

РЕДОВИ

Редови бројева (Нумерички редови)

• (a_n) - низ бројева

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ - планови низа

a_n - општи план низа

• Ред у плановима $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ дефинише се као збир својих планова и елемената се и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

• a_n - општи план реда

• пр. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \dots = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 + \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

хармонијски ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

- Сум првих n чланова реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ назива се n -та парцијална зума тог реда и обележава се са

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

- (S_n) - низ парцијалних зума
- Каже се да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира (к) ако постоји (коначан) лимес $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Тада се S назива зумом реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и пише се $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не конвертира, каже се да дивертира (Д)

- Закле, ред $\sum_{n=1}^{\infty}$ конвертира (дивертира) ако низ парцијалних зума $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ конвертира (дивертира)

- $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ - зума реда

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots - \text{остатак реда}$$

- Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ додати или од њега одузмемо коначан број чланова тог реда, то неће утицати на његову конвергенцију (дивергенцију).

Нап, ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in (Д)$, онда и $\sum_{n=5}^{\infty} a_n \in (Д)$

• Збир два конвергентна реда је конвергентан ред
($K + K = K$)

Збир конвергентног и дивергентног реда је дивергентан ред
($K + D = D$)

За збир два дивергентна реда не знамо да ли је конвергентан или дивергентан ($D + D = ?$)

• пр $a_n = 3$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3 = 3 + 3 + 3 + \dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{n \text{ пута}} = n \cdot 3 = 3n$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} 3n = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \quad (D)$$

• пр $a_n = (-1)^n$; истражити конвергенцију $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots$$

$$S_n = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ парно} \\ -1, & n \text{ непарно} \end{cases}$$

(S_n) је низ $-1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots$

$$(S_n) \quad (D), \text{ па и } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad (D)$$

• уп $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

приметим: $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1+n-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \textcircled{K} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

уп $a_n = 2^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ — геометрический ряд

можно использовать:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} = \frac{1}{1-q}, & \textcircled{K} \text{ за } |q| < 1 \\ \textcircled{Д} \text{ за } |q| \geq 1 \end{cases}$$

так, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad \textcircled{K} \quad (|q| = \frac{1}{2} < 1)$

так, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \quad \textcircled{Д} \quad (|q| = 2 \geq 1)$

$$\text{или, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^0 =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1 \quad (\text{K})$$

$$\text{или, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \quad (\text{K})$$

• Ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергирају, при чему је

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B, \quad \text{тада:}$$

1) ред $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ конвергира и $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA \quad (c \in \mathbb{R})$

2) ред $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ конвергира и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

• **КО** [Неопходан услов конвергенције]

1) Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

2) Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

! Обрнуто не мора да важи, иако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
не знамо да ли ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира или
 дивергира

• пр. Испитати конвергенцију реда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$; $a_n = \frac{n+1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ (A) (није испуњен неопходан услов конвергенције)

б) $\sum_{n=1}^{\infty} n$; $a_n = n$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} n$ (A) (није испуњен неопходан услов конвергенције)

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$; $a_n = \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n^2+3n+2} = 0$$

са сада не знамо да ли $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ (K) или (A)

• дом ~~Проверити~~ Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-n+1}$

реш $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-n+1}$ (A)

Редови са позитивним члановима ($a_n \geq 0$)

• K1 [Даламберов критеријум]

Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима
тако да постоји $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Тада:

1) ако је $l < 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (K)

2) ако је $l > 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D)

3) ако је $l = 1$, не знамо да ли ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
конвертира или дивертира

• ип Истицање конвергенцију реда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; $a_n = \frac{1}{n!} \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (K) на основу Даламберовог критеријума

б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!$; $a_n = n!$, $a_{n+1} = (n+1)!$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty > 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n!$ (D) на основу Даламберовог критеријума?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$; $a_n = \frac{2^n}{n} \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2 \cdot 2^n)}{(n+1)2^n} =$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2 \cdot 1 = 2 > 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ (I) на основу Замандеровог критеријума

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$; $a_n = \frac{n+1}{n} \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} = 1$$

На основу Замандеровог критеријума не можемо закључити ни да ~~сходно~~ конвертира ни да ~~сходно~~ дивертира

