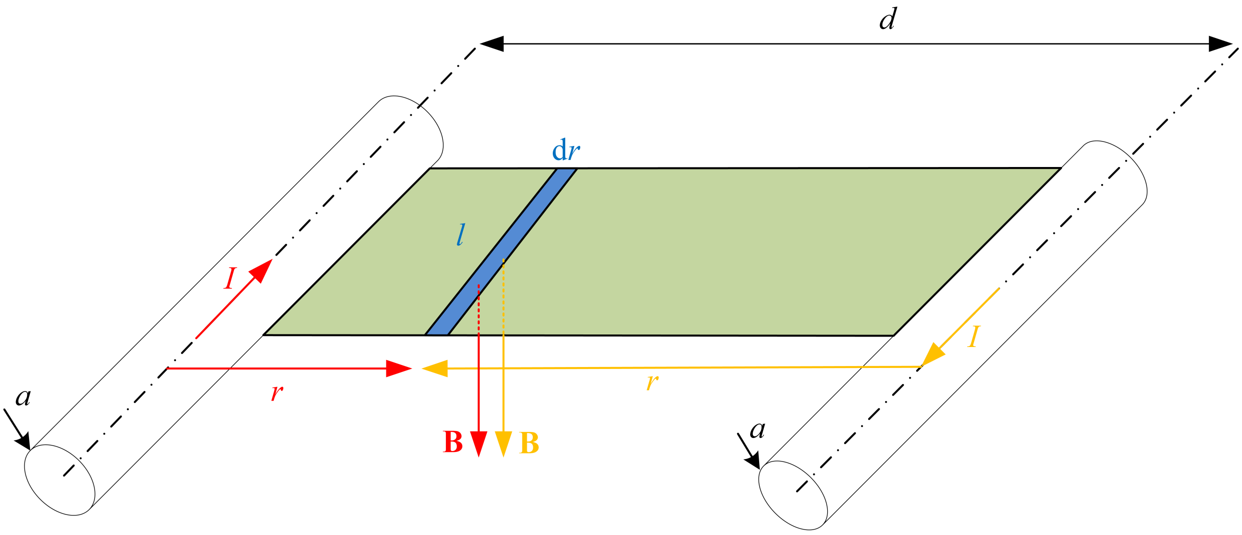
29. Odrediti izraz za spoljašnju podužnu induktivnost tankog simetričnog dvožičnog voda, poluprečnika provodnika a i odstojanja između osa provodnika d. Smatrati da je $d \gg a$.



Rešenje: Magnetska indukcija dugačkog provodnika izvan njega je data izrazom

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Površina za određivanje fluksa se oslanja u spoljašnjosti, od provodnika do provodnika, kao na slici.



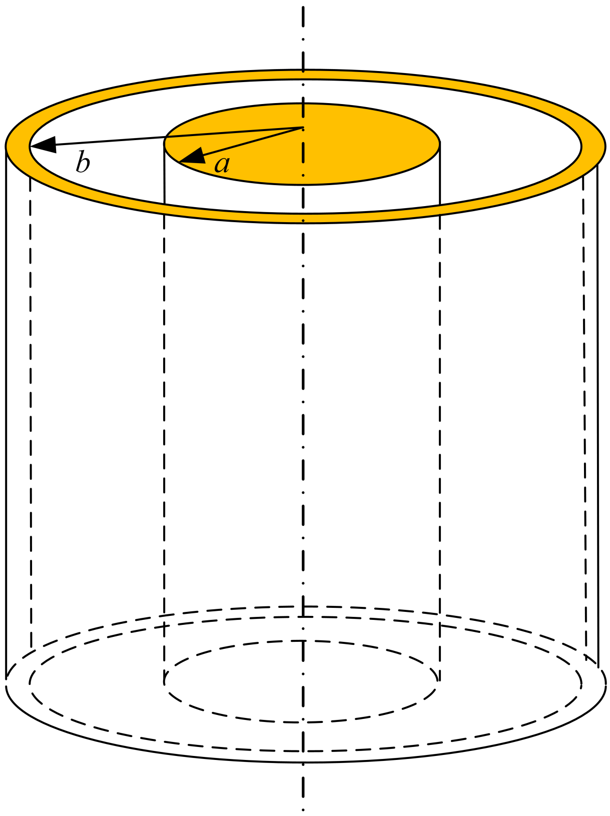
Fluks vektora magnetske indukcije je potrebno naći integracijom s obzirom da polje B nije homogeno. Dakle magnetski fluks od jednog provodnika je

$$\Phi_1 = \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot l \, \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \cdot \ln \frac{d-a}{a} \approx \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d}{a}.$$

