Диференцијалне једначине 1. реда (додатак предавањима и вежбама)

Пример: Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$(x^2y^2-1)\,dy+2xy^3\,dx=0,$$

а затим оно партикуларно решење за које је $y(-1)=2$.

Решење: Ово није једначина са тоталним диференцијалом с обзиром на то да одговарајући парцијални изводи, $\frac{\partial(x^2y^2-1)}{\partial x}=2xy^2$ и $\frac{\partial(x^2y^2-1)}{\partial y}=6xy^2$, нису међусобно једнаки. Могло би да се покуша са тражењем одговарајућег интеграционог фактора, али то је процедура коју је по могућству увек боље избећи осим ако је то једини начин на који умемо да решимо задатак.

Уколико дату једначину напишемо у стандардном облику, $\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{2xy^3}{x^2y^2-1}$, јасно је да нити се ради о једначини која раздваја променљиве, нити о хомогеној, а богами ни о линеарној ни о Бернулијевој диференцијалној једначини. Међутим, уколико идемо на варијанту $\frac{dx}{dy}=x'=-\frac{x^2y^2-1}{2xy^3}=\frac{1-x^2y^2}{2xy^3}=\frac{1}{2y^3}x^{-1}-\frac{1}{2y}x$, односно

$$x'+\frac{1}{2y}x=\frac{1}{2y^3}x^{-1},$$

видимо да је у питању Бернулијева диференцијална једначина $x'+P(y)\cdot x=Q(y)\cdot x^{\alpha}$, где је $\alpha=-1$ и $x=x(y)$ непозната функција аргумента y.

Сада поступамо на стандардан начин - уводимо смену $x=z^{\frac{1}{1-\alpha}}=z^{\frac{1}{2}}$, где је $z=z(y)$ нова непозната функција аргемента y и $x'=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}z'$, након чега дата једначина постаје

$$\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}z'+\frac{2}{y}z^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2y^3}z^{-\frac{1}{2}},$$

односно $z'+\frac{1}{y}z=\frac{1}{y^3}$ након множења са $2z^{\frac{1}{2}}$ (поступак свођења Бернулијеве диференцијалне једначине на линеарну је увек препоручљивије изводити него памтити напамет како се трансформишу одговарајући коефицијенти). Сада је на основу познате формуле

$$\begin{aligned} z(y)= &\ e^{-\int\frac{1}{y}\,dy}\left(C+\int\frac{1}{y^3}e^{\int\frac{1}{y}\,dy}\,dy\right)=e^{-\ln y}\left(C+\int\frac{1}{y^3}e^{\ln y}\,dy\right)\\ = &\ \frac{1}{y}\left(C+\int\frac{1}{y^3}\cdot y\,dy\right)=\frac{1}{y}\left(C+\int\frac{dy}{y^2}\right)=\frac{1}{y}\left(C-\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Враћањем одговарајуће смене добијамо опште решење у облику

$$x^2=\frac{1}{y}\left(C-\frac{1}{y}\right)$$

Замењујући $x = -1$ и $y = 2$ добијамо $1 = \frac{1}{2}\left(C - \frac{1}{2}\right)$, одакле следи $C = \frac{5}{2}$. Зато ће тражено партикуларно решење бити

$$x^2 = \frac{1}{y}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{y}\right).$$

1. Решити диференцијалне једначине:

   (а) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ и за дато x_0 наћи оно решење које задовољава услов $y(x_0) = 0$;

   (б) $y' = x(1 + y^2)$;

   (ц) $y' - \dfrac{2xy}{x^2 - 1} = 0$;

   (д) $2x^2\,dy - (x^2 + y^2)\,dx = 0$

   (е) $xyy' + x^2 + y^2 = 0,\ y(1) = 1$;

   (ф) $xy' = y\left(1 + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right),\ y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$;

   (г) $(y\sin x - 1)\,dx + \cos x\,dy = 0$;

   (х) $y' + 2xy = 2x^3y^3$;

   (и) $xy' - x^2y^2 = 2y$.

Решења

1. (а) Опште решење је $y = (x - C)^3$, а тражено партикуларно решење је $y = (x - x_0)^3$;

   (б) $\operatorname{arctg} y = \dfrac{x^2}{2} + C$;

   (ц) $y = C(x^2 - 1)$;

   (д) $y = x\left(1 - \dfrac{2}{C + \ln x}\right)$ (постоји и решење $y = x$, које се добија у случају у ком је један од именилаца одговарајуће функције која се интеграли једнак 0 - такве случајеве је увек потребно независно анализирати; додуше, у конкретној ситуацији се може сматрати да то решење обухваћено формулацијом општег решења и да се добија за $C = \pm + \infty$);

   (е) $y = \sqrt{\dfrac{3 - x^4}{2x^2}}$;

   (ф) $y = xe^{-\frac{x}{2}}$;

   (г) $y = C\cos x + \sin x$;

(х) $y = \dfrac{1}{\sqrt{Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}}}$;

(и) $y = \dfrac{4x^2}{4C - x^4}$.

Александар Пејчев,

Машински факултет у Београду