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$$

(у претходном примеру смо показали да $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ (II), јер није изведен неопходан услов конвергенције)

Зад. Испитати конвергенцију реда

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; $a_n = \frac{2^n}{n!} \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n \cdot n!}{2^n \cdot (n+1)n!} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ (K) (Замандер)

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; $a_n = \frac{n!}{n^n} \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(n+1)!} \cdot n^n}{\cancel{n!} \cdot (n+1)^{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ $\textcircled{K}$ (Засандар)

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1001^n}{(n+1)! - n!}$; $a_n = \frac{1001^n}{(n+1)! - n!} \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{1001^{n+1}}{(n+2)! - (n+1)!}$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1001^{n+1}}{(n+2)! - (n+1)!}}{\frac{1001^n}{(n+1)! - n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1001^{n+1} ((n+1)! - n!)}{1001^n ((n+2)! - (n+1)!)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1001 \cdot \cancel{1001^n} \cdot \cancel{n!} (n+1 - 1)}{\cancel{1001^n} \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!} (n+2 - 1)} = 1001 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0 < 1 \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1001^n}{(n+1)! - n!}$ $\textcircled{K}$ (Засандар)

• сон Ушигтайн конвергенц регу

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$

пер а) $\textcircled{K}$

б) $\textcircled{K}$

в) $\textcircled{Д}$

K2 [Кошијев корен и критериум]

Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима такав да

постоји $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тада:

1) ако је $l < 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (K)

2) ако је $l > 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D)

3) ако је $l = 1$, не знамо да ли ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира или дивертира

• ип Испитати конвергенцију реда

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$; $a_n = \frac{1}{n^n} \geq 0$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ (K) на основу Кошијевог кореног критеријума

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$; $a_n = 3^n \geq 0$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3 > 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$ (D) на основу Кошијевог кореног критеријума

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $a_n = \frac{1}{n} \geq 0$; $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

На основу К.к.к. не можемо закључити ни да ~~ни~~

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ конвертира ни да дивертира

• Заг Утврдити конвергенцију реда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^n$; $a_n = \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^n \geq 0$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2 > 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^n \quad \textcircled{B} \quad (\text{Покуљев корену})$$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)}$; $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)} \geq 0$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - 1 + \frac{n-1}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\cancel{n-1} + \cancel{n-1}}{n+1} \right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{-2}} \right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{-2}} \right)^{\frac{n+1}{-2} \cdot (-2)} \rightarrow e = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)} \quad \textcircled{K} \quad (\text{Покуљев корену})$$

• дом Истинати конвергенцију реда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(1001 + \frac{1}{n}\right)^n}$

реш. а) (K)

б) (D)

в) (K)

• [K3] [Поређени критеријум 1]

Нека је $0 \leq a_n \leq b_n$ за $n \geq n_0$. Тада:

1) ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвертира, онда и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира

2) ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивертира, онда и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивертира

• пр. Истинати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (хармонички ред)

$$a_n = \frac{1}{n} \geq 0$$

$$(\forall x > 0) (x > \ln(1+x)) ; \quad \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$b_n = \ln(n+1) - \ln(n) ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln(n))$$

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n =$$

$$= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots + (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty \neq 0 ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln(n)) \text{ (A)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ (A) (поређени 1)}$$

(неопходан услов)

• пр. Изпитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

14

(симетричност ред)

$$a_n = \frac{1}{n^2} \geq 0; \text{ посматрамо } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{n(n-1)}; \quad a_n \leq b_n, \quad n \geq 2, \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Бек смо доказали да конвертира

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \quad (K)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (K) \quad (\text{поређења 1}); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (K)$$

• пр. $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

Може се доказати:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} (K) & \text{за } \alpha > 1 \\ (D) & \text{за } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Нпр. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (K), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}} \quad (K)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (D), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (D)$

