Đurđica Takači
Stojan Radenović

MATEMATIKA 1
za inženjere

AKADEMSKA MISAO
Beograd, 2002.

Đurđica Takači
Stojan Radenović

MATEMATIKA 1
za inženjere

Recenzenti
Dr Arpad Takači
Dr Ivan Aranđelović

Izdavač
AKADEMSKA MISAO
Bul. kralja Aleksandra 73, Beograd
tel./fax: 3218-354

Štampa
Contact line, Beograd

Tiraž
500 primeraka

ISBN 86-7466-074-6

NAPOMENA: Fotokopiranje ili umnožavanje na bilo koji način ili ponovno objavljivanje ove knjige - u celini ili u delovima - nije dozvoljeno bez prethodne izričite saglasnosti i pismenog odobrenja izdavača.

Predgovor

Knjiga "MATEMATIKA I ZA INŽENJERE" objavjuje se kao udžbenik za predmet **Matematika I** na Mašinskom fakultetu u Beogradu i predmet **Matematika** za studente hemije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Knjiga je pisana prema važećim programima ovih predmeta na navedenim fakultetima, a koji se izvodi u poslednjih nekoliko godina.

Program predmeta **Matematika I** na Mašinskom fakultetu u Beogradu koji se predaje u prvom i drugom semestru sa fondom časova od (3+3), odnosno (2+2), jedinstven je za sve profile (tj. odseke) i njegov cilj je da (zajedno sa programiranjem, matematikom II i matematikom III) obezbedi osnovno matematičko obrazovanje mašinskih inženjera i profesora fizike, profesora hemije, diplomiranog hemičara.

Način pisanja ove knjige predstavlja, pre svega, rezultat iskustva oba autora u tome kakva i kako prezentirana nastava omogućuje studentima prve godine kvalitetno i brzo ovladavanje novim oblastima matematike i navikavanje na univerzitetski nivo izlaganja. Rukovodeći se time odabrana je i takva koncepcija izlaganja da se sa što više primera objasni uvedeni pojam i argumentuje sadržaj teoreme.

Teorija je ilustrovana velikim brojem primera i zadataka, jer se bez pažljivog rešavanja zadataka i ne mogu savladati relativno složeni pojmovi matematičke analize. Nadamo se da će knjiga biti pristupačna studentima prve godine navedenih smerova, bez obzira na njihovo različito predznanje iz matematike uopšte, a i na objektivnu težinu ovog gradiva.

Knjiga je podeljena u pet glava. Svaka glava, odnosno odeljak počinje sa pregledom osnovnih pojmova i tvrdjenja i njihovih dokaza. Posle toga dati su, primeri i zadaci koji su, u principu, poredjani po srodnosti i težini. Njihov najveći broj je detaljno rešen; naravno, preporučujemo čitaocima da data rešenja koriste tek posle pokušaja rešavanja.

Izvestan broj zadataka je bio dat na pismenim ispitima na Mašinskom fakultetu, u Beogradu, Prirodno-matematičkom, Tehnološkom, Poljoprivrednom fakuletu, kao i na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu.

Prijatna nam je dužnost da se zahvalimo recenzentima:

dr Arpadu Takačiju, redovnom profesoru Prirodno matematičkog fakulteta u Novom Sadu i dr Ivanu D. Aranđeloviću, docentu Mašinskog fakulteta u Beogradu, koji su pažljivo pregledali rukopis i svojim savetima i primedbama bitno poboljšali kvalitet ove knjige.

-Matematika je nauka o veličinama sa njihovim očiglednim osobinama koje imaju konkretan smisao i vrednost; svaki odnos između matematičkih simbola odgovara odnosu između realnih stvari; matematičko rasuđivanje jednako je eksperimentu besprekorne tačnosti koji je ponovljen neograničen broj puta i treba da vodi do logički i materijalno tačnih zaključaka.

P. L. Čebišev - veliki ruski matematičar XIX veka

Unapred smo zahvalni svima koji nam pošalju svoje primedbe, odnosno ukažu na greške ili propuste u ovoj knjizi.

Konačno, zahvaljujemo se Univerzitetu u Novom Sadu, Prirodno–matematičkom fakultetu u Novom Sadu, posebno Institutu za matematiku, i Mašinskom fakultetu u Beogradu koji su nam pomogli pri tehničkoj obradi ove knjige.

Autori

Sadržaj

Glava 1

Uvod

1.1 Polje realnih brojeva

Najvažniji skup na kome se razvija diferencijalni i integralni račun je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. U toku školovanja, prvo se upoznajemo sa skupovima prirodnih, celih i racionalnih brojeva, koje označavamo redom sa $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$.
Najmanji prirodan broj je 1, a ostali se dobijaju iz osobine da ako je n u $\mathbb{N}$, tada je i njegov sledbenik $n+1$ takođe u $\mathbb{N}$.

Skup celih brojeva čine 0, svi prirodni brojevi i njima suprotni brojevi, tj. negativni celi brojevi. Racionalni brojevi su oni realni brojevi koji se mogu napisati u obliku količnika p/q, gde je p ceo, a q prirodan broj.

Iracionalni brojevi su oni realni brojevi koji nisu racionalni. Spomenimo sledeće iracionalne brojeve: $\sqrt{2} \approx 1,41421\ldots$ (dužina dijagonale jediničnog kvadrata), $\pi \approx 3,14159\ldots$ (količnik obima i prečnika bilo koje kružnice) i $e \approx 2,71828\ldots$ (baza prirodnih logaritama). Realni brojevi se geometrijski predstavljaju na brojnoj osi, tj. pravoj liniji na kojoj su određene dve tačke: jedna predstavlja koordinatni početak O i odgovara broju 0, i druga, obično desno od nje, koja odgovara broju 1. U stvari, postoji obostrano jednoznačno preslikavanje između realnih brojeva sa jedne i tačaka na brojnoj osi sa druge strane.

U ovoj glavi prikazaćemo aksiomatsko zadavanje realnih brojeva.

Posmatraćemo skup $\mathbb{R} = \{x,y,z,\ldots\}$ koji je zatvoren u odnosu na operacije *sabiranja* $(+)$ i *množenja* $(\cdot)$ (tj., i zbir i proizvod bilo koja dva elementa iz $\mathbb{R}$ je element skupa $\mathbb{R}$). Na osnovu sledeće tri aksiome:

(R1) $(\forall x,y,z \in \mathbb{R})\quad (x+y)+z = x+(y+z)$ (asocijativnost sabiranja);

(R2) $(\exists 0 \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\quad x+0 = 0+x = x$ (postojanje neutralnog elementa za sabiranje);

(R3) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists(-x) \in \mathbb{R})\quad (-x)+x = x+(-x) = 0$ (postojanje inverznog elementa za sabiranje),

skup $\mathbb{R}$ čini **grupu** u odnosu na sabiranje, a ako se doda i aksioma

(R4) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\quad x+y = y+x$ (komutativnost sabiranja),

tada $(\mathbb{R}, +)$ postaje **Abelova** ili **komutativna grupa**.

Na osnovu sledeće četiri aksiome, $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ postaje **komutativna grupa**:

(R5) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\quad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ (asocijativnost množenja);

(R6) $(\exists 1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\})\ (\forall x \in \mathbb{R})\quad x\cdot 1 = 1\cdot x = x$ (postojanje neutralnog elementa za množenje);

(R7) $(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})\ (\exists x^{-1} \in \mathbb{R}\setminus\{0\})\quad x^{-1}\cdot x = x\cdot x^{-1} = 1$ (postojanje inverznog elementa za množenje);

(R8) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\quad x\cdot y = y\cdot x$ (komutativnost množenja).

Prethodnih osam aksioma sa aksiomom

(R9) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\quad x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$, (distributivnost množenja u odnosu na sabiranje),

čine da struktura $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, tj., skup $\mathbb{R}$ u odnosu na operacije sabiranja i množenja, čini **polje**.

U skupu $\mathbb{R}$ definisana je i binarna relacija **manje ili jednako** $(\leq)$ pomoću sledećih pet aksioma:

(R10) $(\forall x \in \mathbb{R})\quad x \leq x$ (refleksivnost binarne relacije $\leq$);

(R11) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(R12) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\quad (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$ (antisimetrija binarne relacije $\leq$);

(R13) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\quad x \leq y \vee y \leq x$ (uporedivost);

(R14) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\quad x \leq y \Rightarrow (x+z \leq y+z)$ (kompatibilnost relacije $\leq$ u odnosu na sabiranje);

(R15) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\quad (0 \leq x \wedge 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x\cdot y$ (kompatibilnost relacije $\leq$ u odnosu na množenje);

Prethodnih petnaest aksioma definišu skup $\mathbb{R}$ sa operacijama sabiranja i množenja i relacijom $\leq$ kao **uređeno polje**. Konačno, imamo aksiomu

(R16) Neka su X i Y dva neprazna podskupa skupa $\mathbb{R}$ sa osobinom $(\forall x \in X)\ (\forall y \in Y)\quad x \leq y$. Tada postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $(\forall x \in X)\ (\forall y \in Y)\quad x \leq c \leq y$.

Ovih šesnaest aksioma određuju $\mathbb{R}$ kao **kompletno uređeno polje**. Primetimo da skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ zadovoljava prvih petnaest, ali ne i zadnju šesnaestu, aksiomu.

Neka su x i y dva realna broja. Ako je $x \leq y$, tada još pišemo $y \geq x$. Binarna relacija "$\geq$" je relacija poretka, kao što je i relacija $\leq$. Ako vazi $x \leq y$ i $x \neq y$, tada pišemo $x < y$. Takođe imamo po definiciji $x > y \iff y < x$.

Uvedimo još neke pojmove vezane za skup realnih brojeva.

a) Broj $d \in \mathbb{R}$ je **donje ograničenje** nepraznog skupa $X \subset \mathbb{R}$, ako važi $(\forall x \in X)\ x \geq d$.

b) Skup $X \subset \mathbb{R}$ je **ograničen odozdo**, ili sa donje strane, ako ima bar jedno donje ograničenje.

c) Najveće donje ograničenje skupa $X \subset \mathbb{R}$ (ili: **infimum** skupa X) je broj $i \in \mathbb{R}$ za koji važe uslovi:

   $(\forall x \in X)\quad x \geq i$ (tj. i je donje ograničenje skupa X);

   $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in X)\quad x < i + \varepsilon$.

d) Infimum skupa $X \subset \mathbb{R}$ koji pripada skupu X se naziva **minimum** skupa X.

e) Broj $g \in \mathbb{R}$ je **gornje ograničenje** nepraznog skupa $X \subset \mathbb{R}$ ako važi

$$(\forall x \in X)\quad x \leq g.$$

f) Skup $X \subset \mathbb{R}$ je **ograničen odozgo**, ili sa gornje strane, ako ima bar jedno gornje ograničenje.

g) Najmanje gornje ograničenje skupa $X \subset \mathbb{R}$ (ili: **supremum** skupa X) je broj $s \in \mathbb{R}$ za koji važe uslovi:

   $(\forall x \in X)\quad x \leq s$ (tj. s je gornje ograničenje skupa X);

   $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in X)\quad x > s - \varepsilon$.

h) Supremum skupa $X \subset \mathbb{R}$ koji pripada skupu X se naziva **maksimum** skupa X.

i) Skup $X \subset \mathbb{R}$ je **ograničen** ako je ograničen i sa donje i sa gornje strane.

Aksioma R16 se često zamenjuje sledećom, ekvivalentnom, aksiomom:

(R16') Svaki sa gornje (respektivno donje) strane ograničen neprazan podskup skupa realnih brojeva ima supremum (respektivno infimum).

Važni podskupovi skupa $\mathbb{R}$ su **intervali** sa krajnjim tačkama a i b, gde je $a < b$.

Otvoren interval je $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

Zatvoren interval je $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

Intervali su i skupovi $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ i $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Primetimo da su svi ovi intervali ograničeni.

Neograničeni intervali su sledeći skupovi:

$(a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} | \ x > a\}$ i $[a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} | \ x \geq a\}$;
$(-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} | \ x < b\}$ i $(-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} | \ x \leq b\}$;
$(-\infty,+\infty) := \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

1.1.1 Skupovi brojeva

Prirodni brojevi
Skup **prirodnih brojeva** $\mathbb{N}$ je najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ koji sadrži 1 i koji ima osobinu da ako $n \in \mathbb{N}$, tada i $n+1 \in \mathbb{N}$. Na osnovu ove definicije važi princip matematičke indukcije, koji se često koristi kada treba pokazati tačnost neke formule za sve prirodne brojeve.
Princip matematičke indukcije. Ako je podskup E skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ takav da
$1 \in E$;
ako $n \in E$, tada i $n+1 \in E$,
tada je $E = \mathbb{N}$, tj. skup E se poklapa sa skupom $\mathbb{N}$.
Često se koristi i skup $\mathbf{N_0} := \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Celi brojevi
Skup **celih brojeva**, $\mathbb{Z}$, sadrži sve prirodne brojeve, 0, kao i brojeve oblika $-n$, $n \in \mathbb{N}$, koji su inverzni (ili: suprotni) prirodnim brojevima u odnosu na operaciju sabiranja. Primetimo da operacija "$-$", *oduzimanje*, definisana sa $b-a := b+(-a)$, izvodi iz skupa prirodnih brojeva, ali je dobro definisana u $\mathbb{Z}$ (tj., razlika dva cela broja je ceo broj). Skup $\mathbb{Z}$ je komutativna grupa u odnosu na sabiranje.

Racionalni brojevi
Skup **racionalnih brojeva**, $\mathbb{Q}$, sadrži sve elemente oblika $p \cdot q^{-1}$, gde $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$, i njegove elemente obično nazivamo **razlomcima**. Operacija "/", *deljenje*, definisana sa $a/b := a \cdot b^{-1}$, $b \neq 0$, izvodi iz skupa celih brojeva, ali je dobro definisana u $\mathbb{Q}$. Skup $\mathbb{Q}$ je komutativna grupa u odnosu na sabiranje, dok je skup $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ komutativna grupa u odnosu na množenje.

Iracionalni brojevi
Kako je već rečeno, **iracionalni brojevi** su oni realni brojevi koji nisu racionalni. Realan broj napisan u decimalnom obliku je iracionalan ako i samo ako ima beskonačno mnogo decimala različitih od nule, koje se ne ponavljaju periodično. Može se pokazati da se aksioma R16, odnosno R16', može zameniti sa konjunkcijom dve važne teoreme: Arhimedove i Kantorove.

1.1. Arhimedova teorema.
Za dva realna broja $x > 0$ i y postoji prirodan broj n takav da važi $nx > y$.

1.2. Kantorova teorema.
Neka je dat zatvoren interval $[a_n, b_n]$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i neka za $m > n$ važi

$$[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n], \quad tj. \quad a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n. \quad Tada\ je \ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

1.1.2 Apsolutna vrednost

1.3. Definicija. Apsolutna vrednost *realnog broja x je data sa* $|x| = \begin{cases} x, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

Neposredna posledica ove definicije je da za svaki realan broj x važi

$$|x| = |-x| \quad \text{i} \quad -|x| \leq x \leq |x|.$$

Apsolutna vrednost realnog broja je uvek nenegativan broj i predstavlja **rastojanje** između datog broja x i 0. Rastojanje između dva realna broja x i y definiše se kao $|x-y|$. Ako je ε pozitivan realan broj, tada važi

$|x| < \varepsilon$ ako i samo ako je $-\varepsilon < x < \varepsilon$;
$|x| > \varepsilon$ ako i samo ako je $x > \varepsilon$ ili $x < -\varepsilon$;
$|x| = \varepsilon$ ako i samo ako je $x = \varepsilon$ ili $x = -\varepsilon$.

1.4. Primer. *Pokazati da za proizvoljne realne brojeve x i y važe sledeće osobine:*

a) $|x+y| \leq |x| + |y|$; **b)** $|x-y| \geq \Big||x| - |y|\Big|$; **c)** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; **d)** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$.

Rešenja.

a) Sabiranjem nejednakosti $-|x| \leq x \leq |x|$ i $-|y| \leq y \leq |y|$, dobijamo

$$-(|x| + |y|) \leq x+y \leq |x| + |y| \quad \text{ili} \quad |x+y| \leq |x| + |y|.$$

b) Na osnovu osobine dokazane pod a) imamo

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \quad \text{i} \quad |y| = |y-x+x| \leq |-(x-y)| + |x|.$$

Odatle je

$$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y| \Rightarrow \Big||x| - |y|\Big| \leq |x-y|.$$

Relacije **c)** i **d)** slede neposredno iz definicije apsolutne vrednosti. ▶

Radi kraćeg pisanja koristi se oznaka

$$\sum_{k=1}^{n} x_k := x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ proizvoljni realni brojevi. Ostavljamo čitaocu da pokaže da za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ važi sledeća nejednakost: $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$.

1.1.3 Princip matematičke indukcije

1.5. Primer. *Korišćenjem principa matematičke indukcije pokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ važe sledeće formule.*

a) $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

b) $1+3+5++\cdots+(2n-1) = n^2$;

c) $1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

d) $1+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

e) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;

f) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

Rešenja.

a) Za 1 imamo tačnu formulu $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$. Pod pretpostavkom da je formula tačna za n:

$1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

što znači da je formula tačna i za $n+1$. Na osnovu principa matematičke indukcije sada možemo tvrditi da je formula tačna za sve prirodne brojeve.

b) Za 1 imamo tačnu formulu $1 = 1$. Pod pretpostavkom da je formula tačna za n:

$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)+(2m+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2,$$

što daje tačnost i za $n+1$.

c) Za 1 imamo tačnu formulu $1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$. Pod pretpostavkom da je formula tačna za n:

$1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, dobijamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},\end{aligned}$$

tj. tačnost i za $n+1$.

d) Za 1 imamo tačnu formulu $1 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$. Pod pretpostavkom da je formula tačna za n:

$1+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, dobijamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},\end{aligned}$$

odnosno, formula je tačna i za $n+1$.

e) Za 1 imamo $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$. Pod pretpostavkom da je formula tačna za n:

$\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},$$

što znači tačnost i za $n+1$.

f) Za 1 imamo $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$. Pod pretpostavkom da je formula tačna za n

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$, dobijamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3},\end{aligned}$$

tj. tačnost formule i za $n+1$. ▶

1.6. Primer. *Pokazati da je zbir prvih n članova geometrijske progresije sa prvim elementom a i količnikom $q \neq 1$ jednak*

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Rešenje. Za 1 je $a = a\dfrac{1-q}{1-q}$. Pod pretpostavkom da je formula tačna za n:

$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1} = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$ važi

$$\begin{aligned}a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+aq^n &= a\frac{1-q^n}{1-q}+aq^n = a\frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} \\ &= a\frac{1-q^{n+1}}{1-q},\end{aligned}$$

tj. formula je tačna i za $n+1$. ▶

1.7. Bernulijeva nejednakost.
Primenom matematičke indukcije pokazati Bernulijevu nejednakost

$$(1+h)^n > 1+nh, \quad za \quad n \geq 2, \quad h > -1, \quad h \neq 0.$$

Rešenje. Za 2 važi $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h$, jer je h^2 pozitivan broj. Pod pretpostavkom da je nejednakost tačna za $n \geq 2$, $(1+h)^n > 1+nh$, tada iz prethodne nejednakosti sledi (zbog $1+h>0$) :

$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n \cdot (1+h) > (1+nh)(1+h) = 1+nh+h+nh^2 > 1+(n+1)h$,
tj. formula je tačna i za $n+1$, jer je $nh^2 > 0$.

Primetimo da za $n = 1$ data nejednakost nije tačna, jer tada važi $1+h = 1+h$. Zapravo je

$$(1+h)^n \geq 1+nh, \quad za \quad n \in \mathbb{N}, \; h > -1. \; \blacktriangleright$$

1.1.4 Binomna formula

Ako je n prirodan broj, sa $n!$ (čita se: n faktorijel) se označava proizvod svih prirodnih brojeva od n do 1, tj. $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$. Po definiciji uzimamo $0! = 1$.

Po definiciji **binomni koeficijent**je je $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbf{N_0}$, $0 \leq k \leq n$,

1.8. Primer. *Na osnovu* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbf{N_0}$, $0 \leq k \leq n-1$, *pokazati* **binomnu formulu**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad a,b \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Rešenje. Za 1 formula (1.1) postaje tačna jednakost
$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^{1-1} + \binom{1}{1} a^{1-1} b^{1-0}$. Pod pretpostavkom da je formula (1.1) tačna za n, iz a) dobijamo

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right)(a+b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k,\end{aligned}$$

što daje tačnost za $n+1$. $\blacktriangleright$

1.2 Polje kompleksnih brojeva

Skup **kompleksnih brojeva** $\mathbb{C}$ je skup svih uređenih parova (a,b) realnih brojeva, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Dva kompleksna broja data sa (a_1,b_1), $(a_2,b_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ su jednaka ako i samo je $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$.
Za bilo koja dva kompleksna broja data sa (a,b), $(c,d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definišimo
operaciju **sabiranja** $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$;
operaciju **množenja** $(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c - b\cdot d, a\cdot d + b\cdot c)$.

Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, sa gore definisanim sabiranjem i množenjem, čini polje.

Podskup skupa kompleksnih brojeva čiji su elementi uređeni parovi $(a,0), a \in \mathbb{R}$, identifikujemo sa skupom realnih brojeva, odnosno par $(a,0)$ identifikujemo sa a.

Kompleksan broj $(0,1)$ nazivamo **imaginarna jedinica** i označavamo sa i. Znači,

$$i = (0,1).$$

Uređen par $(0,1)$ ima osobinu da je

$$(0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0), \qquad \text{ili } i^2 = -1.$$

Jednačina $x^2+1=0$ nema rešenja u skupu realnih brojeva. Naime, kvadrat bilo kog realnog broja je nenegativan broj, pa je i $x^2+1>0$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Rešenja jednačine $x^2+1=0$ su kompleksni brojevi $x_1 = (0,1) = i$ i $x_2 = (0,-1) = -i$.

Kompleksne brojeve (a,b) možemo zapisati kao $a+bi$. Broj a nazivamo **realni deo kompleksnog broja** $a+ib$, a broj b nazivamo **imaginarni deo kompleksnog broja** $a+ib$.

Zbir dva kompleksna broja je $(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$.

Razlika dva kompleksna broja je $(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2) = (x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$.

Množenje kompleksnih brojeva vrši se po pravilima množenja binoma binomom, odnosno $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$, pri čemu je $i^2=-1$.

Količnik kompleksnih brojeva $z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{x_1x_2-y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$, ako $x_2 \neq 0$, ili $y_2 \neq 0$.

Na primer, za $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 1-2i$, $z_3 = 3+5i$ i $z_4 = 3-5i$, imamo

$z_1+z_2 = 1+2i+(1-2i) = 2, \qquad z_3+z_4 = 3+5i+(3-5i) = 6,$

$z_1-z_2 = 1+2i-(1-2i) = 4i, \qquad z_3-z_4 = 3+5i-(3-5i) = 10i,$

$$5z_1+\frac{z_2}{3}-6z_3-\frac{z_4}{2}=5(1+2i)+\frac{1-2i}{3}-6(3+5i)-\frac{3-5i}{2}=-\frac{85}{6}-\frac{109}{6}i,$$
$$z_1z_3=(1+2i)(3+5i)=-7+11i, \qquad z_2z_4=(1-2i)(3-5i)=-7-11i,$$
$$z_3z_4=(3+5i)(3-5i)=34,$$
$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{1+2i}{3+5i}=\frac{13}{34}-\frac{1}{34}i, \qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{1-i}=i,$$
$$\frac{z_3}{z_4}=\frac{3+5i}{3-5i}=-\frac{8}{17}+\frac{15}{17}i, \qquad \frac{z_3}{z_4}z_2=\frac{3+5i}{3-5i}(1-2i)=\frac{22}{17}+\frac{31}{17}i.$$

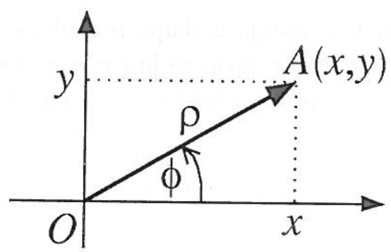
Primetimo da je $i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=1,\ldots$, odnosno
$$i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1,\quad i^{4k+3}=-i,\quad k\in\mathbb{Z}.$$
U skupu kompleksnih brojeva **ne može se uvesti relacija poretka** $\geq$.

Kompleksan broj $a-bi$ se naziva **konjugovano kompleksan broj** kompleksnog broja $z=a+bi$ i označava se sa $\bar{z}=a-bi$.

Zbir dva konjugovano kompleksna broja je realan broj, jer je $(a+bi)+(a-bi)=2a$.

Proizvod dva konjugovano kompleksna broja je takođe realan broj, jer je $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$.

Kompleksan broj $z=x+iy$ određen je uređenim parom (x,y) realnih brojeva, pa se



Slika 1.1.

tako svakom kompleksnom broju $x+iy$ može jednoznačno pridružiti tačka $A(x,y)$ u $xy-$ravni , i obrnuto, svakoj tački u $xy-$ravni odgovara samo jedan kompleksan broj.