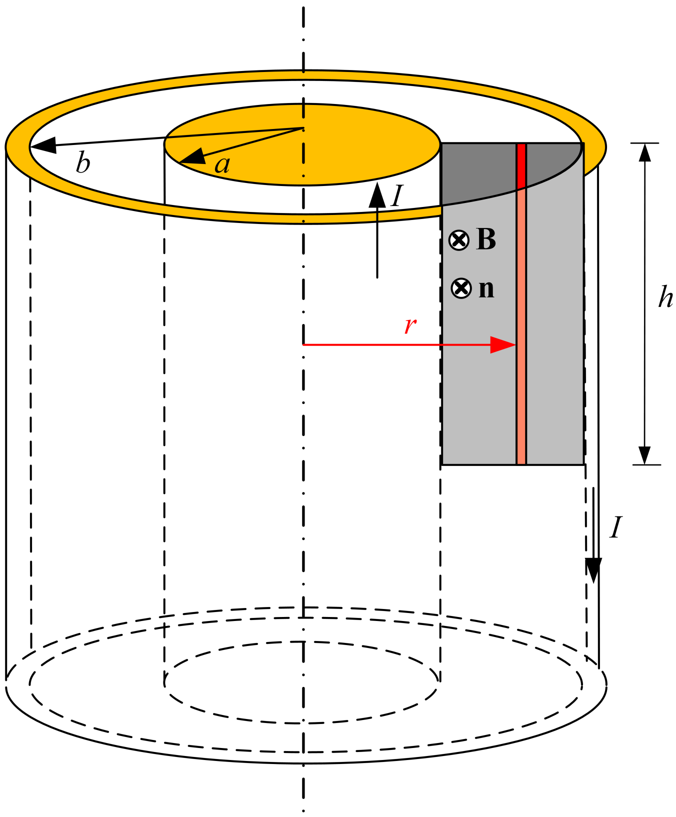
Kako postoje dva istovetna provodnika, ukupan fluks je $\Phi = 2\Phi_1$. Spoljašnju podužnu induktivnost dobijamo iz

$$L' = \frac{\Phi}{Il} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a}.$$

30. Odrediti izraz za podužnu spoljašnju induktivnost koaksijalnog voda poluprečnika unutrašnjeg provodnika a i unutrašnjeg poluprečnika spoljašnjeg provodnika b. Sredina je svuda neferomagnetska.



Rešenje: Površina kroz koju se određuje spoljašnji magnetski fluks je pravougaonik prikazan na slici.



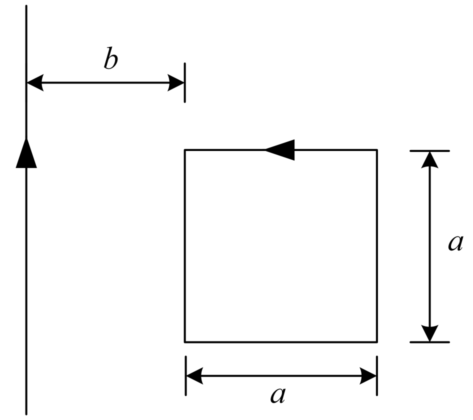
Magnetska indukcija u tačkama oslonjena na površ pravougaonika je $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ i nehomogena je. Zbog toga fluks tražimo pomoću integrala

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h \, \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

pa je podužna induktivnost

$$L' = \frac{\Phi}{Ih} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

31. Veoma dugačak provodnik i kvadratna kontura dužine stranice a se nalaze u istoj ravni, kao na slici. Najbliža stranica kvadrata paralelna provodniku je na udaljenosti b od njega. Prema usmerenjima sa slike, odrediti izraz za međusobnu induktivnost provodnika i kvadrata.

