

Rešenja zadataka sa pismenog ispita iz Matematike 2 jul 2014. godine

1. Važno je napomenuti da je bitno nacrtati skicu površine... Oblik jednačine date krive je:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3-x-2x^2}}$$

tako da je tražena površina:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{3-x-2x^2}} dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x - x^2\right)}} dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{4}\right) - \left(t - \frac{1}{4}\right)^2\right)}} \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dt}{\sqrt{2\left(\frac{25}{16} - t^2\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dt}{\sqrt{\left(\left(\frac{5}{4}\right)^2 - t^2\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{t}{\frac{5}{4}} \Big|_0^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Ako je imenilac kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$, preporučuje se uvođenje linearne smene:

$$x = t - \frac{b}{2a} \Rightarrow dx = dt$$

U ovom zadatku sprovedena je smena $x = t - \frac{1}{4} \Rightarrow t = x + \frac{1}{4}$ gde je $dx = dt$. Tražena zapremina iznosi:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{3 - x - 2x^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dt}{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - t^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dt}{\left(\frac{5}{4} - t\right)\left(\frac{5}{4} + t\right)} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{4} - t} + \frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{4} + t} \right) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{5} \left(-\ln \left| \frac{5}{4} - t \right| + \ln \left| \frac{5}{4} + t \right| \right) \Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\pi}{5} \ln \left| \frac{\frac{5}{4} + t}{\frac{5}{4} - t} \right| \Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\pi}{5} \left(\ln 4 - \ln \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{5} \ln \frac{8}{3} \end{aligned}$$

2. Neka je $z = z(r)$ gde je $r = \frac{u}{v}$, tada je:

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{-u}{v^2}$$

Dobijene parcijalne izvode primenimo u računanju:

$$\begin{aligned} u \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + v \cdot \frac{\partial z}{\partial v} &= u \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} + v \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} \\ &= u \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{1}{v} + v \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{-u}{v^2} \\ &= \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{u}{v} - \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{u}{v} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. Jednostavno se vidi da je $D_u = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nađimo potencijalne ekstreme, iz $\nabla u = 0$ dobijamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 + 3(4 - x - 2y)^2 \cdot (-1) = 3x^2 - 3(4 - x - 2y)^2 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 6y^2 + 3(4 - x - 2y)^2 \cdot (-2) = 6y^2 - 6(4 - x - 2y)^2 = 0\end{aligned}$$

Odakle sledi da je potrebno rešiti sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}x^2 - (4 - x - 2y)^2 &= 0 \\ y^2 - (4 - x - 2y)^2 &= 0\end{aligned}$$

Iz:

$$\begin{aligned}x^2 &= (4 - x - 2y)^2 \\ y^2 &= (4 - x - 2y)^2\end{aligned}$$

sledi da je $|x| = |y|$ odnosno da je $x = \pm y$. Neka je:

$x = y$, tada je:

$$y^2 = (4 - y - 2y)^2 \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1, y = 2$$

odakle se dobijaju dva potencijalna ekstrema $A_1(1, 1)$ i $A_2(2, 2)$.

$x = -y$, tada je:

$$y^2 = (4 + y - 2y)^2 \Rightarrow 0 = 2 - y \Rightarrow y = 2$$

odakle se dobija jedan potencijalni ekstrem $A_3(-2, 2)$.

Da bi odredili vrstu ekstrema potrebno je pronaći Hu :

$$H(u(x, y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 - 12y & 48 - 12x - 24y \\ 48 - 12x - 24y & 96 - 24x - 36y \end{bmatrix}$$

(a) U tački A_1 je:

$$H(A_1) = \begin{bmatrix} 24 - 12 \cdot 1 & 48 - 12 \cdot 1 - 24 \cdot 1 \\ 48 - 12 \cdot 1 - 24 \cdot 1 & 96 - 24 \cdot 1 - 36 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 36 \end{bmatrix}$$

$$Hu(A_1)_1 = |12| = 12 > 0$$

$$Hu(A_1)_2 = \det Hu(A_1) = 288 > 0$$

u $A_1(1, 1)$ je lokalni minimum.

(b) U tački A_2 je:

$$H(A_1) = \begin{bmatrix} 24 - 12 \cdot 2 & 48 - 12 \cdot 2 - 24 \cdot 2 \\ 48 - 12 \cdot 2 - 24 \cdot 2 & 96 - 24 \cdot 2 - 36 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -24 \\ -24 & -24 \end{bmatrix},$$

Jednostavnije je posmatrati matricu:

$$\begin{bmatrix} -24 & -24 \\ -24 & 0 \end{bmatrix},$$

gde su odgovarajuće determinante jednake $-24 < 0$ i $-24^2 < 0$, odakle zaključujemo da se u ovoj tački ne dostiže ekstremna vrednost.

(c) U tački A_3 je:

$$H(A_1) = \begin{bmatrix} 24 - 12 \cdot 2 & 48 - 12 \cdot (-2) - 24 \cdot 2 \\ 48 - 12 \cdot (-2) - 24 \cdot 2 & 96 - 24 \cdot (-2) - 36 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 108 \end{bmatrix},$$

Jednostavnije je posmatrati matricu:

$$\begin{bmatrix} 108 & 24 \\ 24 & 0 \end{bmatrix}$$

gde su odgovarajuće determinante jednake $108 > 0$ i $-24^2 < 0$, odakle zaključujemo da se ni u ovoj tački ne dostiže ekstremna vrednost.

4. Posle transformisanja:

$$y - xy' + x^2 \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = x \operatorname{tg} x$$

dobijamo linearnu nehomogenu diferencijalnu jednačinu prvog reda, $y' + p(x)y = q(x)$ čije

je opšte rešenje:

$$\begin{aligned}y_{or} &= e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[c + \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx \right] \\&= e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot \left[c + \int q(x) \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right] \\&= e^{\ln x} \cdot \left[c + \int q(x) \cdot e^{-\ln x} dx \right] \\&= x \cdot \left[c + \int q(x) \cdot \frac{1}{x} dx \right] \\&= x \cdot \left(c + \int x \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\&= x \cdot \left(c + \int \operatorname{tg} x dx \right) \\&= x \cdot \left(c - \ln(\cos x) \right)\end{aligned}$$

Kako za $x = \frac{\pi}{2}$ dobijeni izraz nije definisan (kao ni sama jednačina), za ovu vrednost argumenta nikakvo rešenje (pa ni partikularno) nije definisano.

prof. dr Slobodan Radojević
doc. dr Aleksandar Pejčev