Posmatraćemo u Dekartovom koordinatnom sistemu proizvoljnu tačku $A, A\neq O$, sa koordinatama $(x,y)\neq(0,0)$. Označićemo sa ρ dužinu duži OA, a sa ϕ ugao koji poluprava određena tačkama O i A zaklapa sa pozitivnim smerom $x-$ose (slika 1.1). Veza između ρ i ϕ preko x i y data je sa
$$x=\rho\cos\phi, \qquad y=\rho\sin\phi. \tag{1.2}$$

Dužina ρ naziva se **moduo** kompleksnog broja $x+iy$, a ugao ϕ **argument** kompleksnog broja $z=x+iy$, u oznaci $\phi=\arg z\in[0,2\pi)$ (glavna vrednost argumenta).

Prema tome, kompleksan broj z se može zapisati:

u **trigonometrijskom obliku** kao $\quad z=\rho(\cos\phi+i\sin\phi).$ (1.3)

u **eksponencijalnom obliku** kao $\quad z=\rho e^{i\phi}.$ (1.4)

Na primer, za kompleksan broj: 5, važi $\rho=5,\ \phi=0,\quad 5=5e^{0\cdot i}$;
i, važi $\rho=1,\ \phi=\pi/2,\quad i=e^{(\pi/2)\cdot i}$;
$i+1$ važi $\rho=\sqrt{2},\ \phi=\pi/4,\quad 1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
Ako su $z=a+bi$ i $\bar{z}=a-bi$ dva konjugovano kompleksna broja tada je
$$z\bar{z}=a^2+b^2=\rho^2.$$

1.9. Teorema. *Ako su dati kompleksni brojevi*
$z_1=\rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)$ *i* $z_2=\rho_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)$, *tada je*

a) $z_1z_2=(\rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1))(\rho_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2))=\rho_1\rho_2(\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2))$;

b) $\dfrac{\rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)}{\rho_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\phi_1-\phi_2)+i\sin(\phi_1-\phi_2))$;

c) $(\rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1))^n=\rho_1^n(\cos(n\phi_1)+i\sin(n\phi_1))$;

d) $\sqrt[n]{\rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)}=\sqrt[n]{\rho_1}\left(\cos\dfrac{\phi_1+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\phi_1+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,n-1.$

Formule **c)** i **d)** se nazivaju **Moavrove formule.**

Dokaz.

a) $(\rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1))(\rho_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2))$
$=\rho_1\rho_2(\cos\phi_1\cos\phi_2-\sin\phi_1\sin\phi_2+i(\cos\phi_1\sin\phi_2+\sin\phi_1\cos\phi_2))$
$=\rho_1\rho_2(\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2))$.

b) $\dfrac{\rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)}{\rho_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\dfrac{(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)(\cos\phi_2-i\sin\phi_2)}{\cos^2\phi_2+\sin^2\phi_2}$
$=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_1\sin\phi_2+i(\sin\phi_1\cos\phi_2-\cos\phi_1\sin\phi_2))$
$=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\phi_1-\phi_2)+i\sin(\phi_1-\phi_2))$. ▶

1.10. Primer. *Odrediti*

a) $(1+i)^3$; b) $(1+i\sqrt{3})^5$; c) $\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^7$.

Rešenja. Koristićemo Moavrovu formulu **c)** iz teoreme 1.9.

a) Na osnovu $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ je

$$(1+i)^3=(\sqrt{2})^3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=(\sqrt{2})^3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2+2i.$$

b) $(1+i\sqrt{3})^5=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^5=2^5\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2^5\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$=2^4(-1+i\sqrt{3}).$

c) Kako je $1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=2\cos^2\frac{\pi}{6}+2i\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}$ to je

$$\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^7=\left(2\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^7=\left(2\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^7$$

$$=(\sqrt{3})^7\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=3^{7/2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\frac{3^3\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i).$$ ▶

1.11. Primer. *Odrediti* **a)** $\sqrt[5]{4i}$; **b)** $\sqrt[4]{1-i}$; **c)** $\sqrt[5]{\sqrt{3}+3i}$.

Rešenja. Koristićemo Moavrovu formulu **d)** iz teoreme 1.9.

a) $\sqrt[5]{4i}=\sqrt[5]{4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}\right)$, za $k=0,1,2,3,4$.

Za $k=0$ je $\sqrt[5]{4i}=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\right)$.

Za $k=1$ je $\sqrt[5]{4i}=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{10}+i\sin\frac{5\pi}{10}\right)=\sqrt[5]{4}i$.

Za $k=2$ je $\sqrt[5]{4i}=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{9\pi}{10}+i\sin\frac{9\pi}{10}\right)$.

Za $k=3$ je $\sqrt[5]{4i}=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{10}+i\sin\frac{13\pi}{10}\right)$.

Za $k=4$ je $\sqrt[5]{4i}=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{17\pi}{10}+i\sin\frac{17\pi}{10}\right)$.

b) $\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[4]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}=\sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$, za $k=0,1,2,3$.

Za $k=0$ je $\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)$.

Za $k=1$ je $\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}\right)$.

Za $k=2$ je $\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16}+i\sin\frac{23\pi}{16}\right)$.

Za $k=3$ je $\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{16}+i\sin\frac{31\pi}{16}\right)$.

Ako stavimo dalje $k=4$ dobijamo $\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{39\pi}{16}+i\sin\frac{39\pi}{16}\right)$
$=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)$, što je isto kao i za $k=0$.

c) $\sqrt[5]{\sqrt{3}+3i}=\sqrt[5]{\sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt[5]{\sqrt{12}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}\right)$, za $k=0,1,2,3,4$.

Za $k=0$ je $\sqrt[5]{\sqrt{3}+3i}=\sqrt[10]{12}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$.

Za $k=1$ je $\sqrt[5]{\sqrt{3}+3i}=\sqrt[10]{12}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$.

Za $k=2$ je $\sqrt[5]{\sqrt{3}+3i}=\sqrt[10]{12}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$.

Za $k=3$ je $\sqrt[5]{\sqrt{3}+3i}=\sqrt[10]{12}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$.

Za $k=4$ je $\sqrt[5]{\sqrt{3}+3i}=\sqrt[10]{12}\left(\cos\frac{25\pi}{15}+i\sin\frac{25\pi}{15}\right)$. ▶

1.3 Funkcije

1.3.1 Osnovni pojmovi

1.12. Definicija. *Neka su A i B dva neprazna skupa. Pridruživanje (korespondencija, pravilo) f koje svakom elementu skupa A dodeljuje tačno jedan elemenat skupa B naziva se* **funkcija.**

Ekvivalentna prethodnoj definiciji je

1.13. Definicija. *Neka su A i B dva neprazna skupa. Relacija $f\subset A\times B$ je* **funkcija** *ako važe sledeća dva uslova*

i) $(\forall x\in A)\ (\exists y\in B)\ \ (x,y)\in f$;

ii) $((x,y_1)\in f\wedge(x,y_2)\in f)\Rightarrow y_1=y_2$.

U oba slučaja pišemo $f:A\to B$. Skup A naziva se **domen** ili **definicioni skup**, a skup B se naziva **kodomen** funkcije f. Ako $(x,y)\in f$, pisaćemo $y=f(x)$. Za veličinu $x\in A$ kažemo da je **nezavisno promenljiva** (ili: original), a za veličinu $y=f(x)\in B$ da je **zavisno promenljiva** (ili: slika).

Skup vrednosti funkcije f je skup
$f(A)=\{y\in B\,|\,\exists x\in A,\ y=f(x)\}$, što znači $f(A)\subset B$.

Mi ćemo posmatrati samo one funkcije čiji su i domen i kodomen neki podskupovi skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Takve funkcije se nazivaju **realne funkcije jedne realne promenljive,** a u ovoj knjizi ćemo ih zvati **funkcijama.**

Posledica definicije 1.13 jeste da su **dve funkcije** $f_1 : A_1 \to B_1$ i $f_2 : A_2 \to B_2$ **jednake** ako i samo ako imaju jednake domene, tj. $A_1 = A_2$, jednake kodomene, tj. $B_1 = B_2$, i, naravno, ako važi $f_1(x) = f_2(x)$ za sve $x \in A_1 = A_2$.

Na primer, funkcije $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$ i $g(x) = x$, $x \in (0, +\infty)$; su jednake, a funkcije $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ i $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ imaju različite skupove vrednosti, pa zato nisu jednake ($f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ i $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$).

Funkcije $f(x) = \ln x^4$, $x \neq 0$, $g(x) = 4\ln x$, $x \in (0, +\infty)$ nisu jednake.

Prema prethodnom, funkcija je zadata određivanjem cele trojke (A, B, f). Međutim, često je funkcija data samo analitičkim izrazom (formulom) $y = f(x)$, podrazumevajući pri tom skupove A i B kojima pripadaju nezavisna i zavisna promenljiva. Onaj podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ za koji data formula ima smisla, zvaćemo **prirodnim definicionim skupom** funkcije f.

1.14. Primer. *Odrediti prirodni definicioni skup D_f za sledeće funkcije:*

a) $f(x) = \sqrt{2x-5}$; b) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$; c) $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$; e) $f(x) = \dfrac{4}{x^4+4}$; f) $f(x) = \ln(x+1)$;

g) $f(x) = \ln(x^2+1)$; h) $f(x) = e^{1/(x+1)}$; i) $f(x) = e^{1/(x^2+1)}$.

Rešenja.

a) Kako je $2x - 5 \geq 0$ za $x \geq 5/2$, to je interval $D_f = [5/2, +\infty)$ prirodni definicioni skup za datu funkciju.

b) Dati izraz ima smisla za $9 - x^2 \geq 0$, tj. za $(3-x)(3+x) \geq 0$. Pošto je $3 - x \geq 0$ za $x \leq 3$ i $3 + x \geq 0$ za $x \geq -3$, to za $x \in [-3, 3]$ važi $9 - x^2 \geq 0$.

Međutim, iz nejednakosti

$$3 - x \leq 0 \text{ za } x \geq 3 \quad \text{i} \quad 3 + x \leq 0 \text{ za } x \leq -3$$

sledi da je skup x–ova za koje je u isto vreme $3 - x \leq 0$ i $3 + x \leq 0$ prazan.

Znači da važi $9 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-3, 3]$, a skup $[-3, 3]$ i jeste traženi prirodni definicioni skup D_f za funkciju f.

c) $D_f = \mathbb{R}$. d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

e) $D_f = \mathbb{R}$. f) $D_f = \{x \in \mathbb{R} | \ x + 1 > 0\} = (-1, +\infty)$.

g) $D_f = \mathbb{R}$. h) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. i) $D_f = \mathbb{R}$. ▶

Funkcija $f : A \to B$ sa osobinom da za svaki par x_1 i x_2 iz skupa A važi $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ zove se **injekcija** (ili funkcija **1 – 1**).

Funkcija $f : A \to B$ sa osobinom $(\forall y \in B)\,(\exists x \in A)\ \ f(x) = y$ zove se **surjekcija** (ili funkcija **na**).

Drugim rečima, funkcija f je surjekcija ako i samo ako je $f(A) = B$, tj. ako se njen skup vrednosti poklapa sa njenim kodomenom.

Funkcija $f : A \to B$ je **bijekcija** ako je i injekcija i surjekcija.

Na primer, funkcija $f : A \to B$ data sa

a) $f(x) = 3x + 2$, $A = B = \mathbb{R}$, jeste bijekcija;

b) $f(x) = 3x^2 + 2$, $A = B = \mathbb{R}$, nije ni injekcija ni surjekcija;

c) $f(x) = 3x^2 + 2$, $A = \mathbb{R}$, $B = [2, +\infty)$ nije injekcija, ali jeste surjekcija;

d) $f(x) = 3x^2 + 2$, $A = [5, 15]$, $B = \mathbb{R}$ jeste injekcija, ali nije surjekcija;

e) $f(x) = 3x^2 + 2$, $A = (0, +\infty)$, $B = (2, +\infty)$, jeste bijekcija.

Za dve funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$, funkcija $g \circ f : A \to C$, data sa

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad x \in A,$$

zove se **kompozicija** funkcija f i g, ili **složena funkcija** od f i g.

1.15. Primer. *Funkcije f i g su date sa*

a) $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - \sqrt{x}$; b) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x - 3$.

Odrediti složene funkcije $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ f)(x)$ i $(f \circ f \circ f)(x)$.

Rešenja.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x - \sqrt{x}) + 3 = 2x + 3 - \sqrt{x}$;
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x+3) - \sqrt{x+3} = 2x + 6 - \sqrt{x+3}$.
Primetimo da je, na primer, $(f \circ g)(1) = 4$ i $(g \circ f)(1) = 6$.
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x+3) + 3 = x + 6$;
$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x+6) = (x+6) + 3 = x + 9$.

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$;
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x^2+1) - 3 = 2x^2 - 1$;
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$;
$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x^4 + 2x^2 + 2) = (x^4 + 2x^2 + 2)^2 + 1 = x^8 + 4x^6 + 8x^4 + 8x^2 + 5.$$ ▶

Neka je funkcija $f : A \to B$ bijekcija. Tada za svako $y \in B$ postoji tačno jedan elemenat $x \in A$, takav da je $y = f(x)$, pa je relacija

$$f^{-1} := \{(y,x) \in B \times A \mid y = f(x)\}$$

funkcija sa domenom B i kodomenom A koja se naziva **inverzna funkcija** za f. Inverzna funkcija je takođe bijekcija i za nju važi

$$(\forall y \in B) \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Važe jednakosti $(\forall x \in A)\ f^{-1} \circ f(x) = x$ i $(\forall y \in B)\ f \circ f^{-1}(y) = y$.

1.16. Primer. *Odrediti inverznu funkciju g za datu funkciju f, gde je*

a) $f(x) = 3x+1,\ x \in (-\infty,+\infty)$;   b) $f(x) = x^2,\ x \in (-\infty,0)$;

c) $f(x) = x^2,\ x \in (0,+\infty)$;   d) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x},\ x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Rešenja.

a) Skup vrednosti date funkcije je interval $(-\infty,+\infty)$, što postaje definicioni skup za inverznu funkciju, pa iz $x = 3y+1$ (razmenom mesta x i y) sledi da je inverzna funkcija g za funkciju f data sa

$$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3},\ x \in (-\infty,+\infty).$$

b) $g(x) = f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, za $x \in (0,+\infty)$.

c) $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, za $x \in (0,+\infty)$.

d) Za $x = \dfrac{1-y}{1+y}$, posle sređivanja dobijamo inverznu funkciju $g(x) = f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Znači, za datu funkciju f važi da je $f(x) = g(x) = f^{-1}(x)$ za sve $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. ▶

Grafik funkcije $f : A \to B$ je podskup G_f skupa $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dat sa

$$G_f = \left\{ \left(x, f(x)\right) \,\middle|\, x \in A \right\}.$$

Skup $A \subset \mathbb{R}$ je **simetričan** (prema koordinatnom početku) ako za sve $x \in A$ važi da i $-x \in A$.

Funkcija $f : A \to B$, gde je skup A simetričan, je **parna,** ako važi

$$(\forall x \in A) \quad f(-x) = f(x).$$

(Geometrijski, to znači da je grafik parne funkcije osno simetričan u odnosu na y–osu.)

Funkcija $f : A \to B$, gde je skup A simetričan, je **neparna**, ako važi

$$(\forall x \in A) \quad f(-x) = -f(x).$$

(Geometrijski, to znači da je grafik neparne funkcije centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak.)

Funkcija može biti ili parna, ili neparna ili **ni parna ni neparna.**

1.17. Primer. *Ispitati parnost, odnosno neparnost sledećih funkcija na njihovim prirodnim domenima:*

a) $f(x) = x^2+1$;   b) $f(x) = \sin x + x$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$;   d) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

e) $f(x) = e^{x^2} + x^4 + 1$;   f) $f(x) = e^{1/x} + 3x$.

Rešenja.

a) Kako je za svako $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2+1 = x^2+1 = f(x)$, to je data funkcija f parna.

b) Pošto je za svako $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \sin(-x) + (-x) = -\sin x - x = -(\sin x + x) = -f(x),$$

to je funkcija f neparna.

c) Kako za svako $x \in \mathbb{R}$ važi:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2-x+1} - \sqrt{(-x)^2+x+1} - (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}) = -f(x),$$

to je funkcija f neparna.

d) Za $|x| < 1$ je

$$f(-x) = \ln\frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x) = -\ln\frac{1+x}{1-x} = -f(x),$$

pa je funkcija f neparna.

e) Za svako $x \in \mathbb{R}$ je $f(-x) = e^{(-x)^2} + (-x)^4 + 1 = f(x)$, pa je data funkcija parna.

f) Funkcija nije ni parna ni neparna, jer je, npr., $f(-1) = e^{-1} - 3 \neq e^1 + 3 = f(1)$, tj. f nije parna i, npr., $f(-2) = e^{-1/2} - 6 \neq -e^{1/2} - 6 = -f(2)$, tj. f nije neparna. ▶

Funkcija f je **ograničena** na skupu $X \subset A$ ako postoji $C > 0$ sa osobinom

$$(\forall x \in X) \quad |f(x)| \leq C.$$

Funkcija $f : A \to B$ je **periodična** na A ako postoji realan broj $\tau \neq 0$ sa osobinom

$$(\forall x \in A) \quad f(x+\tau) = f(x).$$

Broj τ se tada naziva **period** funkcije $f : A \to B$. **Osnovni period** funkcije f je najmanji pozitivni period te funkcije (ako postoji).

Na primer, funkcija $f(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \beta)$, $x \in \mathbb{R}$, uz uslove $A \neq 0$, $\alpha \neq 0$, je periodična sa osnovnom periodom $\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$. (Pokažite to!)

1.18. Primer. *Ispitati periodičnost sledećih funkcija na njihovim prirodnim domenima:*

a) $f(x) = 2\sin 5x$; b) $f(x) = \sin^2 x$;
c) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; d) $f(x) = \cos 3x + 3\sin 3x$.

Rešenja.

a) Funkcija je periodična sa osnovnom periodom $\frac{2\pi}{5}$.

b) Funkcija je periodična sa osnovnom periodom π, jer je $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, a funkcija $f(x) = \cos 2x$ je periodična sa periodom $2\pi/2 = \pi$.

c) Funkcija je periodična sa periodom π.

d) Funkcija je periodična sa periodom $\dfrac{2\pi}{3}$. ▶

Funkcija $f : A \to B$

raste na A, ako za svaki par x_1, x_2 tačaka iz skupa A važi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
ne opada na A, ako za svaki par x_1, x_2 tačaka iz skupa A važi$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

ne raste na A, ako za svaki par x_1, x_2 tačaka iz skupa A važi$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

opada na A, ako za svaki par x_1, x_2 tačaka iz skupa A važi$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Funkcija $f : A \to B$ ima

lokalni maksimum (respektivno **strogi lokalni maksimum**) u tački $x_0 \in A$ ako postoji broj $\varepsilon > 0$ sa osobinom da važi

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

$\Big($respektivno $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A) \wedge (x \neq x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0)\Big)$;

lokalni minimum (respektivno **strogi lokalni minimum**) u tački $x_0 \in A$ ako postoji broj $\varepsilon > 0$ sa osobinom da važi

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

$\Big($respektivno $(x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A) \wedge (x \neq x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0)\Big)$.

Za izraze "maksimum" i "minimum" koristi se i zajednički termin "ekstremna vrednost", ili, kraće, "ekstrem".

1.4 Elementarne funkcije

Osnovne elementarne funkcije su:

stepena funkcija: $f(x) = x^s$, $x \in (0, +\infty)$, za fiksno $s \in \mathbb{R}$ (specijalno za $s = 0$ data funkcija je *konstanta*);

eksponencijalna funkcija: $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i $a \neq 1$;

logaritamska funkcija: $f(x) = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$ $a > 0$ i $a \neq 1$;

trigonometrijske funkcije: $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$; $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | \, k \in \mathbb{Z}\}$;

inverzne trigonometrijske funkcije (sa eventualnom restrikcijom domena).

Elementarne funkcije se dobijaju primenom konačnog broja algebarskih operacija: sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja, kao i (konačno mnogo) operacija kompozicije, na osnovne elementarne funkcije.

1.5 Neke elementarne funkcije

1.5.1 Polinomi

Funkcija

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

gde su koeficijenti a_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, realni brojevi, naziva se **polinom** stepena $n \in \mathbb{N}$, ako je koeficijent $a_n \neq 0$. Po definiciji uzimamo da je *konstanta polinom nultog stepena.*

Dva polinoma su jednaka ako su istog stepena i ako su koeficijenti uz iste stepene jednaki.

Broj x_0 je **nula** polinoma $P_n(x)$ iz (1.5), ako je $P_n(x_0) = 0$. Ako je broj x_0 nula polinoma $P_n(x)$, koji je racionalan, realan odn. kompleksan broj, tu nulu ćemo zvati racionalnom, realnom odn. kompleksnom nulom tog polinoma.

1.19. Teorema. Osnovni stav algebre. *Za svaki polinom stepena $n \in \mathbb{N}$ postoji tačno n (realnih i/ili kompleksnih) nula, među kojima može biti i jednakih.*

Ako je x_0 realna nula polinoma $P_n(x)$, tada postoji polinom sa realnim koeficijentima $Q_{n-1}(x)$, gde je $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$, stepena $n-1$, tako da važi

$$P_n(x) = (x - x_0) Q_{n-1}(x). \tag{1.6}$$

Broj $x_0 \in \mathbf{R}$ je realna **nula** m**–tog reda** polinoma $P_n(x)$ iz (1.5), ako postoji polinom sa realnim koeficijentima $R_{n-m}(x)$, stepena $n-m$, takav da je $R_{n-m}(x_0) \neq 0$ i važi

$$P_n(x) = (x-x_0)^m R_{n-m}(x).$$

Uopšte, svaki se polinom $P_n(x)$ sa realnim koeficijentima, oblika (1.5), stepena n, može na jedinstven način napisati kao proizvod

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_r)^{m_r}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdots(x^2+b_sx+c_s)^{l_s}, \quad (1.7)$$

gde za prirodne brojeve m_j, $j=1,\ldots,r$, i prirodne brojeve l_k, $k=1,\ldots,s$, važi

$$n = m_1+\cdots+m_r+2(l_1+\cdots+l_s).$$

U relaciji (1.7) x_j su međusobno različite realne nule polinoma $P_n(x)$, reda m_j, $j=1,\ldots,r$, dok su nule kvadratnih trinoma $x^2+b_kx+c_k$, $k=1,\ldots,s$. konjugovano–kompleksne nule polinoma $P_n(x)$.

Naći **realne** nule polinoma iz (1.5) je, u opštem slučaju, složen zadatak. Što se tiče **racionalnih** nula tog polinoma, uz dodatni uslov da su svi koeficijenti a_j, $j=0,1,\ldots,n$, celi brojevi, važi sledeće jednostavno tvrđenje.

1.20. Teorema. *Neka je dat polinom $P_n(x)$ iz (1.5) sa celim koeficijentima. Ako je razlomak p/q nula polinoma $P_n(x)$, gde su $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi (tj. razlomak p/q se ne može uprostiti), tada važi:*

imenilac p je činilac slobodnog člana a_0;

brojilac q je činilac koeficijenta a_n.

Teorema 1.20 daje potencijalne racionalne nule datog polinoma sa celim koeficijentima. Postupak koji omogućava da se odrede koeficijenti $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ polinoma $Q_{n-1}(x)$ iz (1.6) i proveri da li su potencijalne vrednosti zaista nule datog polinoma, naziva se **Hornerova shema**.

Objasnićemo u opštem slučaju primenu Hornerove sheme. Neka je $x=x_0$ moguća racionalna nula datog polinoma, određena na osnovu teoreme (1.20). Stavimo (jedan od faktora izraza a_0/a_n).

$$b_{n-1}=a_n, \quad b_{n-2}=x_0b_{n-1}+a_{n-1},\ldots, \quad b_0=x_0b_1+a_1,$$

odnosno, u opštem slučaju,

$$b_k = x_0b_{k+1}+a_{k+1}, \quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Osim toga, neka je

$$r = x_0b_0+a_0.$$

Sada postoje dve mogućnosti:

(i) ako je $r=0$, tada je $x=x_0$ nula posmatranog polinoma;

(ii) ako je, međutim, $r\neq 0$, tada pretpostavljena vrednost $x=x_0$ nije nula posmatranog polinoma.

U praksi, to se proverava na sledeći način:

Prvo se ispišu **svi** koeficijenti datog polinoma, tj. uključujući i one koji su jednaki nuli. Na osnovu gornjih jednakosti za koeficijente b_k, $k=0,1,\ldots,n-1$, i broj r pravi se sledeća shema:

$$\begin{array}{ccccccc|c|c} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_k & \ldots & a_0 & & x=x_0 \\ & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_k & \ldots & b_0 & r & \end{array}$$

i primeni gornja analiza o odnosu brojeva r i 0.

1.21. Primer. *Odrediti racionalne nule sledećih polinoma:*

a) $P_2(x) = 2x^2+4x-6$;

b) $P_3(x) = x^3+3x^2-4x-12$;

c) $P_4(x) = 2x^4-13x^3+28x^2-23x+6$;

d) $P_5(x) = x^5-x^3+x^2-1$;

e) $P_7(x) = x^7+6x^5-5x^4+9x^3-10x^2+4x-5$.

Rešenje.

a) Dati polinom je drugog stepena, pa se nule mogu odrediti rešavanjem kvadratne jednačine po formuli

$$x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot2\cdot(-6)}}{2\cdot2} = \frac{-4\pm8}{4}.$$

Racionalne nule polinoma $P_2(x)$ su $x_1=-3$, $x_2=1$. Osnovni stav algebre (teorema 1.19) kaže da su to i jedine nule tog polinoma.