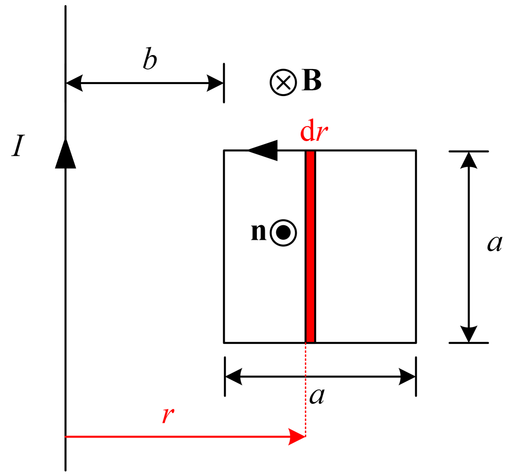


Rešenje: Fluks kroz površinu oslonjenu na konturu, koji potiče od indukcije zbog struje u provodniku je

$$\Phi_{21} = -\int_b^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot a \, \mathrm{d}r = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b},$$

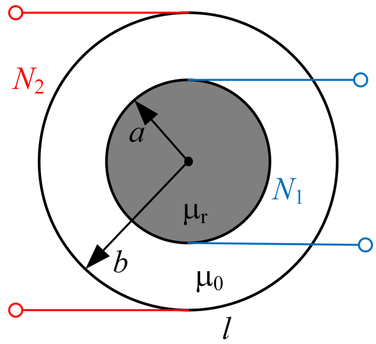
pa je međusobna induktivnost

$$L_{21} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}.$$



Znak minus potiče od suprotnih smerova vektora magnetske indukcije i normale na površinu provodnika.

32. Na slici je prikazan poprečni presek dva dugačka solenoida postavljena koaksijalno. Oba solenoida imaju kružne poprečne preseke, poluprečnika a i b. Dužina oba solenoida je l, a brojevi zavojaka na njih namotani su N_1 i N_2. Ukoliko je untrašnost prvog solenoida ispunjena linearnim feromagnetikom relativne permeabilnosti μ_r, a u ostatku prostora je vazduh, odrediti sopstvenu induktivnost prvog namotaja, sopstvenu induktivnost drugog namotaja, međusobnu induktivnost i koeficijent sprege ovih namotaja.



Rešenje: Sopstvenu induktivnost prvog namotaja dobijamo tako što u njemu uspostavljamo struju, čime dobijamo indukciju

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1}{l}$$

i oslanjamo površine na zavojke prvog namotaja, čime dobijamo fluks

$$\Phi_1 = N_1 B S_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2 I_1}{l} a^2 \pi,$$

pa je

$$L_1 = \frac{\Phi_1}{I_1} = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2}{l} a^2 \pi.$$

Sopstvenu induktivnost drugog namotaja dobijamo tako što u njemu uspostavljamo struju, a kako se u unutrašnjosti drugog solenoida nalazi i feromagnetik i vazduh, dobijamo

$$B_{\text{vaz}} = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l}, \qquad B_{\text{fer}} = \frac{\mu_0 \mu_r N_2 I_2}{l},$$

pa je fluks

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &= N_2 B_{\text{vaz}} S_{\text{vaz}} + N_2 B_{\text{fer}} S_{\text{fer}} \\
&= N_2 \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l} \left(b^2 - a^2\right) \pi + N_2 \frac{\mu_0 \mu_r N_2 I_2}{l} a^2 \pi \\
&= \frac{\mu_0 N_2^2 I_2}{l} \pi \left(b^2 + (\mu_r - 1) a^2\right),
\end{aligned}$$

a induktivnost je

$$L_2 = \frac{\Phi_2}{I_2} = \frac{\mu_0 N_2^2}{l} \pi \left(b^2 + (\mu_r - 1) a^2\right).$$

Međusobnu induktivnost dobijamo tako što, recimo, u prvi namotaj uspostavimo struju, čime dobijamo

