Diferencijalne jednačine višeg reda (dodatak predavanjima i vežbama)

Zadaci

1. (Zadatak sa kolokvijuma) Rešiti diferencijalne jednačine:
   a) $y'''e^{2x} - 1 = 0$; b) $\sin y'' + y'' = x$.

2. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine:
$$xy'' = y' + x\sin\frac{y'}{x}.$$
   Da li postoje singularna rešenja?

3. Naći opšte rešenje DJ 2.reda $\dfrac{y''}{y'} + \dfrac{2yy'}{1+y^2} = 0$.

4. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $2y'^2 + yy'' = 0$ i naći ono partikularno rešenje koje ispunjava $y(0) = 0$ i $y'(1) = 1$. Da li postoje singularna rešenja? .

Uputstva i konačni odgovori

1. a) Ukoliko izrazimo y''', imamo $y'''(x) = e^{-2x}$ i stoga
$$\begin{aligned}
y'' &= \int y'''\,dx = \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C_1,\\
y' &= \int y''\,dx = \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{-2x} + C_1x + C_2,\\
y &= \int y'\,dx = \int\left(\frac{1}{4}e^{-2x} + C_1x + C_2\right)dx = -\frac{1}{8}e^{-2x} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.
\end{aligned}$$

   b) U ovom slučaju nije moguće eksplicitno izraziti y'' preko x, tako da smo prinudjeni da parametrizujemo: $y'' = t$, $\sin t + t = x$, odakle je $dx = (\cos t + 1)\,dt$ i onda (analogno kao u delu pod a))
$$\begin{aligned}
y' &= \int y''\,dx = \int t(\cos t + 1)\,dt = t\sin t + \cos t + \frac{t^2}{2} + C_1,\\
y &= \int y'\,dx = \int\left(t\sin t + \cos t + \frac{t^2}{2} + C_1\right)(\cos t + 1)\,dt\\
&= \frac{1}{2}\int t^2\cos t + \int t\,(\sin t\cos t + \sin t)\,dt + \int \cos^2 t\,dt + (C_1+1)\int \cos t\,dt + \int\left(\frac{1}{2}t^2 + C_1\right)dt\\
&= \frac{1}{2}t^2\sin t - \int t\sin t\,dt + \int t\left(\frac{1}{2}\sin 2t + \sin t\right)dt + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + (C_1+1)\sin t + \frac{t^3}{6} + C_1t + C_2\\
&= \ldots
\end{aligned}$$

Podrazumeva se da su studenti upućeni u računanje ovakvih integrala uz pomoć parcijalne integracije.

2. Zadata jednačina ne sadrži nepoznatu funkciju y, tako da prvi snižavamo red - uvodimo novu nepoznatu funkciju $z = z(x)$, za koju važi:

$$y' = z, \;\; y'' = z'.$$

Dobijamo homogenu diferencijalnu jednačinu prvog reda, čije je opšte rešenje

$$z = 2\left(x \arctan(C_1 x) + k\pi\right),$$

odakle integracijom dobijamo da je opšte rešenje polazne jednačine

$$y = \left(x^2 + \frac{1}{C_1^2}\right)\arctan(C_1 x) + k\pi x^2 - \frac{1}{C_1}x + C_2.$$

Singularna rešenja su

$$y = \frac{k\pi}{2}x^2 + C \quad (k \in \{0, \pm 1, \pm 2 \ldots\}),$$

gde je k neparan ceo broj.

3. $\dfrac{y^3}{3} + y = C_1\, x + C_2$ (uvesti smenu $y' = z(y)$, ima još načina...).

4.
$$\frac{y^3}{3} = C_1 x + C_2, \quad y_p(x) = 3x^{1/3}.$$

Nema singularnih rešenja.

Aleksandar Pejčev,

Mašinski fakultet u Beogradu