Prema tome, možemo pisati $2x^2+4x-6 = 2(x-1)(x+3)$.

b) Za dati polinom posmatrajmo delitelje broja 12, jer je $a_0=12$. To su brojevi

$$\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12.$$

Kako je $a_n=a_3=1$, to su ovi celi brojevi i jedine moguće racionalne nule datog polinoma. Ispitaćemo da li je $x=1$ nula posmatranog polinoma:

$$\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 3 & -4 & -12 & & x=1 \\ & 1 & 4 & 0 & -12. & \end{array}$$

(Drugi red u ovoj shemi je dobijen u skladu sa prethodno objašnjenom Hornerovom shemom:

Prvi broj u drugom redu, 1, se prepiše iz prvog reda i upiše u drugu kolonu. Zatim se nalaze brojevi $4 = 1 \cdot 1 + 3$, $1 \cdot 4 + (-4) = 0$ i konačno se dobija ostatak $1 \cdot 0 + (-12) = -12$.)

Kako je zadnja cifra u drugom redu -12 (tj. $r = -12$), to $x = 1$ nije nula datog polinoma.

Ispitaćemo da li je $x = 2$ nula posmatranog polinoma:

1	3	−4	−12		$x = 2$
	1	5	6	0.	

Kako je zadnja cifra u drugom redu 0, (tj. $r = 0$), to je $x = 2$ nula datog polinoma. Prema tome možemo pisati

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x-2)(x^2 + 5x + 6).$$

Postupak se dalje nastavlja, tako što je sada dovoljno tražiti nule novog polinoma drugog stepena. To se sada može uraditi ili rešavanjem kvadratne jednačine $Q_2(x) := x^2 + 5x + 6 = 0$, ili, kao što ćemo mi to uraditi, ponovo pomoću Hornerove sheme. Ako proverimo da li je $x = -2$ nula polinoma $Q_2(x)$, tada imamo

1	5	6		$x = -2$
	1	3	0,	

što znači da je druga nula polinoma $P_3(x)$, broj $x = -2$. Tablica takođe pokazuje da je treća nula -3. Prema tome, možemo pisati

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x-2)(x+2)(x+3).$$

c) Za ovaj polinom posmatramo delitelje broja 6. To su $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Delitelji broja 2 su brojevi $\pm 1, \pm 2$, pa su moguće racionalne nule datog polinoma

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}.$$

Ispitaćemo da li su $x = 1$, $x = 2$ i $x = 3$ nule posmatranog polinoma:

2	−13	28	−23	6		$x = 1$
	2	−11	17	−6	0	$x = 2$
		2	−7	3	0	$x = 3$
			2	−1	0.	

Primetimo da je u ovom slučaju Hornerova shema bila primenjena tri puta: prvi put na dati polinom $P_4(x)$ za $x = 1$, pa za polinom $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$ za $x = 2$, i konačno na polinom $2x^2 - 7x + 3$ za $x = 3$.

Kako je zadnja cifra u drugom, trećem i četvrtom redu 0, (tj. odgovarajuće $r = 0$), to znači da su ova tri pretpostavljena broja zaista nule posmatranog polinoma. Dalje, poslednja vrsta gornje sheme pokazuje da je četvrta nula posmatranog polinoma broj $x = 1/2$. Znači, važi

$$2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 23x + 6 = (x-1)(x-2)(x-3)(2x-1).$$

d) U ovom slučaju moguće racionalne nule polinoma su 1 i -1, pa je

1	0	−1	1	0	−1		$x = 1$
	1	1	0	1	1	0	$x = -1$
		1	0	0	1	0	$x = -1$
			1	−1	1	0.	

Prema tome je $P_5(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1 = (x+1)^2(x-1)(x^2 - x + 1)$. Posmatrani polinom nema drugih racionalnih nula. U stvari, ostale dve nule su konjugovano – kompleksni brojevi, pa je dobijena faktorizacija polinoma $P_5(x)$ oblika (1.6).

e) Moguće racionalne nule polinoma $P_7(x)$ su ± 1 i ± 5, pa je

1	0	6	−5	9	−10	4	−5		$x = 1$
	1	1	7	2	11	1	5	0	$x = 1$
		1	2	9	11	22	23	28.	

Znači $x = 1$ je samo jednostruka nula (nije dvostruka), jer je u trećem redu poslednje tablice zadnji broj 28. Ostavljamo čitaocu da pokaže da vrednosti $x = -1$, $x = 5$ i $x = -5$ nisu nule datog polinoma, što znači da drugih racionalnih nula ovaj polinom nema. U stvari, polinom $P_7(x)$ drugih realnih nula i nema, i važi sledeća faktorizacija oblika (1.6):

$P_7(x) = x^7 + 6x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x^2 + x + 5)(x^2 + 1)^2$. ▶

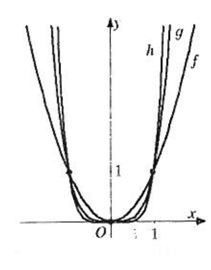
1.22. Primer. *U istom koordinatnom sistemu nacrtati grafike sledećih funkcija:*

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$, $h(x) = x^6$;

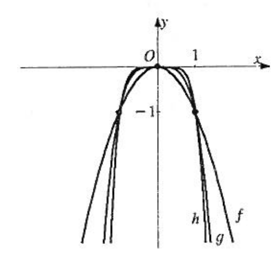
b) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -x^4$ $h(x) = -x^6$;

c) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^5$;

d) $f(x) = -x$, $g(x) = -x^3$, $h(x) = -x^5$.



Slika 1.2.

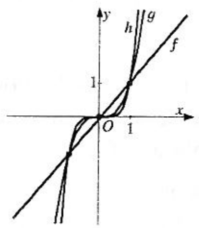


Slika 1.3.

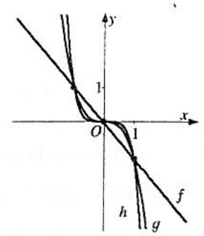
Rešenja. Sve funkcije u ovom zadatku imaju za svoje prirodne definicione skupove isti skup, naime ceo skup realnih brojeva i imaju jednu nulu u tački $x = 0$.

a) Skup vrednosti sve tri funkcije je interval $[0, +\infty)$ i parne su. Sve tri funkcije opadaju nad $(-\infty, 0)$, a rastu nad $(0, +\infty)$, pa imaju (lokalni i globalni) minimum u tački $x = 0$ (sl. 1.2).

b) Skup vrednosti ove tri funkcije je interval $(-\infty, 0]$ i parne su. Sve tri funkcije rastu nad $(-\infty, 0)$, a opadaju nad $(0, +\infty)$, pa imaju (lokalni i globalni) maksimum u tački $x = 0$ (sl. 1.3).

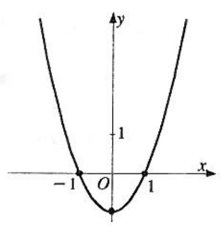


Slika 1.4.

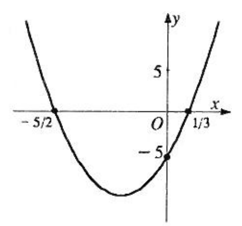


Slika 1.5.

c) Skup vrednosti ovih funkcija je ceo skup $\mathbb{R}$. Sve tri date funkcije su neparne, rastuće funkcije na $\mathbb{R}$. (sl. 1.4).



Slika 1.6.



Slika 1.7.

d) Skup vrednosti ovih neparnih opadajućih funkcija je $(-\infty, +\infty)$ (sl. 1.5). ▶

1.23. Primer. *Rešiti sledeće nejednačine:*

a) $x^2 - 1 \geq 0$; b) $6x^2 + 13x - 5 < 0$; c) $x^2 + 4 \geq 0$;

d) $x^2 + 4 \leq 0$; e) $(x^2 - 4x)(-x^2 + 2x + 3) < 0$; f) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4} \leq 0$.

Rešenja.

a) Data nejednačina se može rešiti na sledeća dva načina.
I način: Pre svega važi $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, a zadnji proizvod je nenegativan ako i samo ako je ili

$$(x - 1 \geq 0 \wedge x + 1 \geq 0) \iff (x \geq 1 \wedge x \geq -1) \Rightarrow x \geq 1, \text{ ili,}$$

$$(x - 1 \leq 0 \wedge x + 1 \leq 0) \iff (x \leq 1 \wedge x \leq -1) \Rightarrow x \leq -1.$$

Nejednakost $x^2 - 1 \geq 0$ važi ako i samo ako je $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

II način: Ova nejednačina se može rešiti i pomoću grafika parabole i njenog znaka. Funkcija $f(x) = x^2 - 1$ data je na sl. 1.6 i nenegativna je za $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, što i predstavlja skup rešenja date nejednačine.

b) Funkcija $f(x) = 6x^2 + 13x - 5$ (sl. 1.7), ima nule u tačkama $x_1 = \frac{1}{3}$ i $x_2 = -\frac{5}{2}$, i ima negativnu vrednost za $x \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\right)$. Zadnji interval i jeste rešenje date nejednačine.

c) Iz $x^2 + 4 > 0$ za svako $x \in (-\infty, +\infty)$, sledi da je rešenje date nejednačine skup $\mathbb{R}$.

d) Nema rešenja.

e) Na osnovu grafika funkcija $f(x) = x^2 - 4x$ i $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, (sl. 1.8), je $x^2 - 4x < 0$ za $x \in (0, 4)$ i $-x^2 + 2x + 3 > 0$ za $x \in (-1, 3)$. Ovo znači da važi

$$(\forall x \in (0, 3)) \quad (x^2 - 4x)(-x^2 + 2x + 3) < 0.$$

Takođe je $x^2 - 4x > 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, i $-x^2 + 2x + 3 < 0$ za $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, što povlači

$$x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty) \Rightarrow (x^2 - 4x)(-x^2 + 2x + 3) < 0.$$

Skup rešenja date nejednačine je unija intervala $(-\infty, -1) \cup (0, 3) \cup (4, +\infty)$.

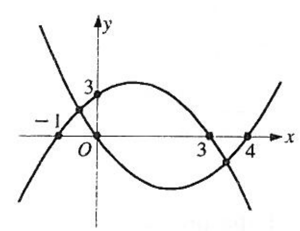
f) Na osnovu grafika funkcija $f(x) = x^2 + 2x - 3$ i $g(x) = x^2 - 4$ (sl. 1.9), sledi

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0 \text{ za } x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty) \text{ i } x^2 - 4 < 0 \text{ za } x \in (-2, 2).$$

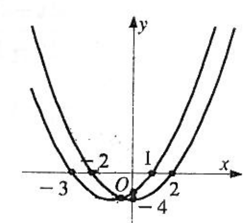
Prema tome, $x \in [1, 2) \Rightarrow (x^2 - 4x)(x^2 + 2x - 3) \leq 0$. Dalje je

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0 \text{ za } x \in [-3, 1] \text{ i } x^2 - 4 > 0 \text{ za } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Prema tome je $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4} \leq 0 \iff x \in [-3, -2) \cup [1, 2)$. ▶



Slika 1.8.



Slika 1.9.

1.5.2 Racionalne funkcije

Funkcija

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbf{R}|\ Q_m(x)=0\},\tag{1.8}$$

gde su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stepena n odnosno m, naziva se **racionalna funkcija.**

Posebno značajni primeri racionalnih funkcija su **elementarne racionalne funkcije**

$$\frac{A}{(x-a)^j},\ j\in\mathbb{N},\ \text{i}\qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k},\quad k\in\mathbb{N},\tag{1.9}$$

gde su nule polinoma x^2+bx+c konjugovano–kompleksne.

1.24. Teorema. *Racionalna funkcija oblika (1.8) se može na jedinstven način napisati kao zbir elementarnih racionalnih funkcija oblika (1.9), i, ako je $n\geq m$, još jednog polinoma stepena $n-m$.*

1.25. Primer. *U istom koordinatnom sistemu nacrtati grafike sledećih funkcija:*

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $\quad g(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $\quad h(x)=\dfrac{1}{x^5}$;

b) $k(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\quad l(x)=\dfrac{1}{x^4}$, $\quad m(x)=\dfrac{1}{x^6}$.

Rešenja. Svih šest funkcija su definisane na intervalu $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, i nemaju ekstremnih vrednosti.

a) Funkcije f, g i h su neparne i opadajuće na intervalima $(-\infty,0)$ i $(0,+\infty)$.

b) Funkcije k, l i m su parne, rastuće na $(-\infty,0)$, a opadajuće na intervalu $(0,+\infty)$. ▶

1.26. Primer. *Rastaviti na elementarne racionalne funkcije sledeće racionalne funkcije:*

a) $\dfrac{2}{x^2-1}$; $\quad$ **b)** $\dfrac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}$; $\quad$ **c)** $\dfrac{x+1}{x^3-2x^2+x-2}$;

d) $\dfrac{x+3}{x^4-5x^2+4}$; $\quad$ **e)** $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^3}$; $\quad$ **f)** $\dfrac{2x^2-4x+3}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}$.

Rešenja.

a) Nule polinoma u imeniocu, x^2-1, su $x=1$ i $x=-1$, pa prema teoremi 1.24, datu racionalnu funkciju možemo rastaviti na zbir sledećih parcijalnih razlomaka:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}.$$

Iz ove jednakosti dobijamo konstante A i B tako što se prvo saberu poslednja dva razlomka

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}=\frac{(A+B)x+A-B}{x^2-1}$$

i brojilac dobijenog razlomka izjednači sa brojiocem početnog (datog) razlomka. Tako dobijamo $2=(A+B)x+(A-B)$, odnosno sistem jednačina $A+B=0$, $A-B=2$, sa rešenjima $A=1$, $B=-1$, što znači da je $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

b) Stepen brojioca je veći od stepena imenioca, pa se prvo moraju izvršiti sledeće transformacije:

$$\frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}=\frac{x^3-2x^2-15x+2x^2+13x-35}{x^2-2x-15}=\frac{x(x^2-2x-15)+2x^2+13x-35}{x^2-2x-15}$$
$$=x+\frac{2x^2+13x-35}{x^2-2x-15}=x+2+\frac{17x-5}{x^2-2x-15}.$$

(Umesto ovih transformacija, može se podeliti polinom $x^3-2x-35$ iz brojioca sa polinomom $x^2-2x-15$ iz imenioca, što daje polinom $x+2$ i ostatak $\dfrac{17x-5}{x^2-2x-15}$.) Dalje je

$$\frac{17x-5}{x^2-2x-15}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-5)}{x^2-2x-15},$$

odakle se dobija sistem jednačina $A+B=17$, $3A-5B=-5$, pa je $A=10$, $B=7$. Prema tome je $\dfrac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}=x+2+\dfrac{10}{x-5}+\dfrac{7}{x+3}$.

c) Polinom u imeniocu se može napisati kao $x^3-2x^2+x-2=(x-2)(x^2+1)$, postoje konstante A, B i C, takve da važi

$$\frac{x+1}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2-2Bx+Cx-2C}{(x-2)(x^2+1)},\quad\text{odnosno}$$
$$\frac{x+1}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{(A+B)x^2+(C-2B)x+A-2C}{x^3-2x^2+x-2}.$$

Izjednačavanjem brojilaca dobija se sistem jednačina $A+B=0$, $C-2B=1$, $A-2C=1$, odakle je $A=3/5$, $B=-3/5$ i $C=-1/5$, pa je konačno

$$\frac{x+1}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{3}{5(x-2)}-\frac{3x+1}{5(x^2+1)}.$$

d) Vrednosti $x=1$, $x=2$, $x=-1$ i $x=-2$ su nule polinoma koji se nalazi u imeniocu, pa je $\dfrac{x+3}{x^4-5x^2+4}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-2}+\dfrac{D}{x+2}$, što znači da posle sređivanja data racionalna funkcija ima oblik

$$\frac{(A+B+C+D)x^3+(A-B+2C-2D)x^2-(4A+4B+C+D)x-4A+4B-2C+2D}{x^4-5x^2+4}$$

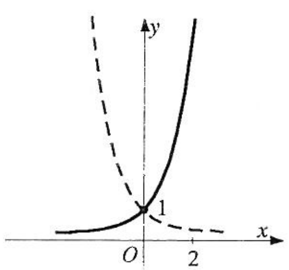
Na osnovu toga se dobija sistem jednačina $A+B+C+D=0$, $A-B+2C-2D=0$, $-(4A+4B+C+D)=1$, $-4A+4B-2C+2D=3$, sa rešenjima $A=-2/3$, $B=1/3$, $C=5/12$ i $D=-1/12$.

Prema tome, može se pisati $\dfrac{x+3}{x^4-5x^2+4}=\dfrac{-2}{3(x-1)}+\dfrac{1}{3(x+1)}+\dfrac{5}{12(x-2)}-\dfrac{1}{12(x+2)}$.

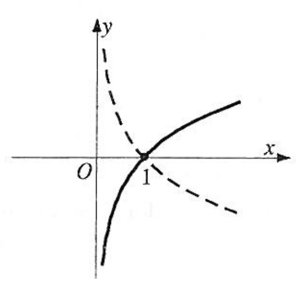
e) Broj 1 je trostruka nula imenioca. Zbog toga, data racionalna funkcija se može pisati kao
$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}=\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx-B+C}{(x-1)^3},$$
odakle se posle sređivanja dobija sistem jednačina $A=1,\quad -2A+B=0,\quad A-B+C=1,$ čija su rešenja $A=1$, $B=2$ i $C=2$. Tako dobijamo jednakost
$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$

f) U ovom slučaju su vrednosti $x=1$ i $x=2$ dvostruke nule polinoma koji se nalazi u imeniocu, pa se može pisati
$$\frac{2x^2-4x+3}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{Ax^3-5Ax^2+8Ax-4A+Bx^2-4Bx+4B}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}+\frac{Cx^3-4Cx^2+5Cx-2C+Dx^2-2Dx+D}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}.$$
Odavde se dobija sistem jednačina $A+C=0,\quad -5A+B-4C+D=2,$

$8A-4B+5C-2D=-4,\quad -4A+4B-2C+D=3.$ Rešenja ovog sistema su $A=2$, $B=1$, $C=-2$, i $D=3$, pa imamo
$$\frac{2x^2-4x+3}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{-2}{x-2}+\frac{3}{(x-2)^2}.$$ ▶



Slika 1.10. $f(x)=a^x$



Slika 1.11. $f(x)=\log_a x$

1.5.3 Eksponencijalne i logaritamske funkcije

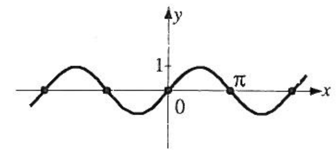
Eksponencijalna funkcija $f(x)=a^x$, $x\in\mathbb{R}$, raste za $a>1$ (slika 1.10 za $a=2$) i opada za $0<a<1$ (slika 1.10 za $a=1/2$ - isprekidana linija). Funkcija je pozitivna za sve $x\in\mathbb{R}$, pa nema nula. Eksponencijalna funkcija bijektivno preslikava $\mathbb{R}$ na $(0,+\infty)$.

Logaritamska funkcija $f(x)=\log_a x$, $x>0$, je inverzna za eksponencijalnu funkciju $y=a^x$. Funkcija raste za $a>1$ (slika 1.11 za $a=2$) i opada za $0<a<1$ (slika 1.11 za $a=1/2$ - isprekidana linija). Nula funkcije je $x=1$.

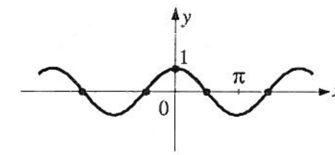
1.5.4 Trigonometrijske funkcije

U ovom potpoglavlju k uvek označava ceo broj, tj. $k\in\mathbb{Z}$.

Funkcija $f(x)=\sin x$ je definisana za sve $x\in\mathbb{R}$, i njen skup vrednosti je interval $[-1,1]$. Neparna je i periodična sa osnovnom periodom 2π. Nule su u tačkama $x=k\pi$. Na intervalu oblika $(-\pi/2+2k\pi,\pi/2+2k\pi)$ raste, a opada na intervalu oblika $(\pi/2+2k\pi,3\pi/2+2k\pi)$. Funkcija ima maksimume u tačkama $x=(4k+1)\pi/2$, a minimume u tačkama $x=(4k+3)\pi/2$ (slika 1.12).



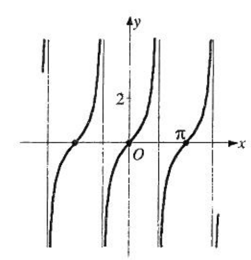
Slika 1.12. $f(x)=\sin x$



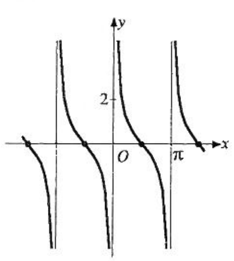
Slika 1.13. $f(x)=\cos x$

Funkcija $f(x)=\cos x$ je definisana za sve $x\in\mathbb{R}$, i njen skup vrednosti je interval $[-1,1]$. Funkcija je parna i periodična sa osnovnom periodom 2π. Nule funkcije su u tačkama $x=\pi/2+k\pi$. Na intervalu oblika $(2k\pi,(2k+1)\pi)$ opada, a na intervalu oblika $((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)$ raste. Funkcija ima maksimume u tačkama $x=2k\pi$, a minimume u tačkama $x=(2k+1)\pi$ (slika 1.13).

Funkcija $\mathrm{tg}\,x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ je definisana za sve $x\in\mathbb{R}$ za koje je $\cos x\neq 0$, tj. na skupu



Slika 1.14. $f(x)=\mathrm{tg}\,x$



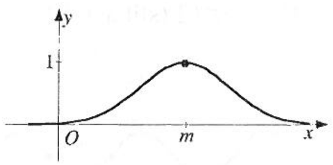
Slika 1.15. $f(x)=\mathrm{ctg}\,x$

$\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi/2\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Skup vrednosti je $\mathbb{R}$. Funkcija je neparna i periodična sa osnovnom periodom π. Nule funkcije su u tačkama $x=k\pi$. Nema ekstremnih vrednosti, i na intervalu oblika $(-\pi/2+k\pi,\pi/2+k\pi)$ raste. Vertikalne asimptote grafika su prave $x=(2k+1)\pi/2$ (slika 1.14).

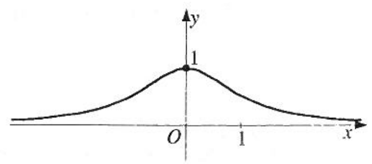
Funkcija $\mathrm{ctg}\,x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ je definisana za sve $x\in\mathbb{R}$ za koje je $\sin x\neq 0$, tj. na skupu $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Skup vrednosti je $\mathbb{R}$. Funkcija je parna i periodična sa osnovnom periodom π. Nule funkcije su u tačkama $x=(2k+1)\pi/2$. Funkcija nema ekstremnih vrednosti, i na intervalu oblika $(2k\pi,(2k+1)\pi)$ opada. Vertikalne asimptote grafika su prave $x=k\pi$ (slika 1.15).

1.27. Primer. *Nacrtati grafike sledećih funkcija:*

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; b) $g(x)=e^{-(x-m)^2}$, $m\in\mathbb{R}$ (Gausova kriva) .



Slika 1.16.



Slika 1.17.

a) Funkcija je definisana na $\mathbb{R}$ nenegativna je, parna ima (lokalni i globalni) maksimum u $x=0$, čija je vrednost $f(0)=1$ (sl. 1.17).

b) Funkcija je definisana na intervalu $(-\infty,+\infty,)$, skup vrednosti interval $(0,1)$, ima maksimum u tački $x=m$. i *ograničena* je na svom definicionom skupu, jer je $0<k(x)\leq 1$, $x\in\mathbb{R}$ (sl 1.16).

1.5.5 Inverzne trigonometrijske funkcije

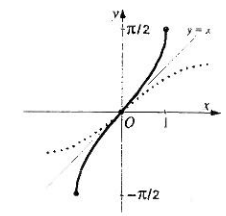
Osnovne trigonometrijske funkcije **nisu** monotone na svojim definicionim skupovima. Zbog toga, da bi se uopšte mogla definisati inverzna funkcija bilo koje od njih, potrebno je prvo izvršiti restrikciju polazne osnovne trigonometrijske funkcije na interval (po mogućstvu što veći!) na kome ona jeste monotona. Inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija dobijaju prefiks "arc", tj. arcsin, arccos, arctg i arcctg.

Funkcija $f(x)=\arcsin x$ je, po definiciji, inverzna funkcija za funkciju $F_1(x)=\sin x$, $x\in[-\pi/2,\pi/2]$, koja je restrikcija funkcije $F(x)=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$, sa $\mathbb{R}$ na interval $[-\pi/2,\pi/2]$. Važno je primetiti da na intervalu $[-\pi/2,\pi/2]$ funkcija F_1 raste, a da je njen skup vrednosti interval $[-1,1]$. Zbog toga je definicioni skup funkcije f interval $[-1,1]$, a njen skup vrednosti interval $[-\pi/2,\pi/2]$. Dalje, funkcija f je neparna, rastuća i ima nulu u $x=0$ (slika 1.18).

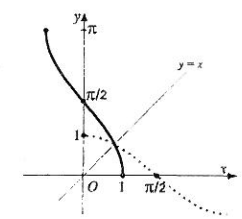
Funkcija $f(x)=\arccos x$ je, po definiciji, inverzna za monotonu funkciju

$F_1:[0,\pi]\to[-1,1]$ datu sa $F_1(x)=\cos x$, koja je bijekcija. (Proveriti!) Definicioni skup funkcije g jeste interval $[-1,1]$, skup vrednosti je interval $[0,\pi]$, i opada (slika 1.19).