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1}{l},$$

a površine oslanjamo na navojke drugog namotaja,

$$\Phi_{21} = N_2 B_1 S_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 I_1}{l} \cdot a^2 \pi,$$

pa je međusobna induktivnost

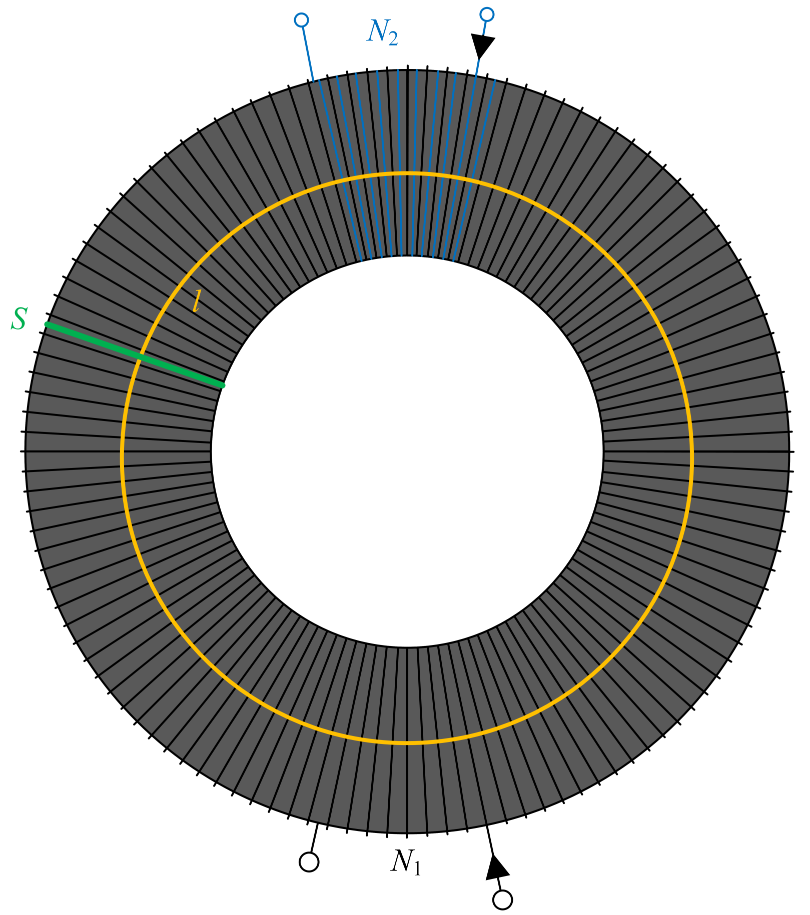
$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2}{l} \cdot a^2 \pi.$$

Koeficijent sprege se dobija iz izraza

$$k = \frac{|L_{21}|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\frac{\mu_0 \mu_\mathrm{r} N_1 N_2}{l} \cdot a^2 \pi}{\sqrt{\frac{\mu_0 \mu_\mathrm{r} N_1^2}{l} a^2 \pi \cdot \frac{\mu_0 N_2^2}{l} \pi \left(b^2 + (\mu_\mathrm{r} - 1)\, a^2\right)}}$$
$$= \sqrt{\frac{\mu_\mathrm{r}}{\mu_\mathrm{r} - 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}.$$

U zadatku određen izraz za L_{12}. Da li bi se dobio isti izraz da je traženo L_{12}? Da li sopstvena induktivnost mora uvek biti pozitivna? A međusobna induktivnost?

33. Na tanko torusno jezgro od neferomagnetskog materijala ($\mu \approx \mu_0$), dužine srednje linije l i površine poprečnog preseka S, gusto i ravnomerno su namotana dva namotaja tanke žice sa N_1 i N_2 zavojaka. Odrediti sopstvenu induktivnost prvog namotaja, sopstvenu induktivnost drugog namotaja, međusobnu induktivnost i koeficijent sprege ovih namotaja. Zanemariti rasipanje.