• Важ Установить конвергенцию ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+2}$; $a_n = \frac{1}{n^2+2n+2} \geq 0$

$$\frac{1}{n^2+2n+2} \leq \frac{1}{n^2} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ (K)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+2} \text{ (K)} \quad (\text{по теореме 1})$$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$; $a_n = \frac{1}{n 2^n} \geq 0$

$$\frac{1}{n 2^n} \leq \frac{1}{2^n} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ (K)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \text{ (K)} \quad (\text{по теореме 1})$$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^n}{\sin \frac{2}{n}}$; $a_n = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^n}{\sin \frac{2}{n}} \geq 0$

$$0 \leq \sin \frac{2}{n} \leq 1 : \quad \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^n}{\sin \frac{2}{n}} \geq \left(\frac{7}{3}\right)^n ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{3}\right)^n \text{ (D)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^n}{\sin \frac{2}{n}} \text{ (D)}$$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+\sqrt{n}}$; $a_n = \frac{2}{n+\sqrt{n}} \geq 0$

$$\frac{2}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{2}{n+n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ (D)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+\sqrt{n}} \text{ (D)} \quad (\text{по теореме 1})$$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2}{n}}{\left(\frac{7}{3}\right)^n}$; $a_n = \frac{\sin \frac{2}{n}}{\left(\frac{7}{3}\right)^n} \geq 0$

$$\frac{\sin \frac{2}{n}}{\left(\frac{7}{3}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)^n} = \left(\frac{3}{7}\right)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n \quad \textcircled{K}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2}{n}}{\left(\frac{7}{3}\right)^n} \quad \textcircled{K}$$

• зак Миттаг-Леблиц конвенцију река

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{2}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{\left(\frac{5}{2}\right)^n}$

реш а) $\textcircled{K}$

б) $\textcircled{K}$

в) $\textcircled{D}$

г) $\textcircled{K}$

• K4 [Поредба критеријум 2]

Нека је $a_n, b_n \geq 0$ за $n \geq n_0$. Ако постоји константа

лиме $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$, онда су редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ еквиовалентни (оба конвергентни или оба дивергентни)

• зак Миттаг-Леблиц конвенцију река

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

$a_n = \frac{1}{2n-1} > 0$

; упоређујемо са $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $b_n = \frac{1}{n}$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \textcircled{D}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \quad \textcircled{D}$ (Поредба 2)

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n)^2}} ; a_n = \frac{1}{\sqrt{n(1+n)^2}} \geq 0$

упорядуено ca $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} ; b_n = \frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(1+n)^2}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^3}{n^3 + 2n^2 + n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}} = 1 \neq 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ (K)} ; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n)^2}} \text{ (K)} \text{ (используем 2)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3 + 3n^2 + 4n + 5} ; a_n = \frac{n^2}{2n^3 + 3n^2 + 4n + 5} \geq 0$

упорядуено ca $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} ; b_n = \frac{1}{n} \geq 0$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{2n^3 + 3n^2 + 4n + 5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2n^3 + 3n^2 + 4n + 5} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ (B)} , \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3 + 3n^2 + 4n + 5} \text{ (D)} \text{ (используем 2)}$

р) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) ; a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \geq 0$

упорядуено ca $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1 \right)$

$$b_n = \frac{1}{n^2} \geq 0 ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ (K)} , \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \text{ (K)} \text{ (используем 2)}$

• доп. Упитати конвергенцију реда,

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-1}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$

реш а) (к) б) (к) в) (Д) г) (к)

• **K5** [Кوشيјев интегрални критеријум]

Ако је $a_n = f(n)$, где је ϕ -ја $f(x)$ ненегативна, опадајућа и непрекидна за $x \geq n \geq n_0$, онда су
 ред $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ еквиовалентни

• зап. Упитати конвергенцију реда $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n)}$

$$a_n = \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n)} ; \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$$

f - ненегативна, опадајућа, непрекидна ϕ -ја за $x \geq 3$

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_3^{\epsilon} \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_{\ln 3}^{\ln \epsilon} \frac{dt}{t \ln t} = \left\{ \begin{array}{l} \ln t = s \\ \frac{dt}{t} = ds \end{array} \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln \epsilon)} \frac{ds}{s} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \ln|s| \Big|_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln \epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} (\ln|\ln(\ln \epsilon)| - \ln|\ln(\ln 3)|) = \infty$$

(Кوشيјев интегрални)

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} \quad \text{Д} , \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n)} \quad \text{Д}$$

• дом Читати конвенцију тега

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2}$$

19

реш

(K)