Funkcija $f(x)=\operatorname{arctg} x$ je, po definiciji, inverzna za monotonu funkciju

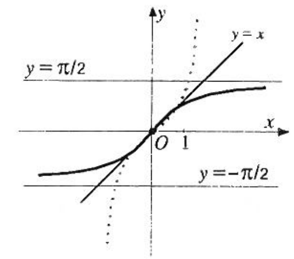


Slika 1.18. $f(x)=\arcsin x$

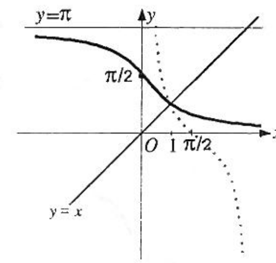


Slika 1.19. $f(x)=\arccos x$

$F_1:(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}$, datu sa $F_1(x)=\operatorname{tg} x$. Funkcija f je definisana na celom skupu $\mathbb{R}$, njen skup vrednosti je $(-\pi/2,\pi/2)$, rastuća je i neparna (slika 1.20).



Slika 1.20. $f(x)=\operatorname{arctg} x$



Slika 1.21. $f(x)=\operatorname{arcctg} x$

Funkcija $f(x)=\operatorname{arcctg} x$ je, po definiciji inverzna za monotonu funkciju $F_1:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, datu sa $F_1(x)=\operatorname{ctg} x$. Funkcija f je definisana na celom skupu $\mathbb{R}$, njen skup vrednosti je $(0,\pi)$, i opadajuća je. Ova funkcija nije ni parna ni neparna (slika 1.21).

1.6 Razni zadaci

1.28. Primer. *Nacrtati grafike sledećih funkcija:*

a) $f(x)=x+\sqrt{x^2}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2}}$; c) $f(x)=\cos x+|\cos x|$;

d) $f(x)=3|x-1|-|x+2|+x$.

Uputstva. a) Data funkcija se može izraziti kao $f(x)=\begin{cases}2x, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

b) Iz a) sledi da je data funkcija definisana samo za $x>0$, i važi $f(x)=1/(2x)$.

c) Funkcija f je jednaka $f(x)=\begin{cases}2\cos x, & \cos x\geq 0;\\ 0, & \cos x<0.\end{cases}$ Znači, $f(x)=2\cos x$ ako je $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\pi/2+2k\pi,\pi/2+2k\pi]$, odnosno $f(x)=0$ ako je $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\pi/2+$

$2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$.

d) Za $x \geq 1$ je $f(x) = 3(x-1) - (x+2) + x = 3x - 5$.

Za $-2 \leq x \leq 1$ je $f(x) = -3(x-1) - (x+2) + x = -3x + 1$.

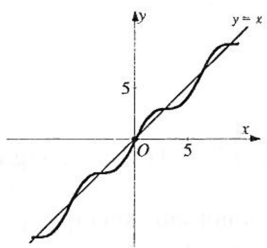
Konačno, za $x \leq -2$ je $f(x) = -3(x-1) + (x+2) + x = -x + 5$.

Znači, data funkcija se može zapisati kao: $f(x) = \begin{cases} -x+5, & x \leq -2; \\ -3x+1, & -2 \leq x \leq 1; \\ 3x-5, & x \geq 1. \end{cases}$ ▶

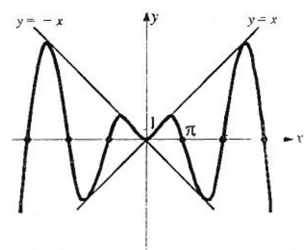
1.29. Primer. *Znajući da je* $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $x \in (0, \pi/2)$, *pokazati sledeće nejednakosti:*

a) $|\sin x| \leq |x|$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\cos x < \pi/2 - x$, $x \in (0, \pi/2)$;

c) $\cos x \geq 1 - x^2/2$, $x \in \mathbb{R}$; d) $\cos x \geq x - x^3/3$, $x \in (0, +\infty)$.



Slika 1.22. $f(x) = x + \sin x$



Slika 1.23. $f(x) = x \sin x$

1.30. Primer. *Konstruisati grafike sledećih funkcija:*

a) $f(x) = x + \sin x$; b) $f(x) = x \sin x$; c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; e) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; f) $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

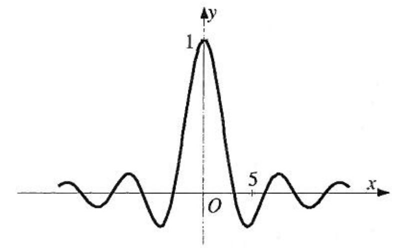
Rešenja. Grafici ovih funkcija su dati na slikama 1.22–1.27.

1.31. Primer. *Konstruisati grafike hiperboličnih funkcija:*

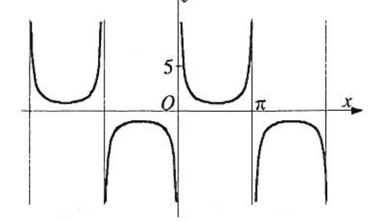
a) $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; b) $f(x) = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

c) $f(x) = \operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; d) $f(x) = \operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

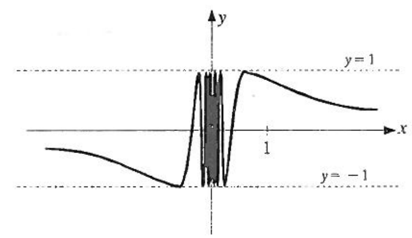
Rešenja. Traženi grafici su dati na slikama 1.28–1.31. ▶



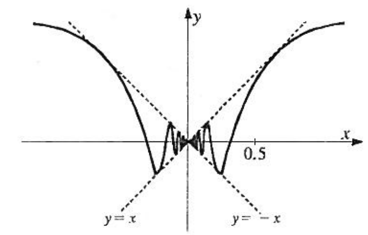
Slika 1.24. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$



Slika 1.25. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$



Slika 1.26. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$



Slika 1.27. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

1.32. Primer. *Pokazati sledeće jednakosti:*

a) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$; b) $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$;

c) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$; d) $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$;

e) $\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$; f) $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$.

Uputstvo. Iz definicija funkcija sh i ch (zadatak 1.31) sledi za sve $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \qquad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

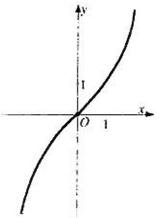
Na osnovu jednakosti $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, $x, y \in \mathbb{R}$, i prethodne relacije, sledi da za svako $x, y \in \mathbb{R}$ važe jednakosti:

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y), \\ e^{-(x+y)} &= \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y). \end{aligned}$$

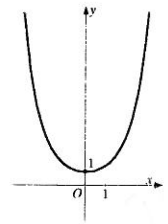
1.33. Primer. *Pokazati da za svako* $x, y \in \mathbb{R}$ *važe sledeće jednakosti:*

a) $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x-y}{2}$; b) $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sh} \dfrac{x-y}{2}$;

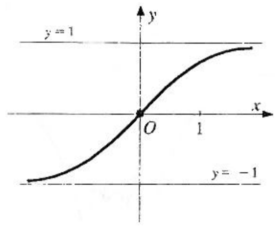
c) $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x-y}{2}$; d) $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{ch} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sh} \dfrac{x-y}{2}$.



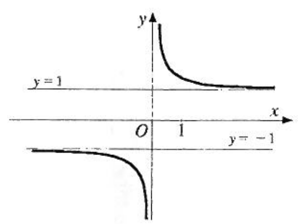
Slika 1.28. $f(x) = \operatorname{sh} x$



Slika 1.29. $f(x) = \operatorname{ch} x$



Slika 1.30. $f(x) = \operatorname{th} x$



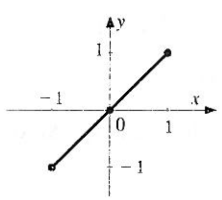
Slika 1.31. $f(x) = \operatorname{cth} x$

1.34. Primer. *Nacrtati grafike sledećih funkcija:*

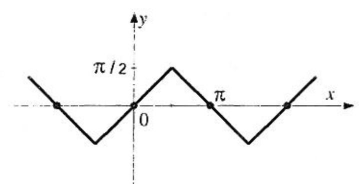
a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$; b) $f(x) = \arcsin(\sin x)$; c) $f(x) = x^{1/\lg x}$.

Rešenja.

a) Funkcija $\arcsin x$ je definisana na intervalu $[-1,1]$, i važi $f(x) = x$, $x \in [-1,1]$ (slika 1.32).



Slika 1.32. $f(x) = \sin(\arcsin x)$



Slika 1.33. $f(x) = \arcsin(\sin x)$

b) Funkcija je definisana na celom skupu $\mathbb{R}$, jer je $|\sin x| \le 1$. Periodična je sa periodom 2π, i važi (slika 1.33): $f(x) = \begin{cases} x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi/2; \\ \pi - x, & \pi/2 \le x \le 3\pi/2. \end{cases}$

c) Funkcija je definisana na intervalima $(0,1)$ i $(1,\infty)$ i, na osnovu osobine logaritma, važi $f(x) = x^{1/\lg x} = x^{\lg_x 10} = 10$. ▶

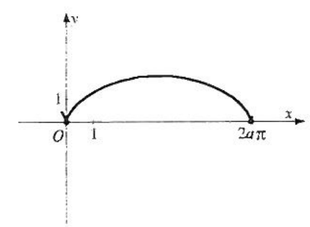
1.6.1 Parametarsko zadavanje krivih

Neka su na intervalu $I = [\alpha, \beta]$ date dve funkcije $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$, $t \in I$. Skup svih tačaka ravni koje su određene koordinatama $(\phi(t), \psi(t))$, $t \in I$ (uz dodatne uslove o diferencijabilnosti funkcija ϕ i ψ), predstavlja krivu datu **parametarski.**

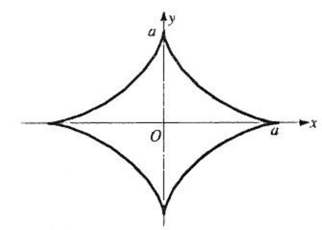
1.35. Primer. *Nacrtati krive date parametarski, ako je $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$:*

a) $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = at/(1+t^3); \\ y = at^2/(1+t^3). \end{cases}$

Prva kriva se naziva **cikloida,** *druga* **astroida,** *a treća* **Dekartov list.**



Slika 1.34. Cikloida.

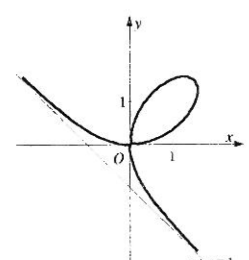


Slika 1.35. Astroida.

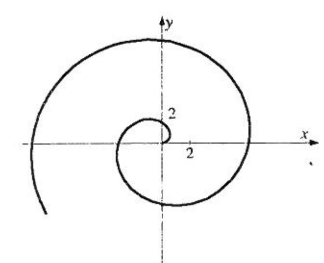
Rešenje.

a) Funkcija je $y = f(x)$ definisana na skupu $\mathbb{R}$, i po t periodična sa periodom 2π. Na osnovu sledeće tabele, možemo nacrtati cikloidu (slika 1.34 za a=1):

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$a\left(\pi/4 - \sqrt{2}/2\right)$	$a(\pi/2 - 1)$	$a\left(3\pi/4 - \sqrt{2}/2\right)$	$a\pi$	$a(3\pi/2 + 1)$	$2a\pi$
y	0	$a\left(1 - \sqrt{2}/2\right)$	a	$a\left(1 + \sqrt{2}/2\right)$	$2a$	a	0



Slika 1.36. Dekartov list.



Slika 1.37. Arhimedova spirala.

b) Ako je $0 \le t \le \pi/2$, tada je $0 \le x \le a$ $(t = 0, x = a, y = 0,\ t = \pi/2, x = 0, y = a)$. Ako je $\pi/2 \le t \le \pi$, tada je $-a \le x \le 0$ $(t = \pi,\ x = -a,\ y = 0)$ (slika 1.35 za a=1).

c) Slika 1.36 za $a = 3$. ▶

1.6.2 Krive date u polarnim koordinatama

Za svaku tačku $A(x,y)$ ravni, izuzev koordinatnog početka $O(0,0)$, postoje jednoznačno određeni **polarni ugao** $\varphi \in [0,2\pi[$ i **polarni radijus** ili **poteg** $\rho \in [0,+\infty[$ takvi da je

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi.$$

Za par (ρ,φ) se kaže da su polarne koordinate tačke A. Skup svih tačaka ravni koje su određene sa $(\rho(\varphi),\varphi), \varphi \in (\alpha,\beta)$ predstavlja krivu zadatu u polarnim koordinatama.

1.36. Primer. *Nacrtati sledeće krive zadate u polarnim koordinatama* $(a > 0)$ *:*

a) $\rho = a\phi$ **(Arhimedova spirala)**; b) $\rho = e^{\phi}$ **(logaritamska spirala)**;

c) $\rho = a(1+\cos\phi)$ **(kardioida)**; d) $\rho = a^2\cos(2\phi)$,

gde se kriva d) zove **Bernulijeva lemniskata.**

Rešenje.

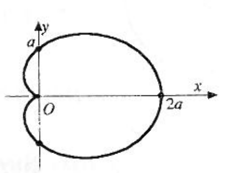
a) Na slici 1.37. predstavljena je Arhimedova spirala za $a = 1$.

Primetimo da kada polarni ugao ϕ raste od 0 do $+\infty$, tada i polarni radijus ρ raste od 0 do $+\infty$.

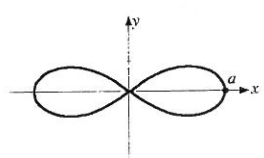
c) Na osnovu sledeće tabele možemo nacrtati krivu (slika 1.38 za $a = 1$):

ϕ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π
ρ	2a	$a\left(1+\sqrt{2}/2\right)$	a	$a\left(1-\sqrt{2}/2\right)$	0	a	$2a$

d) Funkcija $\rho = \rho(\phi)$ je definisana za $\cos 2\phi \geq 0$, tj. za $\phi \in [-\pi/4,\pi/4] \cup [3\pi/4,5\pi/4]$ (slika 1.39).▶



Slika 1.38. Kardioida.



Slika 1.39. Bernulijeva lemniskata.

Glava 2

Elementi linearne algebre

2.1 Matrice

Matrice se pojavljuju u mnogobrojnim primerima iz fizike i tehnike.

Matrica tipa $m \times n$ je pravougaona šema brojeva koja ima m vrsta i n kolona i zapisuje se u obliku

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Matrice se označavaju velikim slovima $A,B,C,\dots$.

Na primer, matrica: $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ je tipa 2×2, $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ \sqrt[3]{5} & -1 & 2 \end{bmatrix}$ je tipa 3×3, $C = \begin{bmatrix} 3 & \cos\pi \\ e^3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ je tipa 3×2, a $D = \begin{bmatrix} -1,2 \\ \ln 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ je tipa 3×1.

Brojevi a_{ij}, $i,j = 1,2,\dots,n$, su elementi matrice (2.1). Element a_{ij} je u i–toj vrsti i j–toj koloni matrice.

Kvadratne matrice su one matrice kod kojih je broj vrsta jednak broju kolona. **Red** kvadratne matrice je broj njenih vrsta odnosno kolona. U prethodnom primeru matrice A i B su kvadratne matrice. Matrica A je reda 2 a matrica B je reda 3.

Dve matrice A i B su **jednake** ako su istog tipa i ako su elementi jedne matrice jednaki odgovarajućim elementima druge matrice.

2.1. Primer. *Odrediti koje su od sledećih matrica jednake:*

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} \ln 1^2 & e^0 \\ \operatorname{tg}(\pi/4) & -2\log_2 2 \end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix} \sin(3\pi/2) & \cos(\pi/2) & e^{\ln 5} \\ \operatorname{tg}(\pi/4) & 2\sin(\pi/2) & -1 \\ \sin(\pi/4) & -6\ln(\sqrt{e}) & 2^{2-2} \end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Matrica B ima dve vrste i tri kolone, te je tipa 2×3 i nije istog tipa ni sa jednom od matrica A,C,D,H i F, pa nije ni jednaka ni sa jednom od tih matrica.

Preostale matrice su kvadratne i to A i D su reda 3, dok su C,H i F reda 2.

Matrice A i D su jednake, jer je svaki element matrice A jednak odgovarajućem elementu matrice D i obrnuto.

Na primer, element -1 u prvoj vrsti i prvoj koloni matrice A jednak je elementu $\sin(3\pi/2)$ iz prve vrste i prve kolone matrice D; element 0 u prvoj vrsti i drugoj koloni matrice A jednak je elementu $\cos(\pi/2)$ iz prve vrste i druge kolone matrice D i tako dalje.

Matrice C i H su jednake, a nisu jednake sa matricom F, jer je, na primer, element $\operatorname{tg}(\pi/4)$ u drugoj vrsti i prvoj koloni matrice C jednak je elementu 1 u drugoj vrsti i prvoj koloni matrice H, a element $-2\ln_2 2$ u drugoj vrsti i drugoj koloni matrice C jednak je elementu -2 iz druge vrste i druge kolone matrice H.

Matrica F nije jednaka sa matricom C, a takođe ni sa matricom H (elementi u prvoj vrsti razmenili su mesta). ▶

2.1.1 Sabiranje matrica

Neka su A i B dve matrice istog tipa $m\times n$. Tada je **zbir matrica** A i B matrica C tipa $m\times n$, čiji su elementi jednaki zbiru odgovarajućih elemenata matrica A i B. Veoma je važno naglasiti da se **mogu sabirati samo matrice istog tipa**.

2.2. Primer. *Date su matrice*

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 12 & -12 & 1 \\ 2 & -0.3 & 12 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 10 & -2 & 0 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 7 & -5 & 8 \\ -3 & -12 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -15 & 9 & 55 \end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix} 22 & 6 \\ -9 & 4 \\ -18 & 3 \end{bmatrix}.$$

Utvrditi koje se od datih matrica mogu sabrati.

Rešenje. Matrice H i F ne mogu se sabrati ni sa jednom od datih matrica, ni među sobom. Mogu se sabrati matrice A i D kao i matrice B i C na sledeći način:

$$\begin{aligned} A+D &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 12 & -12 & 1 \\ 2 & -0.3 & 12 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -15 & 9 & 55 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3+7 & 2+6 & 1+5 \\ 12+2 & -12+1 & 1-1 \\ 2+(-15) & -0.3+9 & 12+55 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 14 & -11 & 0 \\ -13 & 8.7 & 67 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B+C &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 10 & -2 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 & -5 & 8 \\ -3 & -12 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+7 & 2-5 & -3+8 \\ 10-3 & -2-12 & 0+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -3 & 5 \\ 7 & -14 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$ ▶

Za sabiranje matrica istog tipa važi

zakon komutativnosti, tj. $A+B=B+A$.

zakon asocijativnosti, tj. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Na primer, ako su date matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Tada je

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} A+(B+C) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nula matrica tipa $m\times n$ je matrica čiji su svi elementi nule. Nula matrica je neutralni element za operaciju sabiranja u skupu matrica istog tipa.

Na primer, neutralni elementi za operaciju sabiranja matrica tipa

$$3\times 3 \text{ je } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad 2\times 3 \text{ je } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad 2\times 2 \text{ je } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Skup matrica istog tipa u odnosu na operaciju sabiranja matrica čini **komutativnu grupu**.

Množenje matrica brojem

Matrica se množi nekim brojem tako što se **svaki** element te matrice množi tim brojem. Za proizvoljne realne brojeve λ i μ i proizvoljnu matricu A važi da je

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A), \qquad (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A.$$

Na primer,

$$2\cdot\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -6 & 4 \\ 10 & 8 & 2 \\ 18 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matrica $-1\cdot A$ označava se sa $-A$ i važi $A+(-A) = -A+A = O$, gde je O nula matrica istog tipa kao i matrica A.

Oduzimanje matrica definiše se na sledeći način: $A-B = A+(-B)$.

2.1.2 Množenje matrica

Neka su date dve matrice, matrica A tipa 2×2 i matrica B tipa 2×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}.$$

Proizvod matrica A i B je matrica C čiji se elementi dobijaju na sledeći način:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} & a_{11}\cdot b_{13}+a_{12}\cdot b_{23} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} & a_{21}\cdot b_{13}+a_{22}\cdot b_{23} \end{bmatrix}.$$

Svaki element matrice C se može izraziti kao

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}, \quad i = 1,2, \quad j = 1,2,3.$$

U opštem slučaju množenje matrica definiše se na sledeći način.
Neka je matrica A tipa $m\times n$ i matrica B tipa $n\times p$. **Proizvod** $A\cdot B$ matrica A i B je matrica C tipa $m\times p$ takva da je

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,p.$$

Primetimo da se mogu množiti samo one matrice kod kojih je

broj kolona prve matrice A u proizvodu $A\cdot B$ jednak broju vrsta druge matrice B u proizvodu $A\cdot B$.
Kvadratne matrice istog reda se uvek mogu množiti. Na primer, imamo

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\cdot 2+2\cdot(-7) & -1\cdot 4+2\cdot 11 \\ 3\cdot 2+(-5)\cdot(-7) & 3\cdot 4+(-5)\cdot 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 18 \\ 41 & -43 \end{bmatrix}.$$

$$C\cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & -5 & 8 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ -9 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+12+9+0 & 3+8+0+0 & 5+4+0+0 \\ 7-30-72+18 & 21-20+0-3 & 35-10+0-6 \\ 0+12+27+0 & 0+8+0+0 & 0+4+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 11 & 9 \\ -77 & -2 & 19 \\ 39 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matrice A i B su tipa 2×2, i matrica $A\cdot B$ je istog tipa.

Matrica C je tipa 3×4, dok je matrica D tipa 4×3, i one se mogu množiti.Naime, matrica C ima **tri vrste i četiri kolone** i ona, kao prvi faktor u proizvodu, **može se množiti** sa svakom matricom koja ima četiri vrste, a takva je matrica D (ima četiri vrste i tri kolone). Dobijena matrica $C\cdot D$ ima tri vrste i tri kolone, znači onoliko vrsta koliko ima matrica C (tri) i onoliko kolona koliko ima matrica D (tri).

Zakon komutativnosti za množenje matrica **ne važi.**

Ako matrice nisu kvadratne, tada je očigledno, a na sledećem primeru ćemo pokazati da komutativnost ne važi ni za kvadratne matrice.

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -7 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -7 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 14 & 1 & -37 \\ 28 & 16 & -12 \end{bmatrix},$$

$$B\cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -7 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -7 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -22 & 10 \\ 14 & 11 & -5 \\ 0 & 16 & -8 \end{bmatrix}.$$

2.3. Primer. *Odrediti koje se matrice mogu množiti i izmnožiti ih.*

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$; **b)** $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -9 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; **c)** $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$;

d) $D = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; **e)** $J = \begin{bmatrix} 10 & -12 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$; **f)** $F = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

g) $G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; **h)** $H = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Rešenje. Matrica A ima dve kolone, pa se može množiti samo sa matricama koje imaju dve vrste a to su matrice C i J. Imamo da je

$$A\cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -6 & 26 \\ -6 & 3 & -18 \end{bmatrix},$$

$$A\cdot J = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 10 & 12 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 26 \\ 21 & -33 & -18 \end{bmatrix}.$$

Dobijene matrice imaju dve vrste kao i matrica A i tri kolone kao matrice C i J.

Matrica B ima tri kolone i može se množiti sa matricama koje imaju tri vrste, a to su matrice D, F i H.

$$B\cdot D=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-9&0&5\\3&1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&-6\\5&0\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-15\\-21&79\\29&2\end{bmatrix},$$

$$B\cdot F=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-9&0&5\\3&1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-5\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\50\\-9\end{bmatrix},$$

$$B\cdot H=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-9&0&5\\3&1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8&5&0&1\\1&-4&-2&3\\0&0&4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-8&-16&12\\-72&-45&20&-19\\25&11&14&-2\end{bmatrix}.$$

Dobijene matrice imaju tri vrste kao i matrica B. Prva matrica ima dve kolone, druga jednu a treća četiri kolone kao i matrice D, F i H u proizvodima $B\cdot D, B\cdot F$ i $B\cdot H$, respektivno. Dalje je

$$C\cdot B=\begin{bmatrix}1&0&-2\\3&-1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&2&-3\\-9&0&5\\3&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&0&-11\\21&10&2\end{bmatrix},$$

$$C\cdot D=\begin{bmatrix}1&0&-2\\3&-1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&-6\\5&0\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-16\\19&2\end{bmatrix},$$

$$C\cdot F=\begin{bmatrix}1&0&-2\\3&-1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\-13\end{bmatrix},$$

$$C\cdot H=\begin{bmatrix}1&0&-2\\3&-1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8&5&0&1\\1&-4&-2&3\\0&0&4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&5&-8&5\\23&19&18&-8\end{bmatrix},$$

$$D\cdot A=\begin{bmatrix}4&-6\\5&0\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&6\\3&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-22&42\\-5&30\\12&3\end{bmatrix},$$

$$D\cdot C=\begin{bmatrix}4&-6\\5&0\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&-2\\3&-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&6&-32\\5&0&-10\\18&-5&14\end{bmatrix},$$

$$D\cdot J=\begin{bmatrix}4&-6\\5&0\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}10&-12&-2\\3&-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22&-42&-32\\50&-60&-10\\45&-41&14\end{bmatrix}. \blacktriangleright$$

Ako su A, B i C takve matrice da su proizvodi $A\cdot B$ i $B\cdot C$ definisani, tada su definisani i proizvodi $(A\cdot B)\cdot C$ i $A\cdot(B\cdot C)$ i važi **asocijativnost**

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C),$$

što ilustruje sledeći primer.

$$\begin{aligned}(A\cdot B)\cdot C&=\left(\begin{bmatrix}0&-2\\6&4\\-5&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-3\\-2&1\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}2&4&-2\\-5&3&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}4&-2\\-8&14\\-4&17\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&4&-2\\-5&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&10&-10\\54&-74&2\\-93&35&25\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\cdot(B\cdot C)&=\begin{bmatrix}0&-2\\6&4\\-5&2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}0&-3\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&-2\\-5&3&1\end{bmatrix}\right)\\&=\begin{bmatrix}0&-2\\6&4\\-5&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-15&-9&-3\\-9&-5&5\end{bmatrix}\cdot=\begin{bmatrix}18&10&-10\\54&-74&2\\-93&35&25\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Za svake tri matrice A, B i C važi

$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ (**leva distributivnost** množenja matrica u odnosu na sabiranje matrica);

$(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$ (**desna distributivnost** množenja matrica u odnosu na sabiranje matrica);

$k(A\cdot B)=(kA)\cdot B=A\cdot(kB),\quad k\in\mathbb{R}$,

pod uslovom da su proizvodi koji se gore pojavljuju definisani.