Rešenje: Ukoliko se uspostavi struja u prvom namotaju, magnetska indukcija u torusu je

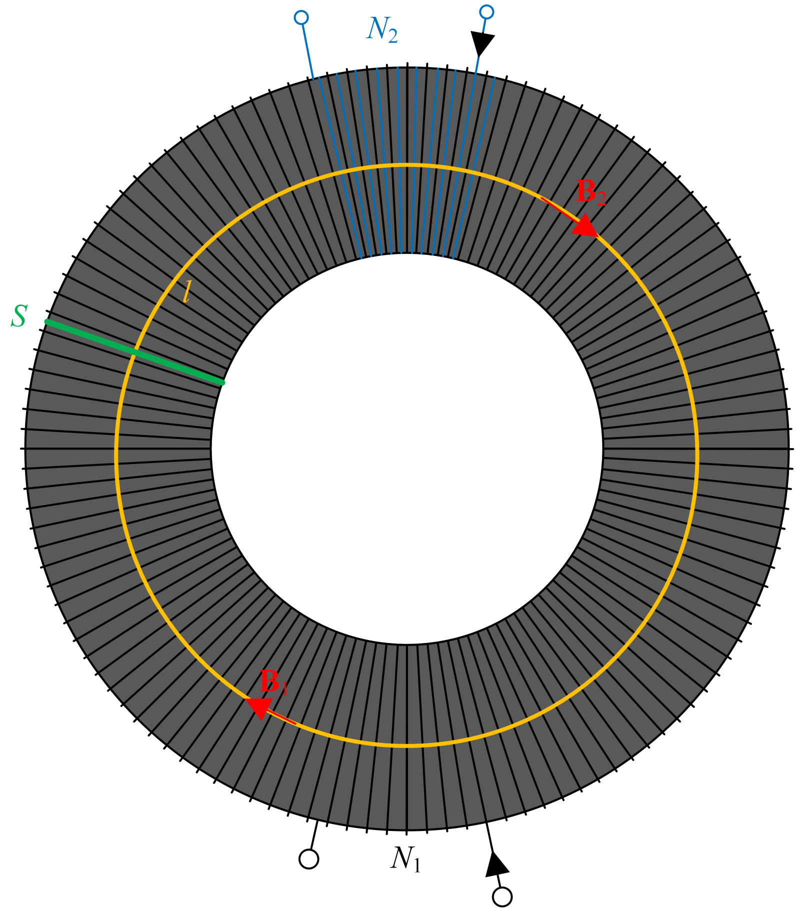
$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l},$$

a fluks je

$$\Phi_1 = N_1 B_1 S = \frac{\mu_0 N_1^2 I_1}{l} S,$$

pa je induktivnost prvog namotaja

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l}.$$



Ukoliko se uspostavi struja samo u drugom namotaju, magnetska indukcija u torusu je

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l},$$

a fluks je

$$\Phi_2 = N_2 B_2 S = \frac{\mu_0 N_2^2 I_2}{l} S,$$

pa je induktivnost drugog namotaja

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 S}{l}.$$

Prema orijentacijama zavojaka sa slike, međusobni fluks je pozitivan, pa će i međusobna induktivnost biti pozitivna. Ukoliko je struja uspostavljena u prvom namotaju, tada je

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l},$$

a fluks kroz drugi namotaj je

$$\Phi_{21} = +N_2 B_1 S = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1}{l} S$$

