Rešenja zadataka (Grupa 1.)

1. Jednačina prave kroz tačke A i B je

$$\frac{x-3}{1-3}=\frac{y-2}{1-2},$$

odakle se (izjednačavanjem prethodnog izraza sa t) dobija parametarski oblik jednačine te prave

$$x=3-2t,\ y=2-t.$$

Ako uvrstimo tačku A u ovaj izraz imamo

$$3=3-2t,\ 2=2-t,$$

odakle sledi $t=0$, a ako uvrstimo tačku B imamo

$$1=3-2t,\ 1=2-t,$$

odakle dobijamo $t=1$, pa je parametrizacija duži AB

$$x=3-2t,\ y=2-t,\quad 0\le t\le 1.$$

Odavde je

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}dt=\sqrt{5}dt$$

i

$$\int_C(x-y)ds=\int_0^1((3-2t)-(2-t))\sqrt{5}dt=\sqrt{5}\int_0^1(1-t)dt=\sqrt{5}\left[t-\frac{t^2}{2}\right]\Big|_0^1=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

2. Iz

$$\frac{dx+dy+dz}{2y-z+z-x+x-2y}=\frac{dx}{2y-z},$$

tj.

$$\frac{dx+dy+dz}{0}=\frac{dx}{2y-z},$$

dobijamo

$$dx+dy+dz=0.$$

Integracijom poslednje jednakosti dobijamo jedan prvi integral datog sistema $x^2+y^2+z^2=C_1$.

Iz

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{2xy-xz+yz-xy+xz-2yz}=\frac{dy}{z-x},$$

tj.

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{y(x-z)}=\frac{dy}{z-x},$$

dobijamo

$$xdx + 2ydy + zdz = 0.$$

Integracijom poslednje jednakosti dobijamo drugi prvi integral datog sistema $x^2 + 2y^2 + z^2 = C_2$.
Sada je opšte rešenje datog sistema diferencijalnih jednačina:

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1, \quad x^2 + 2y^2 + z^2 = C_2.$$

3. Polje $\vec{A}$ možemo zapisati kao

$$\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2z^2 + y^2z^2 + z^4), \frac{\partial}{\partial y}(x^2z^2 + y^2z^2 + z^4), \frac{\partial}{\partial z}(x^2z^2 + y^2z^2 + z^4) \right)$$

$$= (2xz^2, 2yz^2, 2x^2z + 2y^2z + 4z^3).$$

Fluks datog vektorskog polja je (primenjujemo formulu Gaus-Ostrogradskog)

$$\Phi_\Gamma(\vec{A}) = \iint\limits_\Gamma 2xz^2dydz + 2yz^2dzdx + (2x^2z + 2y^2z + 4z^3)dxdy$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^2z + 2y^2z + 4z^3) \right) dxdydz$$

$$= \iiint\limits_T (2z^2 + 2z^2 + 2x^2 + 2y^2 + 12z^2)dxdydz = 2\iiint\limits_T (x^2 + y^2 + 8z^2)dxdydz.$$

Ovde je sa Γ označena data sfera, a sa T njena unutrašnjost (uključujući i granicu),

$$T: \; x^2 + y^2 + z^2 \le 1.$$

Prelaskom na sferne koordinate

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta,$$

telo T transformišemo u telo

$$U: \; \rho^2 \le 1,$$

pri čemu dobijamo granice $\rho|_0^1$, $\varphi|_0^{2\pi}$, $\theta|_0^\pi$, a jakobijan je $J = \rho^2\sin\theta$.
Dalje je

$$\Phi_\Gamma(\vec{A}) = 2\iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2 + 7z^2)dxdydz = 2\iiint\limits_U (\rho^2 + 7\rho^2\cos^2\theta)\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (1+7\cos^2\theta)\sin\theta d\theta \int_0^1 \rho^4 d\rho = dt$$

$$= 2\cdot\varphi|_0^{2\pi}\cdot\int_1^{-1}(1+7t^2)(-dt)\cdot\left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^1 = 2\cdot 2\pi\cdot\int_{-1}^1(1+7t^2)dt\cdot\frac{1}{5} = \frac{4\pi}{5}2\int_0^1(1+7t^2)dt$$

$$= \frac{8\pi}{5}\left.\left[t + 7\frac{t^3}{3}\right]\right|_0^1 = \frac{16\pi}{3}.$$

4. Koriste se formule za rotor i divergenciju vektorskog polja. Dobija se $rot\,\vec{v} = 0$ i $div\,\vec{v} = 20x^3y \neq 0$, kad god je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Dakle, polje je potencijalno.

Rešenja zadataka (Grupa 2.)

1. Imamo da je $\int_C (y-x)\,ds = -\int_C (x-y)\,ds = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, na osnovu rezultata istog zadatka za 1. grupu i činjenice da krivolinijski integral 1. vrste ne zavisi od orijentacije krive.

2. Opšte rešenje datog sistema diferencijalnih jednačina je:

$$x^2+y^2+z^2=C_1, \quad x^2+y^2+2z^2=C_2.$$

Dobija se na sličan način kao u zadatku **2.** za 1. grupu. U odnosu na taj zadatak ovde smo zamenili: x sa y, y sa z i z sa x.

3. Ako se u ovom zadatku zameni: x sa y, y sa z i z sa x, zadatak se svodi na isti zadatak 1. grupe, pa je rešenje $\dfrac{16\pi}{3}$.

4. Koriste se formule za rotor i divergenciju vektorskog polja. Dobija se $rot\,\vec{v}=0$ i $div\,\vec{v}=90x^8y\neq 0$, kad god je $x\neq 0$ i $y\neq 0$. Dakle, polje je potencijalno.