Proizvod matrica A i B može biti nula matrica i kada su matrice A i B različite od nula matrice.

Skup kvadratnih matrica reda n čini u odnosu na operacije sabiranja i množenja matrica **prsten**.

Kvadratna matrica reda n čiji su elementi na glavnoj dijagonali jednaki jedinici a ostali nule naziva se **jedinična matrica** i označava sa E ili I.

Važi relacije $A\cdot E=E\cdot A$, gde je E jedinična matrica reda n a A proizvoljna kvadratna matrica reda n.

Kvadratna matrica reda n čiji su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli naziva se **dijagonalna matrica.** Na primer, jedinična matrica reda 3, je

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad\text{a}\quad A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-2&0\\0&0&5\end{bmatrix}\ \text{je dijagonalna matrica.}$$

2.2 Determinante

Determinanta drugog reda koja je pridružena matrici $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ jeste broj $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ je . **Determinanta trećeg reda**

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

je broj pridružen matrici $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Vrste, kolone, glavna i sporedna dijagonala determinante su istovremeno vrste, kolone, glavna i sporedna dijagonala matrice kojoj je pridružena determinanta. Matrice i determinante i pored toga što slično izgledaju suštinski se razlikuju. Determinante uvek predstavljaju broj, dok matrice **nemaju brojnu vrednost.**
Elementi determinante su označeni kao i kod matrice sa a_{ij}, gde prvi broj i određuje vrstu, a drugi broj j određuje kolonu u kojoj se a_{ij} nalazi. Tako, na primer, element a_{23} pripada drugoj vrsti i trećoj koloni. Zbir brojeva i i j tj. broj $i+j$ može biti paran ili neparan, što određuje **parno** odnosno **neparno mesto** elementa a_{ij} u determinanti. Tako se element a_{23} nalazi na neparnom mestu (jer je $2+3=5$), dok se element a_{33} nalazi na parnom mestu (jer je $3+3=6$). Ako sa $+$ i $-$ označimo respektivno parna i neparna mesta, tada je njihov raspored u determinanti trećeg reda dat sa $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

Determinanta drugog reda, u oznaci M_{ij}, zove se **minor** ili **subdeterminanta** za element a_{ij}, $i,j = 1,2,3$, i obrazuje se tako što se iz polazne determinante trećeg reda (2.2) izostavi $i-$ta vrsta i $j-$ta kolona u kojoj se element a_{ij} nalazi, pa preostali elementi obrazuju determinantu drugog reda M_{ij}. Tako se minor $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ dobija eliminacijom prve vrste i prve kolone u kojima se nalazi element a_{11}.

Kofaktor ili **algebarski komplement** elementa a_{ij} je izraz $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ tj. to je minor za dati element a_{ij} pomnožen sa $+1$ ili -1 u zavisnosti od parnosti mesta na kome se a_{ij} nalazi.
Na osnovu toga determinanta trećeg reda iz relacije (2.2) jednaka je (**razvijanje**

determinante po $i-$toj vrsti)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \text{ za } \mathbf{svako}\ i = 1,2,3.$$

Na primer, važi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Neka je data determinanta

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

Odredićemo njenu vrednost razvijanjem po elementima prve vrste.

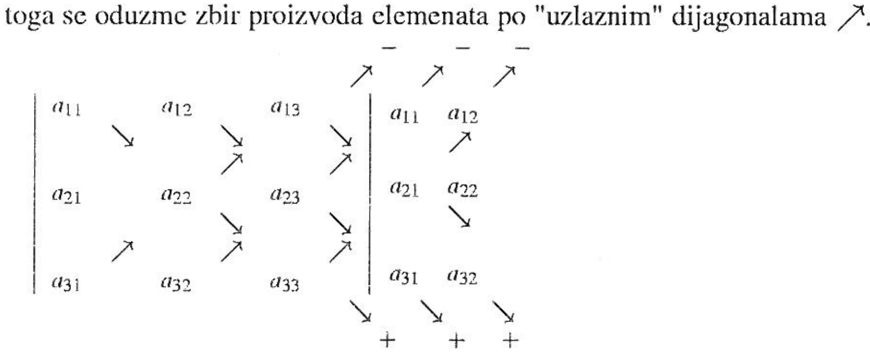
$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (3-(-4)) - 2 \cdot (9-8) - (-3-2) = 7-2+5 = 10. \end{aligned}$$

Razvijanjem po elementima treće kolone dobijamo

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot (-5) - 4 \cdot (-5) + 3 \cdot (-5) = 10. \end{aligned}$$

Determinante trećeg reda mogu se izračunavati i pomoću **Sarusovog pravila** :

Iza treće kolone polazne determinante trećeg reda dopišu se prva i druga kolona, pa se izmnože elementi na "silaznim " dijagonalama ↘ i dobijeni rezultati saberu. Od toga se oduzme zbir proizvoda elemenata po "uzlaznim" dijagonalama ↗. Dakle,



$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$.

Na primer, po Sarusovom pravilu determinanta (2.3) je jednaka

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = 1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 2 + (-1)\cdot 3\cdot(-1)$$
$$-(2\cdot 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 2) = 22 - 12 = 10.$$

2.2.1 Osobine determinanti

1. Vrednost determinante se ne menja ako se **vrste zamene kolonama** ne menjajući poredak.

   Prema tome vrednost determinante se može dobiti razvijanjem po elementima bilo koje vrste ili kolone, a ne samo razvijanjem po elementima i–te vrste.

2. Ako dve vrste (ili kolone) **zamene mesta** determinanta menja znak.

3. Determinanta se **množi nekim brojem** tako što se elementi jedne vrste (ili kolone) množe tim brojem.

4. Vrednost determinante **je jednaka nuli**

   ako su bilo koje dve vrste (ili dve kolone) **jednake**,

   ako su elementi jedne njene vrste (ili kolone) **proporcionalni** odgovarajućim elementima druge vrste (ili kolone),

   ako je jedna vrsta (ili kolona) jednaka **linearnoj kombinaciji** drugih vrsta (ili kolona).

5. Vrednost determinante se ne menja ako se elementima jedne njene vrste (ili kolone) **dodaju** odgovarajući elementi druge vrste (ili kolone) **prethodno pomnoženi nekim brojem**.

   Navedena osobina se često koristi pri izračunavanju determinanti.

6. Vrednost determinante čiji su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.

7. Ako je svaki element k–te vrste determinante trećeg reda (2.2) prikazan kao

$$a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}, \quad j = 1,2,3,$$

tada je determinanta (2.2) jednaka zbiru determinanti $D_1 + D_2$, čije su sve vrste, izuzev k–te, jednake vrstama determinante (2.2), k–tu vrstu determinante D_1 obrazuju elementi b_{k1}, b_{k2}, b_{k3} a k–tu vrstu determinante D_2 obrazuju elementi c_{k1}, c_{k2}, c_{k3}.

Analogna osobina važi i za kolone, što sledi iz osobine 1. determinanti.

Navedeno pravilo se još naziva i pravilo sabiranja determinanti.

Na primer, zbir dve determinante je

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & 12 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Primetimo da determinante koje se sabiraju imaju prvu i treću vrstu jednake, a razlikuju im se samo druge vrste. Zato determinanta koja predstavlja njihov zbir ima jednaku prvu i treću vrstu kao date determinante, a druga vrsta je jednaka zbiru odgovarajućih elemenata druge vrste datih determinanti.

Primetimo da je $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$. Elementi treće vrste su linearne kombinacije elemenata prve i druge vrste tj. $7 = 2\cdot 4 - 1$, $8 = 2\cdot 5 - 2$ i $9 = 2\cdot 6 - 3$.

2.2.2 Determinante višeg reda

Determinanta reda n data je sa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} \quad (2.4)$$

odnosno,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \quad (2.5)$$

za sve $i = 2, \ldots, n$. Pri tome je A_{1j}, $j = 1,2,\ldots,n$ kofaktor ili algebarski komplement elementa a_{1j}, $j = 1,2,\ldots,n$, i definisan je analogno kao i kod determinante trećeg reda. Dakle, $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, gde su M_{ij} minori ili subdeterminante za element a_{1j}, $j = 1,2,\dots,n$. Dakle, izračunavanje determinante reda n se svodi na izračunavanje n determinanti reda $n-1$.

Determinante reda n imaju analogne osobine kao i determinante trećeg reda.

2.4. Primer. *Izračunati sledeće determinante:*

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 10 & 2002 & 11 \\ 1 & 9 & 2003 & 3 \\ 1 & 10 & 0 & -1 \\ 1 & 10 & 2002 & 12 \end{vmatrix};\quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix};\quad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Rešenja.

a) Ako prvu vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo drugoj, trećoj i četvrtoj vrsti dobijamo determinantu čiji su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, te je

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 2002 & 11 \\ 1 & 9 & 2003 & 3 \\ 1 & 10 & 0 & -1 \\ 1 & 10 & 2002 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 2002 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2002 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -8 \\ 0 & -2002 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2002.$$

b) Dodavanjem prve kolone drugoj, trećoj i četvrtoj koloni dobijamo

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 5\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 110.$$

c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$
$$+5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24+5\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right) = 394.\ \blacktriangleright$$

2.2.3 Inverzna matrica

Ako je matrica A tipa $m\times n$ data sa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \text{tada je}\quad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

transponovana matrica matrice A.

Primetimo da je matrica A' tipa $n\times m$, odnosno, elementi vrsta matrice A su elementi kolona matrice A' i obrnuto. Na primer,

za matricu $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, transponovana matrica je $A' = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$,

a za matricu $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ transponovana matrica je $B' = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ako je kvadratna matrica A jednaka svojoj transponovanoj matrici, tada za takvu matricu kažemo da je **simetrična matrica.**

Izraz "simetrična" potiče od činjenice da je za kvadratne matrice A tipa $n\times n$, koje su simetrične, $a_{ij} = a_{ji}$, za sve $i,j = 1,2,\dots,n$.

Na primer, matrica $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 7 & -6 \end{bmatrix}$ je simetrična, jer je jednaka svojoj transponovanoj matrici A'.

Neka je matrica A data sa $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ i neka je A_{ij} algebarski komplement (kofaktor) elementa a_{ij} u determinanti matrice A, Tada se matrica

$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$, naziva **adjungovana matrica** matrice A. Primetimo da se kofaktori A_{ji} u adjungovanoj matrici A^* nalaze na istom mestu kao i njihovi odgovarajući elementi a_{ji} u transponovanoj matrici A' matrice A.

Na primer, za matricu $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ je $A' = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Kofaktor za element 7 je 5; za element -1 je -3; za element 3 je 1; za element 5 je 7. Prema tome, adjungovana matrica je $A^* = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

Za $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, i $B' = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ imamo

$$B^* = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -24 & 26 & -17 \\ -3 & 11 & -6 \end{bmatrix}.$$

Jedinična matrica je simetrična, pa je jednaka svojoj transponovanoj matrici, a takođe je jednaka i svojoj adjungovanoj matrici.

2.5. Teorema. *Ako je A kvadratna matrica tada je $A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det A \cdot E$.*

U prethodnom primeru je $A \cdot A^* = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 0 \\ 0 & 38 \end{bmatrix} = -38E$,

$\det A = 38$, $\det B = -31$ i

$$B \cdot B^* = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -1 & 4, \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -24 & 26 & -17 \\ -3 & 11 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 \\ 0 & -31 & 0 \\ 0 & 0 & -31 \end{bmatrix} = -31 \cdot E.$$

Kvadratna matrica A je **regularna** ako postoji kvadratna matrica B takva da je

$$A \cdot B = E.$$

Može se pokazati da za kvadratne matrice važi sledeća ekvivalencija:

$$A \cdot B = E \iff B \cdot A = E.$$

Inverzna matrica matrice A je kvadratna matrica, koja se označava sa A^{-1} i koja zadovoljava uslov $A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$.

Kvadratna matrica za koju ne postoji inverzna matrica naziva se **singularna ma-**

trica.

Svaka **regularna matrica ima jedinstvenu inverznu matricu.**

Kvadratna matrica je **regularna ako i samo ako je *detA* različita od nule.**

Inverzna matrica A^{-1} za regularnu matricu A određuje se na sledeći način:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Inverzna matrica jedinične matrice je jedinična matrica istog reda.

Inverzna matrica inverzne matrice je data matrica, tj., važi relacija $(A^{-1})^{-1} = A$.

Matrice A i A^{-1} su uzajamno inverzne.

Matrice A i A^{-1} su komutativne.

2.6. Primer. *Odrediti inverzne matrice sledećih matrica:*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; **c)** $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Rešenja. a) $\det A = 4$, a transponovana matrica matrice A je $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Adjungovana matrica matrice A je

$$A^* = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & -10 & 8 \\ 0 & -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Prema tome inverzna matrica A^{-1} matrice A je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & -10 & 8 \\ 0 & -8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -5/2 & 2 \\ 0 & -2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Zaista je $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -5/2 & 2 \\ 0 & -2 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) U ovom slučaju je

$$\det B = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad B' = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B^* = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -4 \\ 14 & 6 & 11 \\ 12 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Prema tome je

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^* = 1 \cdot \begin{bmatrix} -5 & -2 & -4 \\ 14 & 6 & 11 \\ 12 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -4 \\ 14 & 6 & 11 \\ 12 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

c) Determinanta matrice C jednaka je nuli tako da ne postoji inverzna matrica C^{-1} za matricu C.

d) $$\det D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 24, \quad D' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

pa je $$D^* = \begin{vmatrix} 12 & 0 & -12 & 0 \\ 20 & 0 & -24 & -12 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -12 & -12 & -12 \end{vmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ -5/6 & 0 & -1 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{vmatrix}. \ \blacktriangleright$$

2.7. Primer. *Rešiti, tamo gde je to moguće, matrične jednačine $A \cdot X = B$, $X \cdot A = B$, ako su A i B date matrice, a X nepoznata matrica, gde je*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Rešenja. Ako je $A \cdot X = B$, tada je $X = A^{-1} \cdot B$, a ako je $X \cdot A = B$, tada je $X = B \cdot A^{-1}$, što znači da treba prvo odrediti matricu A^{-1}.

a) Matrica A je tipa 3×3, te je i njena inverzna matrica istog tipa. Matrica B je takođe istog tipa, pa se mogu odrediti proizvodi $A^{-1} \cdot B$ kao i $B \cdot A^{-1}$.

Ovde je $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$, $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ -20 & -1 & -15 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, te je rešenje jednačine $A \cdot X = B$ dato sa

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ -20 & -1 & -15 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -15 \\ -35 & -39 & -75 \\ 5 & 6 & 11 \end{bmatrix}.$$

Rešenje jednačine $X \cdot A = B$ je

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ -20 & -1 & -15 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 & -2 & -27 \\ 20 & 1 & 15 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obratiti pažnju da je $A^{-1} \cdot B \neq B \cdot A^{-1}$.

b) Iz $\det A = 4$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, te je

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Proizvod $B \cdot A^{-1}$ se ne može odrediti.

c) U ovom slučaju je $\det A = 2$, $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} & 3 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} & 3 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{2} & -17 & -\frac{27}{2} \\ \frac{7}{2} & -6 & -\frac{9}{2} \\ -5 & 7 & 5 \end{bmatrix},$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} & 3 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{47}{2} & 9 & -\frac{15}{2} \\ 25 & -10 & 8 \end{bmatrix}.$$

d) Sada je $\det A = -6$, $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

I u ovom slučaju proizvod $B \cdot A^{-1}$ se ne može odrediti. ▶

2.2.4 Rang matrice

Neka je data matrica A tipa $m \times n$. Kvadratna **podmatrica** matrice A, reda manjeg ili jednakog od $\min(m,n)$, je matrica do koje se dolazi precrtavanjem određenih vrsta i kolona matrice A.

Na primer, matrica $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ima četiri podmatrice reda tri i jedna od njih je $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, do koje se dolazi precrtavanjem treće vrste matrice A.

Matrica, reda dva, $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, je jedna od podmatrica matrice A koja se dobija precrtavanjem treće i četvrte vrste i treće kolone matrice A.

Rang matrice A je **red** njene regularne kvadratne podmatrice, takve da su sve kvadratne podmatrice većeg reda, ako postoje, singularne.

Rang matrice označava se sa $\operatorname{rang} A$.

Rang matrice je broj koji je manji ili jednak od broja vrsta ili kolona te matrice.

2.8. Primer. *Odrediti rang matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Rešenje. Na primer, ako u matrici A izostavimo drugu kolonu, tada dobijena kvadratna podmatrica ima determinantu $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Analogno se pokazuje da su i sve druge podmatrice trećeg reda matrice A singularne. Postoji, međutim, regularna kvadratna podmatrica drugog reda čija je determinanta različita od nule. Naime, $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

Prema tome je $\operatorname{rang} A = 2$. ▶

2.3 Sistemi linearnih jednačina

Jednačina oblika

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b, \tag{2.6}$$

gde su nepoznate $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jeste **linearna jednačina**. Realni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ su **koeficijenti**, a realan broj b je **slobodni član** linearne jednačine.

Linearna jednačina (2.6) je **homogena** ako je $b = 0$.

Često se nepoznate u jednačini (2.6) označavaju sa $x, y, z, u, \ldots,$.

Na primer, jednačine

$5x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0$, $\frac{2x}{5} - 0.7y = 4$, $2x + \sqrt{5}y + 12z = -0.5$ **jesu** linearne jednačine;

$xy + y - \sqrt{z} = 8$, $3^x + 3y + 3z = 3$, $5\sin(2x) + 3y - xz^2 = 5$ **nisu** linearne jednačine.

Sistem od m **linearnih jednačina sa** n **nepoznatih** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je sistem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{2.7}$$

Ako su sve jednačine u (2.7) homogene, odnosno ako je $b_1 = b_1 = \ldots = b_n = 0$, tada je **sistem** (2.7) **homogen.**

Rešenje sistema (2.7) je uređena $n-$torka realnih brojeva $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, takva da njene komponente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zadovoljavaju sve jednačine sistema (2.7).

Rešenje $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sistema (2.7) ćemo zapisivati u obliku

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \ldots, \quad x_n = a_n.$$

Sistem linearnih jednačina je

saglasan (moguć, rešiv, konzistentan) ako ima bar jedno rešenje,

nesaglasan (nemoguć, nerešiv, kontradiktoran, protivrečan) ako nema nijedno rešenje.

Ako sistem ima tačno jedno rešenje tj. **jedinstveno rešenje**, tada se kaže da je **određen**.

Na primer, sistem $\begin{matrix} x-y=1 \\ x-y=1 \end{matrix}$ je određen, jer ima jedinstveno rešenje $x=2$, $y=1$.

Sistem $\begin{matrix} 3x-2y=2 \\ 6x-4y=5 \end{matrix}$ je protivrečan, jer nema rešenja.

Sistem $\begin{matrix} 2x+y=0 \\ x-2y=0 \end{matrix}$ je homogen i ima samo trivijalno rešenje $x=0,\ y=0$.

Sistem $\begin{matrix} 3x+y-z=-2 \\ 6x+2y+2z=-4 \end{matrix}$ je saglasan, jer ima rešenje $x=1,\ y=-3,\ z=2$.

Lako se proverava da sistem nije određen, jer je $x=t,\ y=5-8t,\ z=5-3t$, za svako $t \in \mathbb{R}$, takođe rešenje datog sistema.

Homogen sistem $\begin{matrix} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=0 \end{matrix}$ ima trivijalno rešenje $x=0,\ y=0,\ z=0$, a takođe i netrivijalna rešenja $x=t,\ y=-2t,\ z=t$, za svako $t \in \mathbb{R}$.

Dva sistema linearnih jednačina su **ekvivalentna** ako je svako rešenje prvog sistema i rešenje drugog sistema i svako rešenje drugog sistema je i rešenje prvog sistema.

Sistemi $\begin{matrix} 2x & +y & = & 7 \\ x & -2y & = & -4 \end{matrix}$, $\begin{matrix} -x & +5y & = & 13 \\ 8x & -4y & = & 4 \end{matrix}$ su ekvivalentni, jer imaju isto rešenje $x=2,\ y=3$.

Za svaka dva protivrečna sistema kažemo da su ekvivalentni. Ako se u datom sistemu izvrše sledeće **transformacije** sistema:

međusobna zamena bilo koje dve jednačine sistema;

množenje bilo koje od jednačina sistema brojem različitim od nule;

jedna jednačina sistema se **pomnoži nekim brojem i doda nekoj drugoj jednačini** sistema,

dobija se ekvivalentan sistem jednačina.

2.3.1 Gausov metod eliminacije

Gausov metod eliminacije sastoji se u tome da se pomoću gore pomenutih transformacija izvrši eliminacija jedne po jedne nepoznate iz jednačina sistema. Pokazaćemo to prvo na sistemu od tri jednačine sa tri nepoznate. Sistem jednačina

$$\begin{matrix} x & -y & +2z & = & 8 \\ -2x & +y & +z & = & -5 \\ 4x & -y & -3z & = & 7 \end{matrix} \tag{2.8}$$

transformišimo na sledeći način.

Prvu jednačinu sistema ne transformišemo, ali je pomnožimo sa 2 i dodamo drugoj jednačini (tako eliminišemo nepoznatu x iz druge jednačine). Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -4 i dodamo trećoj jednačini tada ćemo eliminisati x iz treće jednačine. Posle toga **ekvivalentan** sistem je oblika

$$\begin{matrix} x & -y & +2z & = & 8 \\ & -y & +5z & = & 11 \\ & 3y & -11z & = & -25 \end{matrix}.$$

Sada drugu jednačinu pomnožimo sa 3, a zatim je dodamo trećoj, koja sada ima samo nepoznatu z. Tada imamo sistem

$$\begin{matrix} x & -y & +2z & = & 8 \\ & -y & +5z & = & 11 \\ & & 4z & = & 8 \end{matrix}.$$

Ovako dobijen sistem je ekvivalentan sa polaznim sistemom. Iz poslednje jednačine dobija $z=2$. Iz druge jednačine je $y=-1$, a iz prve je $x+1+4=8$, tj. $x=3$.

Prikažimo sada Gausov metod eliminacije u opštem slučaju. Neka je dat sistem od m jednačina sa n nepoznatih

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{matrix} \tag{2.9}$$

takav da je koeficijent $a_{11} \neq 0$. (Ako je, na primer, u prvoj jednačini $a_{11}=0$, tada se za prvu jednačinu može uzeti ona jednačina kod koje je koeficijent uz x_1 različit od nule.)

Pomnožimo prvu jednačinu sistema (2.9) sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i dodajmo je drugoj. Nastavimo ovaj postupak i na kraju prvu jednačinu pomnožimo sa $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ i dodajmo je poslednjoj. Tako dobijene koeficijente u drugoj, trećoj, ..., m–toj jednačini ekvivalentnog sistema označimo respektivno sa $c_{22},\dots,c_{2n}$, $c_{32},\dots,c_{3n},\dots$, $c_{m2},\dots,c_{mn}$, a slobodne članove sa $d_2,d_3,\dots,d_m$. Tako dobijamo sistem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & c_{22}x_2 & + & \dots & + & c_{2n}x_n & = & d_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & c_{m2}x_2 & + & \dots & + & c_{mn}x_n & = & d_m. \end{array} \tag{2.10}$$

U sistemu (2.10) može postojati jednačina čiji su svi koeficijenti na levoj strani jednaki nuli a slobodan član različit od nule. Tada je sistem **protivrečan** i postupak rešavanja se obustavlja. Ako se, međutim, dobije jednačina čiji su svi koeficijenti na levoj strani kao i slobodan član jednaki nuli tada se ta jednačina odbacuje. Ako sistem (2.10) ima više od dve jednačine nastavljamo postupak. Neka je $c_{22}\neq 0$. Tada prva i druga jednačina sistema (2.10) ostaju nepromenjene. Dalje, drugu jednačinu pomnožimo sa $-\frac{c_{32}}{c_{22}}$ i dodajemo je trećoj i tako dalje. Tako dobijamo sistem

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & c_{22}x_2 & + & c_{23}x_3 & + & \dots & + & c_{2n}x_n & = & d_2 \\ & & & & e_{33}x_3 & + & \dots & + & e_{3n}x_n & = & f_3 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & e_{m3}x_3 & + & \dots & + & e_{mn}x_n & = & f_m, \end{array} \tag{2.11}$$

gde smo sa $e_{33},e_{34},\dots,e_{mn}$ označili novodobijene koeficijente a sa $f_3,f_4,\dots,f_m$ novodobijene slobodne članove u ekvivalentnom sistemu (2.11).