pa je

$$L_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}.$$

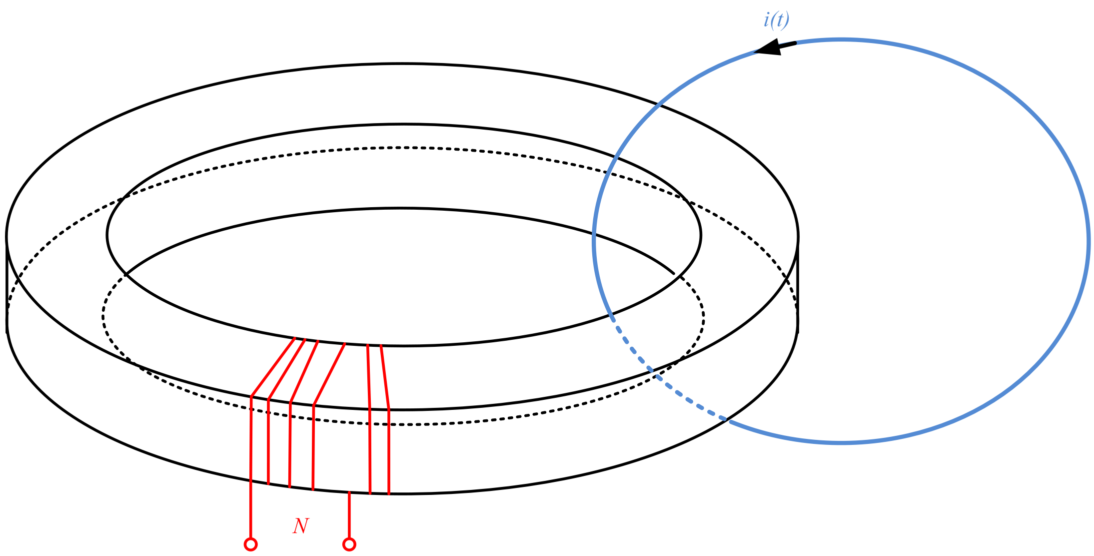
Koeficijent sprege je

$$k = \frac{|L_{21}|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}}{\sqrt{\frac{\mu_0 N_1^2 S}{l} \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}}} = 1.$$

Primetiti da je induktivnost srazmerna kvadratu broja zavojaka.

Kako tumačite da je dobijeni koeficijent sprege jednak jednici tj. da je ostvarena savršena sprega? Da li je ona u praksi ostvariva?

34. Na tanko torusno jezgro od neferomagnetskog materijala ($\mu \approx \mu_0$), površine poprečnog preseka S i dužine srednje linije l, gusto i ravnomerno je namotano N zavojaka tanke žice. Torus je obuhvaćen provodnom konturom, površine S_1, u kojoj je uspostavljena prostoperiodična struja $i(t) = I_{\max}\cos\omega t$. Odrediti indukovanu ems u torusnom namotaju.



Rešenje: Kako je prostoperiodična struja uspostavljena u provodnoj konturi, pojaviće se vremenski promenljivo magnetsko polje i samim tim vremenski promenljiv magnetski fluks. Zbog toga će se u torusnom namotaju indukovati ems

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L_{12}i(t)\right) = -L_{12}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Očigledno je da je jednostavnije uspostaviti struju u tornusni namotaj i odrediti fluks kroz konturu[1]. Dobija se

$$\Phi_{21} = B \cdot S\cos 0 = \frac{\mu_0 N I}{l}S,$$

pa je

$$L_{21} = \frac{\mu_0 N S}{l} = L_{12}.$$

Dakle, zamenom u (1) je

$$e = -\frac{\mu_0 N S}{l}I_{\max}(-\omega)\sin\omega t = \frac{\mu_0 N S}{l}I_{\max}\omega\sin\omega t.$$

Primetiti da nam za rešavanje zadatka nije bila potrebna površina zavojka S_1 jer presek te površine i površine gde ima magnetske indukcije (unutar torusa) je samo površina poprečnog preseka torusa, S.

[1]Zadatak se analitički ne bi mogao rešiti onako kako je postavljen, tj. da se traži magnetska indukcija od provodnika sa strujom $i(t)$. Ideja zadatka je da se iskoristi da je $L_{12} = L_{21}$.

35. Izvesti jedinicu za magnetsku indukciju preko osnovnih SI jedinica.
Rešenje: Magnetska sila na naelektrisanu česticu je

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

odakle zaključujemo da je

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{As}^2}.$$

36. Pokazati da su jedinice za indukovanu elektromotornu silu e_{ind} i brzinu promene fluksa u vremenu $\mathrm{d}\Phi/\,\mathrm{d}t$ iste u SI sisetmu jedinica.
Rešenje: Kako je fluks

$$\mathrm{Wb} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{As}^2} \cdot \mathrm{m}^2,$$

izvod fluksa u vremenu je

$$\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{As}^3} \cdot \mathrm{m}^2.$$

Sa druge strane, indukovana elektromotorna sila je u voltima, koji se može predstaviti kao količnik električne snage i struje, a zatim je snaga proizvod sile i brzine. Ovom se dobija

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{N} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{As}^3},$$

što je trebalo i pokazati.