Nastavljajući postupak možemo doći do jednog od sledeća dva sistema:

$$\begin{array}{ccccccccccc} g_{11}x_1 & + & g_{12}x_2 & + & g_{13}x_3 & + & \dots & + & g_{1n}x_n & = & h_1 \\ & & g_{22}x_2 & + & g_{23}x_3 & + & \dots & + & g_{2n}x_n & = & h_2 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & g_{nn}x_n & = & h_n, \end{array} \tag{2.12}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} p_{11}x_1 & + & p_{12}x_2 & + & \dots & + & p_{1k}x_k & + & \dots & + & p_{1n}x_n = q_1 \\ & & p_{22}x_2 & + & \dots & + & p_{2k}x_k & + & \dots & + & p_{2n}x_n = q_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & p_{kk}x_k & + & \dots & + & p_{kn}x_n = q_k. \end{array} \tag{2.13}$$

Ako smo u dosadašnjem postupku dobili sistem (2.12), pri čemu je $g_{ii}\neq 0$, $i=1,2,\dots,n$, tada se vrlo jednostavno izračunavaju nepoznate $x_1,x_2,\dots,x_n$ počev od x_n. Nepoznatu x_n nalazimo rešavanjem poslednje jednačine

$$g_{nn}x_n = h_n$$

u sistemu (2.12). Zamenjujući tako dobijenu vrednost nepoznate x_n u pretposlednju jednačinu sistema (2.12) dobijamo vrednost nepoznate x_{n-1} i tako dalje. To znači da imamo jedinstveno rešenje, pa je dati sistem **saglasan i određen** sistem.

Ako na kraju navedenog postupka dobijamo sistem (2.13), napišimo ga u sledećem obliku:

$$\begin{array}{ccccccccc} p_{11}x_1 & + & p_{12}x_2 & + & \dots & + & p_{1k}x_k & = & q_1 - p_{1k+1}x_{k+1} - \dots - p_{1n}x_n \\ & & p_{22}x_2 & + & \dots & + & p_{2k}x_k & = & q_2 - p_{2k+1}x_{k+1} - \dots - p_{2n}x_n \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & & & & p_{kk}x_k & = & q_k - p_{kk+1}x_{k+1} - \dots - p_{kn}x_n. \end{array}$$

Sada umesto nepoznatih $x_{k+1},\dots,x_n$ stavljamo proizvoljne brojeve i na taj način dobijamo sistem oblika (2.12), koji rešavamo na navedeni način. Odavde zaključujemo da sistem (2.9) u ovom slučaju ima beskonačno mnogo rešenja.

Na primer, sistem jednačina

$$\begin{array}{ccccc} 2x & -y & +z & = & 9 \\ x & +4y & +2z & = & -9 \\ 3x & +y & -2z & = & 19 \end{array} \tag{2.14}$$

se rešava pomoću Gausovog metoda eliminacije na sledeći način:

Zamenom mesta prve i druge jednačine sistema (2.14) dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{ccccc} x & +4y & +2z & = & -9 \\ 2x & -y & +z & = & 9 \\ 3x & +y & -2z & = & 19 \end{array}. \tag{2.15}$$

Pomnožimo prvu jednačinu sistema (2.15) sa -2, i dodajmo drugoj jednačini, a zatim sa (-3) dodajmo trećoj. Tako dobijamo sistem

$$\begin{array}{ccccc} x & +4y & +2z & = & -9 \\ & -9y & -3z & = & 27 \\ & -11y & -8z & = & 46 \end{array}, \quad \text{odnosno} \quad \begin{array}{ccccc} x & +4y & +2z & = & -9 \\ & -3y & -z & = & 9 \\ & -11y & -8z & = & 46 \end{array}. \tag{2.16}$$

Ako sada drugu pomnožimo sa $-\frac{11}{3}$ dobijamo

$$\begin{array}{cccc} x & +4y & +2z & = -9 \\ & -9y & -3z & = 27 \\ & & (-8+11/3)z & = 13 \end{array}.$$

Iz poslednje jednačine dobijamo $z=-3$. Iz druge jednačine je $y=-2$, a iz prve je

$x=5$. Na primer, ako u sistemu jednačina

$$\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2z & = & 1 \\ 5x & +5y & +10z & = & 2 \\ 3x & -3y & +6z & = & 7 \end{array}$$

pomnožimo prvu jednačinu sa -5 i dodajmo drugoj jednačini, a zatim pomnožimo prvu jednačinu sa -3 i dodajmo trećoj, dobijamo sistem

$$\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2z & = & 1 \\ & & 0 & = & -3 \\ & -6y & & = & 4 \end{array}.$$

Dalje se postupak ne nastavlja, jer smo u drugoj jednačini dobili $0=-3$, što je protivrečnost. Prema tome dati sistem nema rešenja tj. **protivrečan je.**

U prethodnom primeru smo videli da prilikom primene Gausove metode eliminacije možemo doći do jednačine, kao što je bila druga, čiji su svi koeficijenti jednaki nuli, a slobodan član je bio različit od nule. U tom slučaju dati sistem je protivrečan. Ako do takvog slučaja ne dođemo, dati sistem je saglasan.

2.9. Primer. *Odrediti rešenje sistema*

$$\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & +2u & =5 \\ 2x & +y & -z & -u & =0 \\ 3x & +2y & +z & +u & =5 \\ -x & -y & +2z & +u & =3 \end{array}$$

pomoću Gausovog metoda eliminacije.

Rešenje. Pomnožimo prvu jednačinu datog sistema sa -2 i dodajmo je drugoj jednačini, zatim pomnožimo prvu jednačinu sa -3 i dodajmo trećoj i na kraju dodajmo prvu jednačinu četvrtoj jednačini. Tako dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +2z & +2u & = & 5 \\ & -y & -5z & -5u & = & -10 \\ & -y & -5z & -5u & = & -10 \\ & & 4z & +3u & = & 8 \end{array}.$$

Primetimo da su druga i treća jednačina jednake, pa se jedna izostavlja. Tako dobijamo sistem od tri jednačine sa četiri nepoznate

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 5-2u \\ & -y & -5z & = & -10+5u \\ & & 4z & = & 8-3u \end{array}.$$

Ako umesto nepoznate u stavimo određen realan broj dobijamo sistem koji ima

jedinstveno rešenje po promenljivim x,y i z. Međutim, kako jednu promenljivu u možemo da biramo proizvoljno, to sistem ima beskonačno mnogo rešenja. ▶

2.3.2 Kramerovo pravilo

Rešenje sistema od n jednačina sa n nepoznatih

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array} \tag{2.17}$$

pomoću **Kramerovog pravila**, ako je $D\neq 0$, formira se na sledeći način:

$$x_1=\frac{D_{x_1}}{D},\quad x_2=\frac{D_{x_2}}{D},\quad \ldots,\quad x_n=\frac{D_{x_n}}{D},$$

gde je determinanta sistema D data sa $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Determinante D_{x_i}, $i=1,2,\ldots,n$, formiraju se tako što se u determinanti sistema D $i-$ta kolona zameni kolonom koju čine slobodni članovi. Tako dobijamo da je

$$D_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \ldots,$$

$$D_{x_n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Dokaz. Pokazaćemo da je $x_1\cdot D=D_{x_1}$, a analogno se pokazuje da je i za sve $i=2,3,\ldots,n$

$$x_i\cdot D=D_{x_i}. \tag{2.18}$$

S obzirom na osobine determinanti imamo da je

$$x_1 \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pomnožimo sada drugu, treću, ... i poslednju kolonu redom sa $x_2, x_3, ..., x_n$ i tako dobijene kolone dodamo prvoj koloni, dobijamo

$$x_1 \cdot D = D_{x_1}$$

jer je onda svaki član u prvoj koloni redom jednak $b_1, b_2, ..., b_n$. ▶

2.10. Primer. *Pomoću Kramerovog pravila rešiti sisteme jednačina*

$$\text{a)}\quad \begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 7 \\ -2x & +3y & +2z & = & 6 \\ 5x & -y & -2z & = & -4 \end{array};\qquad \text{b)}\quad \begin{array}{rrrcr} \frac{x}{6} & -\frac{y}{3} & +\frac{z}{2} & = & 2 \\ -\frac{x}{2} & +\frac{y}{3} & +\frac{z}{4} & = & -3 \\ \frac{x}{4} & +\frac{y}{2} & -2z & = & -2 \end{array}.$$

Rešenja. a) Determinanta sistema je $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 15.$

Determinanta sistema je različita od nule. Prema tome, sistem ima jedinstveno rešenje. Determinante D_x, D_y i D_z su

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 20 & 5 & 2 \\ -18 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -30,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 5 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 60,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 20 \\ 5 & -6 & -39 \end{vmatrix} = -75.$$

Prema tome, rešenje sistema je $x = \frac{D_x}{D} = -2, \quad y = \frac{D_y}{D} = 4, \quad z = \frac{D_z}{D} = -5.$

b) Sistem jednačina ekvivalentan datom sistemu je $\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +3z & = & 12 \\ -6x & +4y & +3z & = & -36 \\ x & +2y & -8z & = & -8. \end{array}$

Kako je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -8 & 21 \\ 0 & 4 & -11 \end{vmatrix} = 4,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 3 \\ -36 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -9 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -5 & 4 & 19 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 48,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 3 \\ -6 & -36 & 3 \\ 1 & -8 & -8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = 24,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 12 \\ -6 & 4 & -36 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -6 & 2 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 16,$$

imamo da je rešenje sistema $x = 12, \quad y = 6, \quad z = 4$. ▶

2.3.3 Diskusija sistema linearnih jednačina

Posmatraćemo sistema od tri jednačine sa tri nepoznate i tada na osnovu (2.18) imamo da je

$$x \cdot D = D_x, \quad y \cdot D = D_y, \quad z \cdot D = D_z, \tag{2.19}$$

se može izvršiti diskusija sistema na sledeći način: Iz (2.19) sledi:

Sistem je **određen**, odnosno ima **jedinstveno rešenje** ako je $D \neq 0$.

Ako je $D = 0$, tada

ako je $(D_x \neq 0) \bigvee (D_y \neq 0) \bigvee (D_z \neq 0)$ sistem je **protivrečan**, jer iz (2.19) sledi da je tada $0 \neq 0$;

ako je $(D_x = 0) \bigwedge (D_y = 0) \bigwedge (D_z = 0)$ sistem može da ima **beskonačno mnogo rešenja**, a može da bude i **protivrečan**, što rešava naknadna analiza primenom Gausovog algoritma.

Na primer, sistem jednačina $3x+3y+3z=4,\ 5x+5y+5z=4,\ 2x+2y+2z=7.$ je takav da sve tražene determinante imaju vrednost nulu, jer imaju bar po dve iste kolone, te je

$$D=\begin{vmatrix}3&3&3\\5&5&5\\2&2&2\end{vmatrix}=0,\qquad D_x=\begin{vmatrix}4&3&3\\4&5&5\\7&2&2\end{vmatrix}=0,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3&4&3\\5&4&5\\2&7&2\end{vmatrix}=0,\qquad D_z=\begin{vmatrix}3&3&4\\5&5&4\\2&2&7\end{vmatrix}=0.$$

Međutim , sistem je protivrečan, jer ako se prva i treća saberu i oduzmu od druge jednačine dobija se da je $0=-7$.

2.11. Primer. *Rešiti i diskutovati sistem jednačina*
$$\begin{array}{rrrcl} ax & +y & +z & = & 1\\ x & +ay & +z & = & a\\ x & +y & +az & = & a^2\end{array}.$$

Rešenje. Determinanta sistema je $D=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}$. Dodavanjem druge i treće kolone prvoj koloni, a zatim izdvajanjem faktora $a+2$ ispred determinante dobijamo da je

$$\begin{vmatrix}a+2&1&1\\a+2&a&1\\a+2&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}0&1&1\\1-a&a&1\\0&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)(a-1).$$

Dalje, ako u determinanti D_x oduzmemo prvu kolonu od druge kolone dobijamo

$$D_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&a&1\\a^2&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\a&0&1\\a^2&1-a^2&a\end{vmatrix}=(a^2-1)\cdot(1-a)=-(a-1)^2(a+1).$$

Množenjem treće kolone sa $-a$ i dodajući je drugoj determinanta D_y postaje

$$D_y=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&a^2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&1-a&1\\1&0&1\\1&0&a\end{vmatrix}=-(1-a)\cdot(a-1)=(a-1)^2.$$

Oduzimanjem treće kolone od druge u D_z dobijamo

$$D_z=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&a\\1&1&a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&0&1\\1&0&a\\1&1-a^2&a^2\end{vmatrix}=(a^2-1)\cdot(a^2-1)=(a-1)^2\cdot(a+1)^2.$$

Znači $D=(a+2)\cdot(a-1)^2$, $D_x=-(a+1)\cdot(a-1)^2$, $D_y=(a-1)^2$, $D_z=(a+1)^2\cdot(a-1)^2$. Prema tome, ako je $D\neq 0$ tj. $a\neq -2$, $a\neq 1$, rešenje sistema je

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D}=\frac{-(a+1)\cdot(a-1)^2}{(a+2)\cdot(a-1)^2},\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{(a-1)^2}{(a+2)\cdot(a-1)^2},\\ z &= \frac{D_z}{D}=\frac{(a+1)^2\cdot(a-1)^2}{(a+2)\cdot(a-1)^2}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Diskusija sistema

Determinanta sistema je jednaka nuli za $a=-2$ i $a=1$. Za sve ostale realne brojeve $a\neq -2$, $a\neq 1$, sistem ima jedinstveno rešenje. Na primer, **za** $a=2$, sistem je oblika
$$\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & +z & = & 1\\ x & +2y & +z & = & 2\\ x & +y & +2z & = & 4\end{array}.$$

Determinante su: $D=4$, $D_x=-3$, $D_y=1$, $D_z=9$, pa iz (2.20) sledi da je rešenje sistema
$$x=-3/4,\quad y=1/4,\quad z=9/4.\tag{2.21}$$

Rešićemo isti sistem Gausovom metodom eliminacije. Ako prva i druga jednačina zamene mesta dobijamo sistem

$$\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +z & = & 2\\ 2x & +y & +z & = & 1\\ x & +y & +2z & = & 4\end{array}.$$

Pomnožimo prvu jednačinu sa -2 i dodajmo je drugoj, a zatim pomnožimo prvu jednačinu sa -1, i dodajmo je trećoj. Tako dobijamo sistem

$$\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +z & = & 2\\ & -3y & -z & = & -3\\ & -y & +z & = & 2\end{array}.$$

Sabiranjem druge i treće jednačine dobijamo

$$\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +z & = & 2\\ & -3y & -z & = & -3\\ & -4y & & = & -1\end{array}.$$

Odavde dobijamo iste vrednosti za x,y i z, kao i pomoću determinanti, date u (2.21).

Ako je $a=1$, tada je $D=0$, $D_x=0$, $D_y=0$, $D_z=0$. Sistem ima beskonačno mnogo rešenja, jer u stvari imamo jednu jednačinu sa tri nepoznate. Znači, ako dve od njih, na primer x i y izaberemo proizvoljno, tada je treća od njih z potpuno određena.

Ako je $a=-2$, tada je $D=0,\ D_x\neq 0,\ D_y\neq 0,\ D_z\neq 0$. Sistem je protivrečan. Zaista, za $a=2$ imamo $-2x+y+z=1,\quad x-2y+z=-2,\quad x+y-2z=4$. Ako saberemo ove tri jednačine dobijamo $0=3$, što je kontradikcija. ▶

2.12. Primer. *Rešiti i diskutovati sistem jednačina* $\begin{array}{rrrcr} ax & -y & -2z & = & 1 \\ 4x & -3ay & +5z & = & -3 \\ 2x & +y & -az & = & -1 \end{array}$.

Rešenje. Imamo da je

$$D=\begin{vmatrix} a & -1 & -2 \\ 4 & -3a & 5 \\ 2 & 1 & -a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-3 & -1 & -2 \\ 9-3a & -3a & 5 \\ 3-a & 1 & -a \end{vmatrix}=(a-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3a & 5 \\ -1 & 1 & -a \end{vmatrix}$$

$$=(a-3)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3(1+a) & -3a & 5 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix}=3(a-3)(2+a)(1+a),$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3a & 5 \\ -1 & 1 & -a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3a & 5 \\ 0 & 0 & -a-2 \end{vmatrix}=3(1+a)(a+2),$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 4 & -3 & +5 \\ 2 & -1 & -a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 4 & -3 & +5 \\ 2+a & 0 & -a-2 \end{vmatrix}=3(a+2)(a+1),$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 4 & -3a & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 4 & -3a & -3-3a \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=3(a+1)(a+2).$$

Prema tome, rešenje sistema je $x=y=z=\dfrac{3(a+1)(a+2)}{3(a-3)(1+a)(a+2)}$, ako je $a\neq -2,\ a\neq -1, a\neq 3$.

Diskusija sistema

Determinanta sistema je jednaka nuli za $a=-2$, $a=-1$ i $a=3$. Za $a\neq 2$, $a\neq -1$ i $a\neq 3$ sistem ima jedinstveno rešenje.

Ako je $a=-1$, tada je $D=0,\ D_x=0,\ D_y=0,\ D_z=0$. Sistem je neodređen, za $a=-1$ imamo

$$-x-y-2z=1,\quad 4x+3y+5z=-3,\quad 2x+y+z=-1.$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo trećoj dobijamo drugu jednačinu.

Ako je $a=-2$, tada je $D=0,\ D_x=0,\ D_y=0,\ D_z=0$. Sistem je neodređen, za $a=-2$ imamo

$$-2x-y-2z=1,\quad 4x+6y+5z=-3,\quad 2x+y+2z=-1.$$

Prva i treća jednačina su iste.

Ako je $a=3$, tada je $D=0,\ D_x\neq 0,\ D_y\neq 0,\ D_z\neq 0$. Sistem je protivrečan. Zaista, za $a=3$ imamo

$$3x-y-2z=1,\quad 4x-9y+5z=-3,\quad 2x+y-3z=-1.$$

Sabiranjem prve i treće jednačine dobijamo $5x-5z=0$, tj. $x=z$, a množeći treću jednačinu sa 9 i dodajući je drugoj jednačini dobijamo $22x-22z=-12$, što je u suprotnosti sa $x=z$. ▶

2.13. Primer. *Odrediti konstantu k tako da sistemi*

a) $\begin{array}{rrrcl} x & +y & -k & = & 0 \\ -2x & -3y & +3 & = & 0 \\ 3x & +2y & & = & 4k+1 \end{array}$; b) $\begin{array}{rrrcr} x & -y & +2k & = & 2 \\ 2x & -3y & & = & -2 \\ -x & -y & +k & = & -3 \end{array}$;

c) $\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2k-3 & = & 0 \\ -2x & -3y & & = & 1-3k-k^2 \\ 3x & +2y & & = & 4k-2 \end{array}$,

budu rešivi.

Rešenja. Ovde imamo tri jednačine sa dve nepoznate x i y, pa da bi sistem bio rešiv bar jedna jednačina mora biti linearna kombinacija ostalih dveju jednačina i tada jedna od jednačina sistema može da se izostavi. Znači determinanta sistema mora biti jednaka nuli.

a) Iz $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -k \\ -2 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -4k-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & -1 & 3-2k \\ 0 & -1 & -k-1 \end{vmatrix}=4-k=0$, sledi da je $k=4$.

Zaista, ako u dati sistem jednačina zamenimo dobijenu vrednost k dobijamo

$$x+y=4,\quad -2x-3y=-3,\quad 3x+2y=17.$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa 5 i dodamo drugoj dobijamo treću jednačinu. Znači, imamo dve jednačine $x+y=4$ i $2x+3y=3$, sa dve nepoznate. Rešenje sistema je $x=9, \quad y=-5$.

b) Kako je $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2k-2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & k+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2k-2 \\ 0 & -1 & -4k+6 \\ 0 & -2 & 3k+1 \end{vmatrix} = -11k+11=0,$

za $k=1$, zamenom $k=1$ u dati sistem dobija se

$$x-y=0, \quad 2x-3y=-2, \quad -x-y=-4.$$

Ako se druga jednačina pomnoži sa 6, a treća sa -3 dobijaju se jednačine $12x-18y=-12, \quad 3x+3y=12$. Njihov zbir je $15x-15y=0$, što je prva jednačina pomnožena sa 5, pa je ona nepotrebna. Rešenje sistema je $x=2$, $y=2$.

c) Sledi da je $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2k-3 \\ -2 & -3 & k^2+3k-1 \\ 3 & 2 & -4k+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2k-3 \\ 0 & -1 & k^2+7k-7 \\ 0 & -1 & -10k+11 \end{vmatrix} = k^2+17k-18=$ 0 za $k=-18$ i $k=1$. Ako je $k=-18$ imamo

$$x+y=39, \quad 2x+3y=269, \quad 3x+2y=-74.$$

Sabiranjem druge i treće jednačine dobijamo prvu jednačinu pomnoženu sa 5. Rešenje sistema je $x=-152$, $y=191$.
Ako je $k=1$, tada dobijamo sistem $x+y=1, \quad 2x+3y=3, \quad 3x+2y=2$. Sabiranjem druge i treće jednačine dobijamo prvu jednačinu pomnoženu sa 5. Rešenje sistema je $x=0$, $y=1$. ▶

2.14. Primer. *Da li se može odrediti konstanta a tako da sistemi*

a) $\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & -2az & = & 0 \\ x & -y & +az & = & 0 \\ ax & -y & +z & = & 0 \end{array}$; b) $\begin{array}{rrrcl} -3x & -y & +3az & = & 0 \\ x & +2y & -az & = & 0 \\ ax & -y & +z & = & 0 \end{array}$;

c) $\begin{array}{rrrrcl} x & +ay & +z & -t & = & 0 \\ -x & +y & +z & +at & = & 0 \\ ax & -y & +z & +t & = & 0 \\ -x & +y & +az & +t & = & 0 \end{array}$,

imaju i netrivijalna rešenja.

Rešenja. U ovom primeru sistemi su homogeni, jer su svi slobodni članovi jednaki nuli. Prema tome u a) i b) $x=y=z=0$, i u **c)** $x=y=z=t=0$ su sigurno rešenja, ali trivijalna. Međutim, ako je još i determinanta sistema jednaka nuli, tada sistem

može da ima i beskonačno mnogo rešenja.

a) Determinanta sistema je $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2a \\ 1 & -1 & a \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)(a-3)$,te je ona jednaka nuli za $a=1$, $a=3$.

Ako je $a=1$ imamo sistem $2x+y-2z=0, \quad x-y+z=0, \quad x-y+z=0$.
Druga i treća jednačina su iste pa imamo dve jednačine $2x+y=2z, \quad x-y=-z$, sa tri nepoznate, čija je determinanta sistema $-3\neq 0$. Birajući z proizvoljno i rešavajući sistem po x i y dobijamo $x=z/3$, $y=4z/3$.

Ako je $a=3$ imamo sistem $2x+y-6z=0, \quad x-y+3z=0, \quad 3x-y+z=0$.
Sabiranjem prve i druge jednačine dobijamo $3x-3z=0$, tj. $x=z$, što zamenom u prvu daje $y=4z$.

b) Iz $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 3a \\ 1 & 2 & -a \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5-5a^2\neq 0, \quad a\in\mathbb{R}$, sledi je da sistem protivrečan.

c) Determinanta sistema je

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & a \\ a & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (a+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1-a & 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (a+1)(1-a)\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)(1-a)\cdot(a^2+3).$$

Za $a=-1$ imamo sistem
$x-y+z-t=0, \quad -x+y+z-t=0, -x-y+z+t=0, \quad -x+y-z+t=0$.
Četvrta jednačina je ista kao i prva pa se izostavlja. Sabiranjem prve i druge jednačine dobija se $z=t$, a sabiranjem prve i treće dobija se $x=t$, odakle sledi da sistem ima rešenje $x=y=z\in\mathbb{R}$.

Ako je $a=1$ dobijamo sistem
$x+y+z-t=0, \quad -x+y+z+t=0, x-y+z+t=0, \quad -x+y+z+t=0$,
čija su rešenja $y=t=x=-z\in\mathbb{R}$. ▶

2.3.4 Rešavanje sistema jednačina pomoću matrica

Neka je dat sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array} \tag{2.22}$$

Sistem (2.22) možemo zapisati kao matričnu jednačinu

$$AX = B, \tag{2.23}$$

gde je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$

Matrica A naziva se **matrica sistema**, a matrica

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

se naziva **proširena matrica sistema**.

Ako matrica A ima inverznu matricu A^{-1}, tada je rešenje matrične jednačine (2.23) dato sa

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2.24}$$

Zbog nekomutativnosti množenja **mora se paziti** sa koje strane se matrica B množi matricom A^{-1}.

2.15. Primer. *Rešiti sisteme jednačina*

$$\text{a)} \quad \begin{array}{rrrcr} x & -y & +2z & = & 8 \\ -2x & +y & +z & = & -5 \\ 4x & -y & -3z & = & 7, \end{array} \qquad \text{b)} \quad \begin{array}{rrrcr} -x & +2y & -3z & = & -1 \\ 2x & -4y & +6z & = & 2 \\ x & -y & +2z & = & 3 \end{array}$$

pomoću matrica.

Rešenje.

a) Umesto datog sistema jednačina posmatraćemo ekvivalentnu matričnu jednačinu

$$AX = B,$$

gde je matrica sistema $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, a $B = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$. Determinanta sistema je -4 i inverzna matrica A^{-1} je $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. Prema tome rešenje matrične jednačine $AX = B$ je

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Odatle sledi da je $x = 3, \ y = -1, \ z = 2$.

b) Matrica sistema je singularna, pa ne možemo primeniti prethodno opisani postupak rešavanja. ▶

Važi sledeća teorema.

2.16. *[***Kroneker-Kapelijeva teorema***] Sistem linearnih jednačina (2.22) je saglasan (rešiv) ako je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema.*

U primeru 2.15 pod a) matrica sistema ima rang 3, a takođe i proširena matrica sistema $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$ ima rang 3.

U prethodnom primeru pod b) matrica sistema kao i proširena matrica sistema imaju rang 2. Sistem je rešiv i ima beskonačno mnogo rešenja $x = 5 - z, \ y = 2 + z, \ z = z$, gde je z proizvoljan realan broj.

Sistem $\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & +2y & +2z & = & 3 \\ x & -y & +2z & = & 3 \end{array}$ ima matricu sistema ranga 2, međutim, proširena matrica sistema $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ je ranga 3, jer je $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

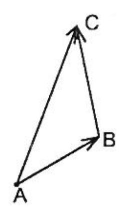
Pri rešavanju sistema linearnih jednačina pomoću inverzne matrice broj potrebnih operacija je velik i stoga je Gausova metoda podesnija za primenu.

2.4 Vektorska algebra

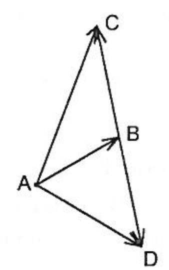
Veličine koje često srećemo u matematici, fizici i hemiji karakteriše samo jedan broj. Na primer, dužina, površina, zapremina i temperatura potpuno su određene jednim brojem. Takve veličine nazivaju se skalarima. Za razliku od njih, veličine koje zovemo vektorima, određuju tri faktora: pravac, smer i intenzitet. To su na primer, brzina kretanja čestice, ubrzanje i sila koja deluje u nekoj tački.

Radi reprezentacije vektora, pođimo od dve tačke A i B koje određuju duž AB. Dužina duži je *skalar* i to pozitivan, ako se tačke A i B razlikuju. Međutim, ako odredimo da je tačka A *prva* a tačka B druga tačka, onda smo u stvari uveli orijentaciju na pravoj AB, i to od tačke A ka tački B. U tom slučaju možemo govoriti o *uređenom paru* (A,B), u oznaci $\overrightarrow{AB}$, koji ćemo zvati vektor $\overrightarrow{AB}$. Dakle, vektor $\overrightarrow{AB}$ je određen **pravcem** ("nosačem" vektora $\overrightarrow{AB}$), **smerom** na pravoj AB (od A ka B) i dužinom duži AB tj. **intenzitetom** vektora $\overrightarrow{AB}$, koji ćemo obeležavati sa $|\overrightarrow{AB}|$.
Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su **istog** smera (**suprotnog** smera) istog pravca tj. ako su prave AB i CD paralelne i tačke B i D nalaze se sa *iste* (respektivno *suprotne*) strane prave AC.
Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su jednaki ako imaju isti pravac, imaju isti smer i isti intenzitet tj. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ (AB i CD su podudarne duži). Geometrijski, vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su jednaki ako postoji translacija koja prevodi vektor $\overrightarrow{AB}$ u vektor $\overrightarrow{CD}$.

Ako se tačke A i B poklapaju tada $\overrightarrow{AB}$ obrazuje nula vektor i označava se sa $\overrightarrow{0}$.



Slika 2.1.



Slika 2.2.

Nula vektor nema ni pravac ni smer.
Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ sabiraju se na sledeći način: (sl. 2.1.) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
Razlika dva vektora $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ se posmatra kao zbir vektora $\overrightarrow{AB}$ i $-\overrightarrow{BC}$.

Osobine operacije sabiranja vektora

Zbir dva vektora je vektor tj. $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$.

Za sabiranje vektora važi zakon **asocijacije**, tj. $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$.

Za svaki vektor $\overrightarrow{a}$ važi $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$.

Svaki vektor $\overrightarrow{a}$ ima suprotan vektor $-\overrightarrow{a}$, za koji je $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=(-\overrightarrow{a})+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$.

Za svaka dva vektora važi zakon komutacije tj. $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$.

Dakle, skup vektora čini komutativnu grupu u odnosu na operaciju sabiranja.

Ako je $m \in \mathbb{R}$ i $\overrightarrow{a}$ vektor, tada je $m\overrightarrow{a}$ vektor čiji je intenzitet $|m||\overrightarrow{a}|$, pravac je jednak pravcu vektora $\overrightarrow{a}$ a smer je jednak smeru vektora $\overrightarrow{a}$ za $m>0$, a suprotnom smeru vektora $\overrightarrow{a}$ za $m<0$. Ako je $m=0$ tada je $0\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$.

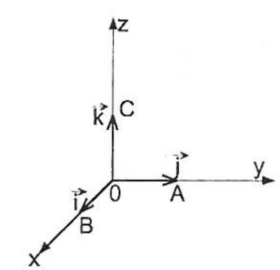
Osobine operacije množenja vektora realnim brojem (skalarom)

Za svaka dva vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ važe sledeće relacije:

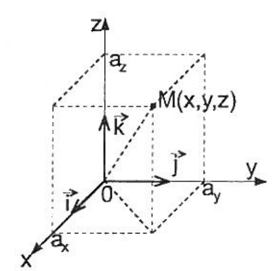
$1\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$;
$m(n\overrightarrow{a})=(mn)\overrightarrow{a}$, za sve $m,n \in \mathbb{R}$;
$(m+n)\overrightarrow{a}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{a}$, za sve $m,n \in \mathbb{R}$;
$m(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=m\overrightarrow{a}+m\overrightarrow{b}$, za sve $m \in \mathbb{R}$.

2.4.1 Vektori u Dekartovom koordinatnom sistemu

Neka je dat Dekartov pravougli koordinatni sistem sa osama x,y i z i tačkom O kao koordinatnim početkom (sl. 2.3.). Neka tačka A ima koordinate $(1,0,0)$, tačka B



Slika 2.3.



Slika 2.4.

ima koordinate $(0,1,0)$ i tačka C ima koordinate $(0,0,1)$. Vektori $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$ su definisani sa $\overrightarrow{i}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{j}=\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{k}=\overrightarrow{OC}$. Vektori $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$ se nazivaju koordinatni vektori ili ortovi.
Za svaki vektor $\overrightarrow{a}$ postoji jedinstvena tačka $M(a_x,a_y,a_z)$ (sl 2.4.) za koju je

$$\overrightarrow{OM}=a_x\overrightarrow{i}+a_y\overrightarrow{j}+a_z\overrightarrow{k}=\overrightarrow{a}.$$

Na taj način se uspostavlja obostrano jednoznačna korespondencija između vektora $\overrightarrow{a}$ i uređene trojke realnih brojeva $(a_x,a_y,a_y) \in \mathbb{R}^3$. Tako, na primer,

vektoru $\overrightarrow{i}$ odgovara uređena trojka $(1,0,0)$,
vektoru $\overrightarrow{j}$ odgovara uređena trojka $(0,1,0)$,
a vektoru $\overrightarrow{k}$ odgovara uređena trojka $(0,0,1)$.

Intenzitet vektora $\vec{a}$, u oznaci $|\vec{a}|$, je dat relacijom

$$|\vec{a}| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}.$$

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dati sa $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + c_z\vec{k}$, tada je **zbir** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektor

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}.$$

Ako je $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, tada je $m\vec{a} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{k}$, $m \in \mathbb{R}$, što se može zapisati u prostoru R^3 na sledeći način:

$$m(a_x, a_y, a_z) = (ma_x, ma_y, ma_z).$$

Na primer, za vektore $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}$, je

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9$, i

$$\vec{a} + \vec{b} = (3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}) + (\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}) = 4\vec{i} - 10\vec{j} + 10\vec{k},$$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}) - 2(\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}) = 7\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}.$$

2.4.2 Skalarni proizvod vektora

Skalarni proizvod dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \cdot \vec{b}$, definiše se kao proizvod intenziteta vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i kosinusa ugla koji obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i označava sa $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Znači da je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})). \tag{2.25}$$

Primetimo da je rezultat skalarnog proizvoda realan broj (skalar).

Ne nulti vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su ortogonalni, ako i samo ako je njihov skalarni proizvod jednak nuli. Na primer, vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$, i $\vec{b} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ su ortogonalni jer je važi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}) \cdot (5\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}) = 10 - 16 + 6 = 0.$$

Osobine skalarnog proizvoda

Za svaka tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ važe sledeće relacije:

a) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

d) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$, za svako $k \in \mathbb{R}$;

e) $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$.

Na primer, pokazaćemo da važe osobine a) i b) skalarnog proizvoda.

a) Po definiciji skalarnog proizvoda je
$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos(\angle(\vec{a}, \vec{a})) = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$.

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{b}||\vec{a}|\cos(\angle(\vec{b}, \vec{a})) = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2.17. Teorema. *Ako su vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *dati sa* $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, *i* $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, *tada je*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.26}$$

Dokaz. Vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ su uzajamno ortogonalni i intenziteta 1 tako da iz definicije skalarnog proizvoda, odnosno iz relacije (2.25) sledi

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, $\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.

Prema tome je

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) \\ &= a_x b_x(\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_y b_y(\vec{j} \cdot \vec{j}) + a_z b_z(\vec{k} \cdot \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.\end{aligned}$$ ▶

Na osnovu relacija (2.25) i (2.26) važi

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{2.27}$$

odakle se kosinus ugla između dva vektora izražava kao

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{2.28}$$

2.18. Primer. *Odrediti ugao između vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *ako su*

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ b) $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{k}$.

Rešenja.

a) Iz $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2+1}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sledi da je ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak $\frac{\pi}{6}$.

b) Iz $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{-6}{\sqrt{4^2+(-2)^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}} = -\frac{6}{\sqrt{24}\sqrt{2}}$, sledi da je ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$. ▶

Ako je vektor $\vec{a}$ dat sa $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{i}$, $\vec{j}$, i $\vec{k}$ su ortovi tada važi

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{i} &= |\vec{a}|\cos(\angle(\vec{a},\vec{i})) = a_x, \qquad \vec{a}\cdot\vec{j} = |\vec{a}|\cos(\angle(\vec{a},\vec{j})) = a_y,\\
\vec{a}\cdot\vec{k} &= |\vec{a}|\cos(\angle(\vec{a},\vec{k})) = a_z, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.
\end{aligned}$$

Uglovi koje vektor $\vec{a}$ zaklapa sa koordinatnim osama su prema tome dati sa

$$\cos(\angle(\vec{a},\vec{i})) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \qquad \cos(\angle(\vec{a},\vec{j})) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$
$$\cos(\angle(\vec{a},\vec{k})) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

Kako je $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle(\vec{a},\vec{b}))$ i $|\cos(\angle(\vec{a},\vec{b}))| \le 1$, to je

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|.$$

Na osnovu osobina a) i b) skalarnog proizvoda je

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2.$$

Kako je $\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ to je

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 \le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2,$$

odakle se dobija

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

2.4.3 Vektorski proizvod vektora

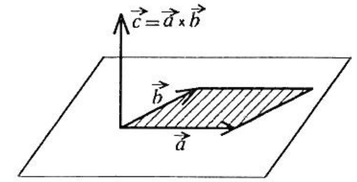
Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koji su različiti od vektora $\vec{0}$, definiše se kao vektor $\vec{c}$, u oznaci $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, čiji je

pravac određen normalom na ravan koju obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$;

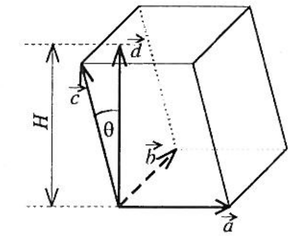
smer određen po pravilu desnog zavrtnja;

intenzitet $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle(\vec{a},\vec{b}))$ (sl.2.5.).

Ako je bar jedan od vektora $\vec{a}$ ili $\vec{b}$ jednak vektoru $\vec{0}$ tada je $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$.
Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, tada je $\sin(\angle(\vec{a},\vec{b})) = 0$, pa je $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$.
Vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ su uzajamno normalni, intenziteta 1, te iz definicije vektorskog



Slika 2.5.



Slika 2.6.

proizvoda sledi

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{0}, \quad \vec{j}\times\vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0},$$
$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}, \quad \text{odnosno}$$
$$\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}.$$

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dati sa $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, tada je

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})\\
&= a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j}) + a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k}) + a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i}) + a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})\\
&\quad + a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i}) + a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})\\
&= a_xb_y\vec{k} + a_xb_z(-\vec{j}) + a_yb_x(-\vec{k}) + a_yb_z\vec{i} + a_zb_x\vec{j} + a_zb_y(-\vec{i})\\
&= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Na osnovu toga se vektorski proizvod može izraziti pomoću determinanti na sledeći način:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Dakle, simbolički $\vec{a}\times\vec{b}$ se može zapisati pomoću "determinante"

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.29}$$

Osobine vektorskog proizvoda
Za svaka tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ važe sledeće relacije:

a) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$;

b) $(m\vec{a})\times\vec{b} = m(\vec{a}\times\vec{b})$, za svako $m \in \mathbb{R}$;

c) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$;

d) $\vec{a}\times(m\vec{a}) = 0$, za svako $m \in \mathbb{R}$.

2.19. Primer. *Dati su vektori*

a) $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$;

b) $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$.

Odrediti $\vec{a} \times \vec{b}$ *i* $\vec{b} \times \vec{a}$ *i pokazati da važi* $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Rešenje.

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ (razvijali smo determinantu po elementima prve vrste),

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = -(\vec{a} \times \vec{b})$$

b) $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 30\vec{j} + 12\vec{k},$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -7 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 30\vec{j} - 12\vec{k} = -(\vec{a} \times \vec{b}).$$ ▶

2.20. Primer. *Za vektore* $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$ *i skalar* $m = -3$ *proveriti tačnost osobina* **b)**, **c)** *i* **d)** *vektorskog proizvoda.*

Rešenje.

b) $$(m\vec{a}) \times \vec{b} = (-3(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})) \times (2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 6 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -3(\vec{a} \times \vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b}).$$

c) $$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2+7 & 3-1 & -5-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}).$$

d) Sledi na osnovu toga što je determinanta koja ima dve iste vrste jednaka nuli. ▶

2.21. Primer. *Ako je* $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *i* $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, *izvesti obrazac za određivanje ugla između vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *pomoću vektorskog proizvoda.*

Rešenje. Intenzitet vektorskog proizvoda je $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$. Prema tome je

$$\sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$ ▶

Intenzitet vektorskog proizvoda dva vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ jednak je površini paralelograma kojeg određuju ova dva vektora. Neka je h_a visina paralelograma koja odgovara stranici $AB = a$. Iz pravouglog trougla $BD'D$ sledi da je $h_a = |\vec{b}|\sin\theta$, gde je θ ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Dakle,

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{a}|h_a = P.$$

Može se pokazati da za svaka tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ važi relacija

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \tag{2.30}$$

2.22. Primer. *Pokazati na primeru vektora* $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$ *tačnost relacije (2.30).*

Rešenje. Odredićemo prvo $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Sledi da je

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -6 \end{vmatrix} = (-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \times (16\vec{i} + 26\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 16 & 26 & 2 \end{vmatrix} = 30\vec{i} - 14\vec{j} - 58\vec{k}.$$

S druge strane je

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = ((-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (4\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}))(5\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k})$$
$$-((-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (5\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}))(4\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k})$$
$$= -2(5\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) - (-10)(4\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}) = 30\vec{i} - 14\vec{j} - 58\vec{k}.$$ ▶

2.4.4 Mešoviti proizvod vektora

Neka su data tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Ako prvo vektorski pomnožimo vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odnosno odredimo vektor $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$, pa tako dobijeni vektor $\vec{d}$ skalarno pomnožimo sa trećim vektorom $\vec{c}$ dobijamo mešoviti proizvod vektora $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot$

$\vec{c}$. Dakle, mešoviti proizvod vektora je skalar.

Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ dati u trodimenzionalnom Dekartovom koordinatnom sistemu

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}, \quad \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k},$$

tada je na osnovu relacije (2.29)

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} &= ((a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}))\cdot(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)\cdot(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) \\
&= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z,
\end{aligned}$$

te je $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

Analogno se pokazuje da je $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Na osnovu osobine determinante da se njena vrednost ne menja ako prvo prva i druga vrsta, a zatim druga i treća vrsta zamene mesta, dobija se

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Primetimo da se ne može izvršiti ni množenje $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$, niti $\vec{a}\times(\vec{b}\cdot\vec{c})$, jer je skalarni proizvod skalar, a ne vektor.

2.23. Primer. *Odrediti mešoviti proizvod vektora*

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}, \qquad \vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} \quad i \quad \vec{c} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Rešenje. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -8.$ ▶

Geometrijsko tumačenje mešovitog proizvoda

Pokazaćemo da je $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = V$, gde je V zapremina paralelopipeda kojeg obrazuju tri vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.

Neka su dati vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ i $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

Zapremina paralelopipeda određenog dužima AB, AC i AD je $V = BH$, gde je B površina osnove koju obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a H visina paralelopipeda. Po definiciji skalarnog proizvoda je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos(\angle(\vec{d},\vec{c})),$$

gde je $\vec{d} = \vec{a}\times\vec{b}$. Geometrijski, intenzitet vektorskog proizvoda $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je površina paralelograma kojeg obrazuju duži AB i AC, te je

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = B.$$

Vektor $\vec{d}$ (koji predstavlja vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$) je vektor koji je normalan na ravan osnove paralelopipeda, odnosno vektor $\vec{d}$ se nalazi u pravcu visine paralelopipeda. Neka je θ ugao između vektora $\vec{c}$ i $\vec{d}$. Ako je taj ugao oštar, tada je $\cos\theta > 0$, pa se visina paralelopipeda H može predstaviti kao (sl.2.6.)

$$H = |\vec{c}|\cos\theta,$$

odakle sledi da je mešoviti proizvod tri vektora jednak zapremini paralelopipeda kojeg obrazuju ta tri vektora tj.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos(\angle(\vec{d},\vec{c})) = BH.$$

Ako je θ tup ugao, tada je $\cos\theta < 0$, pa je visina paralelopipeda $H = -|\vec{c}|\cos\theta$, odnosno

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos(\angle(\vec{d},\vec{c})) = -BH,$$

što znači da je apsolutna vrednost mešovitog proizvoda $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ jednaka zapremini paralelopipeda kojeg obrazuju tri vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$, odnosno

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = V.$$

2.24. Primer. *Dati su vektori*

1) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k};$

2) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{c} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}.$

Odrediti

a) *kosinuse uglove između svaka dva data vektora;*

b) *vektorske proizvode svaka dva data vektora;*

c) *površine trouglova koje obrazuju svaka dva data vektora;*

d) *visine paralelograma koje obrazuju svaka dva data vektora;*

e) *zapremine paralelopipeda koje obrazuju vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.*

Rešenja.

1) **a)** $\cos(\angle(\vec{a},\vec{b})) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{0+1-2}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{30}}$, $\quad\cos(\angle(\vec{b},\vec{c})) = \dfrac{1-2}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{15}}$, $\quad\cos(\angle(\vec{a},\vec{c})) = \dfrac{-2+1+1}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = 0$, pa je $\angle(\vec{a},\vec{c}) = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$, $\quad\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{j}+3\vec{k}$, $\quad\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

c) Površina paralelograma kojeg obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $P_{ab} = |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{29}$, a površina trougla je $P_{Tab} = \dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{c}$ površina paralelograma je $P_{ac} = |\vec{a}\times\vec{c}| = 3\sqrt{2}$, a površina trougla je $P_{Tac} = \dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{c}| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Za vektore $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je površina paralelograma $P_{bc} = |\vec{b}\times\vec{c}| = \sqrt{14}$, a površina trougla je $P_{Tbc} = \dfrac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{c}| = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

d) Visina paralelograma određenog vektorima $\vec{a} = \vec{AB}$ i $\vec{b} = \vec{AC}$, na stranicu a, koja je određena tačkama A i B, dobija se kao količnik površine paralelograma i intenziteta vektora $\vec{a}$ te je $h_{ab} = \dfrac{P_{ab}}{|\vec{a}|} = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{6}}$.

U slučaju paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{c}$ imamo $h_{ac} = \dfrac{P_{ac}}{|\vec{a}|} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$.

U slučaju paralelograma određenog vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$ sledi da je $h_{bc} = \dfrac{P_{bc}}{|\vec{c}|} = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$.

e) $V = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9.$

2) **a)** $\cos(\angle(\vec{a},\vec{b})) = \dfrac{2-1+1}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \dfrac{2}{3\sqrt{2}}$, $\quad\cos(\angle(\vec{a},\vec{c})) = \dfrac{3-3+2}{\sqrt{3}\sqrt{22}} = \dfrac{2}{\sqrt{66}}$,

$\cos(\angle(\vec{b},\vec{c})) = \dfrac{6+3+2}{\sqrt{6}\sqrt{22}} = -\dfrac{11}{2\sqrt{33}}$.

b) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$,

$\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 5\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k}$, $\quad\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$.

c) U ovom slučaju je $P_{ab} = |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{14}$ i površina trougla $P_{Tab} = \dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Za vektore $\vec{a},\vec{c}$ je $P_{ac} = |\vec{a}\times\vec{c}| = \sqrt{62}$, $P_{Tac} = \dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{c}| = \dfrac{\sqrt{62}}{2}$.

Za vektore $\vec{b},\vec{c}$ je $P_{bc} = |\vec{b}\times\vec{c}| = \sqrt{11}$, $P_{Tbc} = \dfrac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{c}| = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

d) Analogno kao u 1) sledi da je

$$h_{ab} = \frac{P_{ab}}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}},\qquad h_{ac} = \frac{P_{ac}}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{3}},\qquad h_{bc} = \frac{P_{bc}}{|\vec{c}|} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{22}}.$$

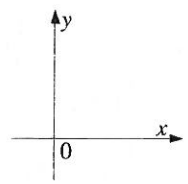
e) $V = \left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}\right| = |-3| = 3.$ ▶

2.5 Analitička geometrija

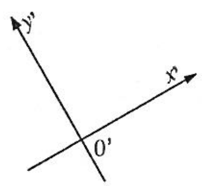
Koristeći koordinate tačaka u odnosu na neki koordinatni sistem, analitička geometrija svojim metodama opisuje skupove tačaka datih nekim svojstvima. Među tim svojstvima su na primer: **rastojanje dve tačke, rastojanje tačke od prave i ravni, koordinate tačke koja datu duž deli u nekom odnosu, površina trougla ako su date koordinate temena, udaljenost tačaka u trodimenzionalnom prostoru za 2 jedinice od date prave, itd.** Koordinatni sistemi koji se pri tom koriste, mogu biti različite prirode, kako na pravoj, tako i u ravni i prostoru. Otuda i razne vrste koordinata tačaka. Pomenimo **pravougle, kosougle, polarne, sferne, cilindrične i krivolinijske koordinate.** Jedan isti skup tačaka se u odnosu na jedan sistem može opisati jednostavnijom jednačinom nego u odnosu na drugi sistem (jednačina kruga poluprečnika 1 u odnosu na pravougli i polarni sistem). Zato, ako opisivanje nekog skupa tačaka nije zgodno u odnosu na neki sistem, onda se vrši transformacija koordinata uvođenjem novog sistema u odnosu na koji je ispitivanje tog skupa tačaka svrsishodnije.

2.5.1 Translacija i rotacija sistema.

Pretpostavimo da su data dva pravougla koordinatna sistema Oxy i $O'x'y'$ u istoj ravni (dvodimenzionalnom prostoru) (sl.2.7.). Ako je M neka tačka te ravni onda ona ima koordinate x i y u odnosu na sistem Oxy i koordinate x' i y' u odnosu na sistem $O'x'y'$. Jasno je da su koordinate (x,y) i (x',y')tačke M u nekoj vezi. Pokušaćemo da ustanovimo tu vezu i samim tim vezu između osa ta dva pravougla sistema iste ravni. Pretpostavimo da je pravougli sistem $O'x'y'$ dobijen



Slika 2.7.



Slika 2.8.

pomeranjem-**translacijom** x i y osa paralelno svojim položajima, tako što je koordinatni početak O pomeren u početak O' (sl.2.8.) To znači da su jedinični vektori paralelnih osa jednaki. Označimo ih uobičajeno sa $\vec{i}$ i $\vec{j}$.

Neka su $\vec{r}$ i $\vec{r}'$ respektivno radijus vektori tačke M u odnosu na početke O i O' datih pravouglih koordinatnih sistema Oxy i $O'x'y'$ (sl.2.9.). Tada imamo

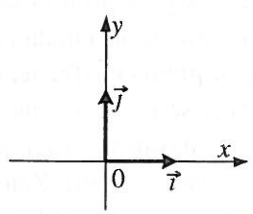
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{i} \quad \vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}, \quad \text{kao i} \quad \overrightarrow{OO'} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j},$$

gde su α i β koordinate tačke O' u odnosu na sistem Oxy.
Pošto je

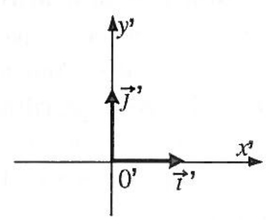
$$\vec{r} = \vec{r}' + \overrightarrow{OO'}, \quad \text{to je} \quad x\vec{i} + y\vec{j} = \left(x'\vec{i} + y'\vec{j}\right) + \left(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}\right).$$

Odatle su $\quad x = x' + \alpha \quad$ i $\quad y = y' + \beta,$

veze između koordinata (x,y) i (x',y')tačke M u odnosu na sisteme Oxy i $O'x'y'$.



Slika 2.9.



Slika 2.10.

Pretpostavimo sada da su ose x' i y' dobijene respektivno **rotacijom** osa x i y za ugao φ oko koordinatnog početka O sistema Oxy. Ovo znači da koordinatni sistemi Oxy i $O'x'y'$ imaju zajednički početak $O = O'$ (sl.2.10.).

Sada ćemo naći koordinate jediničnih vektora $\vec{i}'$ i $\vec{j}'$ u odnosu na sistem Oxy (sl.2.11.). Lako se vidi da su koordinate jediničnog vektora $\vec{i}'$ kosinusi uglova φ i

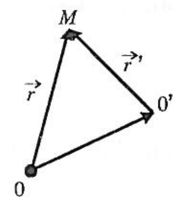
$\frac{\pi}{2} - \varphi$ koje ih on respektivno gradi sa x i y osom. Zato možemo pisati

$$\vec{i}' = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi.$$

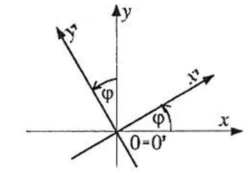
Slično, koordinate jediničnog vektora $\vec{j}'$ su kosinusi uglova $\varphi + \frac{\pi}{2}$ i φ tako da imamo

$$\vec{j}' = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi.$$

Pošto su za proizvoljnu tačku M njeni radijus vektori $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ i $\vec{r}' = x\vec{i}' + y\vec{j}'$ jednaki, tj. $x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i}' + y\vec{j}',$ onda zamenjujući izraze za $\vec{i}'$ i $\vec{j}'$ u poslednju jednakost, dobijamo



Slika 2.11.



Slika 2.12.

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} &= x'\left(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right) + y'\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right) \\ &= \left(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\right)\vec{i} + \left(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\right)\vec{j}. \end{aligned}$$

Odatle su

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \text{ i } y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi,$$

veze koordinata (x,y) i (x',y')tačke M u odnosu na stari i novi pravougli sistem.

2.25. Primer. *Koju liniju u ravni Oxy predstavlja jednačina $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$?*

Rešenje. Grupisanjem članova (dopunjavanjem do potpunog kvadrata) imamo $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$. Ako uzmemo da je $x = x' + 1, y = y' + 1$ onda data jednačina postaje

$$x'^2 + y'^2 = 3^2,$$

tj. ona predstavlja krug poluprečnika 3 sa centrom u koordinatnom početku O' sistema $O'x'y'$ koji je dobijen translacijom sistema Oxy. ▶

2.26. Primer. *Date su jednačine* a) $x^2 - y^2 = 1$; b) $y = x$.

Kako glase ove jednačine u sistemu $Ox'y'$ koji je dobijen rotacijom sistema Oxy oko tačke O za $\frac{\pi}{4}$.

Rešenja. Najpre imamo veze starih x i y sa novim koordinatama x' i y' :

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y &= x'\sin\tfrac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'). \end{aligned}$$

a) Jednačina $x^2-y^2=1$ postaje $x'y'=-\frac{1}{2}$. **b)** Jednačina $y=x$ postaje $y'=0$.

Vidimo da isti skup tačaka u jednom sistemu ima "komplikovaniju" ili "jednostavniju" jednačinu nego u drugom sistemu.▶

2.5.2 Krive drugog reda

Pretpostavimo da u ravni imamo pravougli koordinatni sistem Oxy. Skup tačaka ravni čije koordinate zadovoljavaju jednačinu

$$F(x,y)=0, \tag{2.31}$$

gde je F funkcija sa dve promenljive, zove se ravna kriva. Jednačina (2.31) je jednačina te ravne krive.

Na primer, jednačina $x+y=0$ je jednačina linije koja deli drugi i četvrti kvadrant na jednake delove, i $x^2+y^2-1=0$ je jednačina kružnice sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom jednakim jedan.

Posmatrajmo sada polinom drugog stepena sa dve promenljive x i y :

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \tag{2.32}$$

gde je $a_{11}^2+a_{22}^2+a_{12}^2>0$.

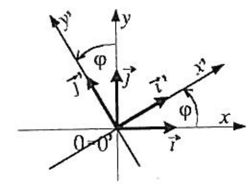
Jednačina $F(x,y)=0$ se zove **jednačina krive drugog reda.** Poznata je u literaturi i kao **algebarska jednačina drugog stepena sa dve promenljive.**

Navedena jednačina predstavlja u ravni razne skupove tačaka ($\emptyset$; **dve paralelne prave; dve prave koje se poklapaju; dve prave koje se seku; kružnicu; elipsu; hiperbolu i parabolu**) i to sve u zavisnosti od datih koeficijenata $a_{ij}, i,j=1,2,3$. Da bismo znali koji od navedenih skupova tačaka u ravni Oxy predstavlja jednačina $F(x,y)=0$, najpre ćemo navesti kanonske (kanoničke) jednačine i glavne osobine standardnih krivih drugog reda (koje se još i zovu-konusni preseci).

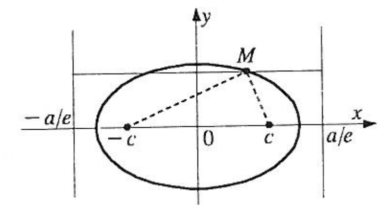
Elipsa

Standardna jednačina elipse je

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>0,\ b>0.$$



Slika 2.13.



Slika 2.14.

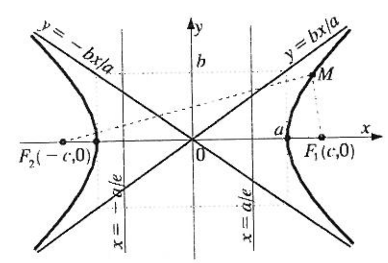
Brojevi a i b se redom zovu poluose elipse. Ako je $a>b$ onda se žiže elipse nalaze na x osi, u suprotnom one su na y osi. Žiže F_1 i F_2 su respektivno date koordinatama $(-c,0)$ i $(c,0)$, gde je $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Količnik $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=e$ zove se **ekscentricitet** elipse. Očigledno je za elipsu $0<e<1$, u slučaju da je $e=0$ $(a=b)$ elipsa postaje krug. Prave $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$ se zovu **direktrise** elipse (sl.2.14.). Ako je $0<a<b$ onda su žiže elipse na ordinatnoj osi.

Hiperbola

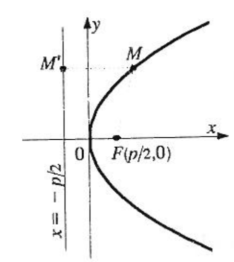
Hiperbola je kriva u ravni čija je jednačina

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>0,\ b>0.$$

Pri ovakvoj jednačini (temena hiperbole su na x osi) a se zove realna a b imaginarna poluosa. Žiže F_1 i F_2 su respektivno date koordinatama $(-c,0)$ i $(c,0)$, gde je $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Količnik $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=e$ zove se **ekscentricitet** hiperbole.. Očigledno je za hiperbolu $e>1$. Prave $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$ se zovu **direktrise** hiperbole, dok prave $y=\pm\frac{b}{a}x$ su njene **asimptote** (sl.15). Ako jednačina ima oblik $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ onda su žiže hiperbole na y osi.



Slika 2.15.



Slika 2.16.

Parabola

Parabola je skup tačaka u ravni čija je jednačina $y^2 = 2px$, $p \neq 0$. **Žiža** F parabole ima koordinate $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ a jednačina **direktrise** je $x = -\frac{p}{2}$. Teme parabole je tačka $O(0,0)$. Napomenimo da je **ekscentricitet** parabole $e = 1$ (sl.2.16.). Ako je jednačina parabole data sa $x^2 = 2qy$ onda je y osa njena osa simetrije i žiža se onda nalazi na y osi.

2.5.3 Opšta jednačina krive drugog reda

Za navedenu algebarsku jednačinu drugog stepena sa dve promenljive imamo postupak na osnovu koga se dobija skup tačaka ravni Oxy koje zadovoljavaju datu jednačinu.

2.27. Teorema. *Neka je u ravni dat pravougli koordinatni sistem Oxy i neka je*

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \tag{2.33}$$

polinom drugog stepena sa dve promenljive x i y.

Tada postoji pravougli koordinatni sistem $O'x'y'$ tako da se koristeći veze između x, y i x', y' polinom $F(x,y)$ svodi na polinom $F(x',y')$ koji može imati jedan od sledeća tri oblika:

$$\begin{aligned} a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a_{33},\ a'_{11} \cdot a'_{22} &\neq 0; \\ a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x',\ a'_{22} \cdot a'_{13} &\neq 0; \\ a'_{22}y'^2 + a'_{33},\ a'_{22} &\neq 0. \end{aligned}$$

Dokaz. I korak. Birajući zgodnu rotaciju koordinatnih osa x i y možemo eliminisati član $2a_{12}xy$ iz $F(x,y)$. Neka je $a_{12} \neq 0$. Posmatrajmo pravougli sistem $Ox'y'$ dobijen iz polaznog sistema Oxy rotacijom x i y osa za ugao φ. Nove i stare koordinate su kao što znamo, povezane jednačinama

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \qquad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

Zamenjujući x i y preko x' i y', svodimo član $2a_{12}xy$ na član $2a'_{12}x'y'$, gde je

$$\begin{aligned} 2a'_{12} &= 2\left(-a_{11}\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + a_{22}\sin\varphi\cos\varphi\right) \\ &= (a_{22} - a_{11})\sin 2\varphi + 2a_{12}\cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Da bismo eliminisali $2a'_{12}x'y'$ iz polinoma $F(x',y')$ dovoljno je staviti $2a'_{12} = 0$. Odatle se dobija

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Iz dobijene jednakosti možemo naći vrednost ugla φ za koji treba rotirati polazne koordinatne ose da bismo eliminisali član $2a'_{12}x'y'$ iz polinoma $F(x',y')$. Drugim rečima, uvek možemo odabrati koordinatni sistem tako da se u odnosu na njega polazni polinom svodi na oblik

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_3,$$

gde je $a_{11}^2 + a_{22}^2 > 0$. U nastavku ćemo smatrati da svaki polinom drugog stepena sa dve promenljive ima taj oblik. Pretpostavka da je $a_{22} \neq 0$ ne utiče na opštost razmatranja.

II korak. 1^0 : $a_{11} \cdot a_{22} \neq 0$: Dopunjavanjem do potpunog kvadrata svakog od sabiraka $a_{11}x^2 + 2a_{13}x$ i $a_{22}y^2 + 2a_{23}y$, lako dolazimo do jednačine

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a'_{33},\ a_{11} \cdot a_{22} \neq 0;$$

u odnosu na koordinatni sistem $O'x'y'$koji je dobijen translacijom sistema Oxy.

2^0 $a_{11} = 0$, $a_{13} \neq 0$: Dopunjavanjem do kvadrata sabirka $a_{22}y^2 + 2a_{23}y$ dolazimo do jednačine

$$a_{22}y'^2 + 2a_{13}x',\ a_{22} \cdot a_{13} \neq 0;$$

u odnosu na koordinatni sistem $O'x'y'$ dobijen translacijom sistema Oxy.

3^0 $a_{11} = 0$, $a_{13} = 0$: Pošto je ostao samo zbir $a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33}$ onda njegovim dopunjavanjem do potpunog kvadrata, dobijamo jednačinu

$$a'_{22}y'^2 + a'_{33},\ a'_{22} \neq 0$$

u odnosu na koordinatni sistem $O'x'y'$ dobijen translacijom sistema Oxy.

2.28. Primer. *Koji skup tačaka ravni Oxy zadovoljava jednačinu:* $x^2 + y^2 + xy + x + y = 0$?

Rešenje. Imamo da je $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = \frac{1}{2}$ te je $\operatorname{ctg} 2\varphi = 0$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Sada je

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \text{ i } y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

na osnovu veze x i y sa x' i y' pri rotaciji sistema Oxy za ugao $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Zamenjivanjem tako dobijenih x i y u datu algebarsku jednačinu drugog stepena sa dve promenljive, dobijamo oblik bez proizvoda koordinata

$$3x'^2 + 2\sqrt{2}x' + y'^2 = 0.$$

Njega lako dopunjavanjem do potpunog kvadrata svodimo na oblik:

$$3\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2-\frac{2}{3}+y'^2=0$$

tj. na oblik $3x''^2+y''^2=\frac{2}{3}$. Očigledno je da smo stavili $x''=x'+\frac{\sqrt{2}}{3}, y''=y'$ (translacija sistema $Ox'y'$). Dakle, u sistemu $O'x''y''$ algebarska jednačina $x^2+y^2+xy+x+y=0$ ima oblik

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}+\frac{y''^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}=1,$$

što predstavlja **elipsu** sa poluosama $a=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $b=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Veze starih sa najnovijim koordinatama glase

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}x''-\frac{1}{\sqrt{2}}y''-\frac{1}{3} \quad \text{i} \quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}x''+\frac{1}{\sqrt{2}}y''-\frac{1}{3}.$$

Žiže elipse su na osi y''.▶

2.5.4 Površi drugog reda

Neka je dat pravougli koordinatni sistem $Oxyz$ u trodimenzionalnom prostoru. Skup tačaka čije koordinate x,y,z zadovoljavaju jednačinu

$$F(x,y,z)=0 \tag{2.34}$$

zove se **površ** u trodimenzionalnom prostoru. Jednačina (2.34) se zove **jednačina površi.** Tako na primer jednačina

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0 \ (a>0)$$

je jednačina **sfere** poluprečnika a sa centrom u tački $(0,0,0)$.

Opšta algebarska jednačina površi drugog reda ima oblik

$$\Phi_3(x,y,z)+L_3(x,y,z)+a_{44}=0$$

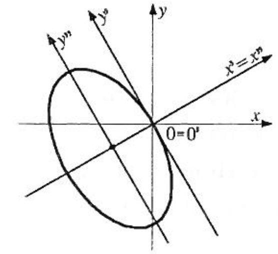
gde je $\Phi_3(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}xz$ kvadratna forma sa tri promenljive, pod uslovom da je bar jedan od $a_{ij}\neq 0, i,j=1,2,3,$

$$L_3(x,y,z)=2a_{23}z+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z$$

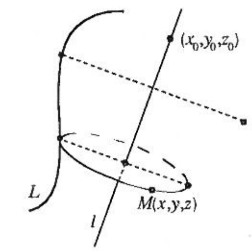
linearna forma sa tri promenljive i a_{44} slobodan član.

Ova opšta algebarska jednačina određuje bogat skup površi. Njeno ispitivanje je

komplikovanije od ispitivanja odgovarajuće opšte algebarske jednačine drugog stepena sa dve promenljive. Ovde ćemo najpre izvesti jednačine nekih specijalnih vrsta površi (**obrtne, cilindrične** i **konusne**).



Slika 2.17.



Slika 2.18.

2.5.5 Opšta obrtna površ.

Obrtna površ se definiše kao skup tačaka u prostoru koje se dobijaju rotacijom date krive oko neke prave (**ose rotacije**). Izvedimo jednačinu obrtne površi. Neka je kriva L data kao presek dve površi, tj. $\varphi_i(x,y,z)=0, i=1,2$ a osa l rotacije u obliku: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$. Proizvoljna tačka $M(x,y,z)$ obrtne površi pripada promenljivoj kružnici (presek sfere i ravni):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\alpha^2 \tag{2.35}$$

$$mx+ny+pz=\beta. \tag{2.36}$$

Eliminacijom promenljivih x,y,z iz (2.35),(2.36) i $\varphi_i(x,y,z)=0, i=1,2$; dobijamo **karakterističnu** jednačinu obrtne površi u obliku: $\Phi(\alpha,\beta)=0$. Sada je

$$\Phi\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}, mx+ny+pz\right)=0$$

jednačina obrtne površi (sl.2.18.).

2.29. Primer. *Parabola $z=x^2$, $y=0$ rotira oko z ose. Napisati jednačinu tako dobijene površi.*

Rešenje. Ovde je $\varphi_1(x,y,z)=z-x^2$, $\varphi_2(x,y,z)=y$; osa rotacije ima jednačinu:

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{1}.$$

Promenljiva kružnica je data sa: $x^2+y^2+z^2=\alpha^2, \quad z=\beta.$

Karakteristična jednačina se dobija eliminacijom promenljivih x,y,z iz φ_1,φ_2 i promenljive kružnice. Pošto je $y=0$, $z=\beta$ to je $x^2=\beta$ i onda je $\beta+\beta^2=\alpha^2$ karakteristična jednačina obrtne površi. Zamenjivanjem β sa z i α^2 sa $x^2+y^2+z^2$ dobijamo da je $z=x^2+y^2$ jednačina dobijene obrtne površi. ▶

2.5.6 Opšta cilindrična površ.

Neka je data kriva $L:\varphi_i(x,y,z)=0, i=1,2$ i vektor $\vec{l}=(m,n,p)$. Skup svih pravih u prostoru koje prolaze kroz tačke krive L paralelno vektoru $\vec{l}$ zove se **cilindrična površ**. Izvedimo jednačinu te površi. Uzmimo proizvoljnu pravu paralelnu datom vektoru koja sadrži tačku $M_1(x_1,y_1,z_1)$ date krive. Ako je $M(x,y,z)$ bilo koja tačka te prave, onda je

$$\varphi_i(x_1,y_1,z_1)=0, \quad i=1,2 \tag{2.37}$$

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}. \tag{2.38}$$

Iz (2.37) i (2.38) (četiri jednačine-tri nepoznate: x_1,y_1,z_1) eliminišimo x_1,y_1,z_1. Rezultat te eliminacije je jednačina oblika $F(x,y,z)=0$, koja predstavlja jednačinu cilindrične površi. Kriva L se zove **direktrisa** cilindrične površi a prave paralelne datom vektoru koje prolaze kroz tačke date krive zovu se **generatrise** površi (sl.2.19.).

2.30. Primer . *Napisati jednačinu cilindrične površi ako je direktrisa data jednačinama*

$$x^2+y^2=1, \qquad z=1,$$

a generatrise su paralelne z osi.

Rešenje. S obzirom da je vektor z ose na primer $(0,0,1)$ to jednačine (2.37) i (2.38) (ima ih ukupno 4), glase:

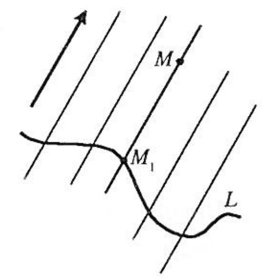
$$x_1^2+y_1^2=1, \qquad z_1=1, \qquad \frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{1}.$$

Eliminacijom x_1,y_1 i z_1 iz njih dobijamo: $x_1=x, y_1=y, z_1=1$. Zamenjivanjem u prvu jednačinu nalazimo da je $x^2+y^2=1$ tražena jednačina cilindrične površi. ▶

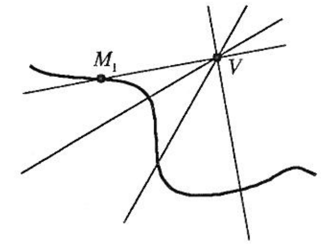
2.5.7 Opšta konusna površ.

Neka je data kriva $L:\varphi_i(x,y,z)=0, i=1,2$ i tačka $V(a,b,c)$. Skup svih pravih u prostoru koje prolaze kroz tačku V i svaku tačku krive L zove se **konusna** površ. Izvedimo njenu jednačinu. Uzmimo pravu određenu datom tačkom V i proizvoljnom tačkom $M_1(x_1,y_1,z_1)$ date krive. Ako je $M(x,y,z)$ bilo koja tačka prave VM_1, imamo:

$$\frac{x-a}{x_1-a}=\frac{y-b}{y_1-b}=\frac{z-c}{z_1-c} \tag{2.39}$$



Slika 2.19.



Slika 2.20.

$$\varphi_i(x_1,y_1,z_1)=0, \qquad i=1,2; \tag{2.40}$$

Eliminacijom promenljivih x_1,y_1,z_1 iz (2.39) i (2.40) (četiri uslova-tri nepoznate) dobijamo jednačinu oblika $F(x,y,z)=0$, koja predstavlja jednačinu konusne površi. Kriva L se zove **direktrisa** a tačka V **vrh** konusne površi (sl.2.20.).

2.31. Primer. *Napisati jednačinu konusne površi ako je vrh je tačka* $V(0,0,0)$, *a direktrisa je data sa* $x^2+y^2=1, \quad z=1$.

Rešenje. Jednačine (2.39) i (2.40) glase:

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}, \qquad x_1^2+y_1^2=1, \qquad z_1=1.$$

Iz njih dobijamo: $x_1=\frac{x}{z}$, $y_1=\frac{y}{z}$ jer je $z_1=1$. Rezultanta eliminacije je jednačina

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2=1$$

ili ekvivalentna jednačina $x^2+y^2=z^2$, koja predstavlja jednačinu traženog konusne površi. ▶

2.5.8 Standardne jednačine površi drugog reda

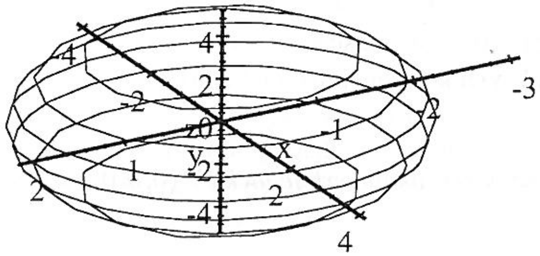
Kao što u pravouglom koordinatnom sistemu ravni (dvodimenzionalnog prostora) imamo kanonske jednačine standardnih krivih drugog reda, tako i u trodimenzionalnom prostoru u odnosu na zgodno odabrani pravougli koordinatni sistem imamo kanonske jednačine standardnih površi drugog reda. Svaka od navedenih jednačina koje slede su specijalni slučajevi opšte algebarske jednačine drugog stepena sa tri promenljive.

Elipsoid.

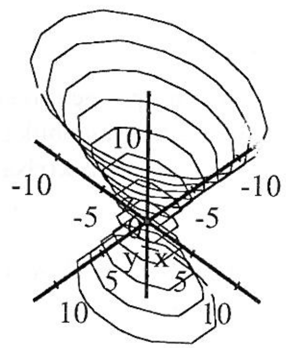
Površ drugog reda data jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

gde su a,b,c pozitivni realni brojevi (polu-ose), zove se **elipsoid** (sl. 2.21.). Centar elipsoida je koordinatni početak i očigledno svaka koordinatna ravan ga seče po elipsi. Specijalno, ako je $a=b=c>0$ elipsoid postaje **sfera** sa centrom u tački $O(0,0,0)$ i poluprečnikom $r=a$.



Slika 2.21.



Slika 2.22.

Hiperboloidi.

Površ drugog reda data jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

gde su a,b,c pozitivni realni brojevi (polu-ose), zove se **jednokrilni hiperboloid** (sl.2.22.). Nije teško pokazati da se rotacijom hiperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ oko z ose dobija površ čija je jednačina

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

dakle jednokrilni hiperboloid kod koga je $a=b$.

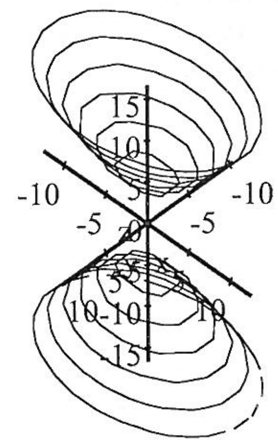
Površ drugog reda sa jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

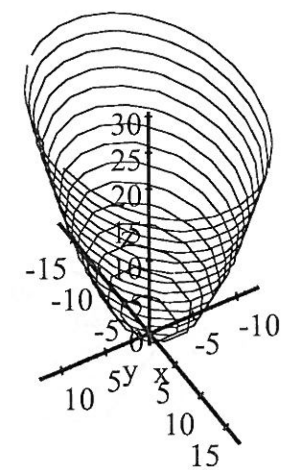
zove se **dvokrilni hiperboloid** (sl.2.23.). Rotacijom konjugovane hiperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ oko z ose dobija se površ

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

znači dvokrilni hiperboloid sa $a=b$.



Slika 2.23.



Slika 2.24.

Eliptički paraboloid.

Površ drugog reda čija je jednačina

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \qquad p\cdot q>0,$$

zove se **eliptički paraboloid** (sl.2.24.). Može se pokazati da se rotacijom parabole $x^2=2pz$ $(p\neq 0)$ oko z ose dobija površ čija je jednačina

$$x^2+y^2=2pz,$$

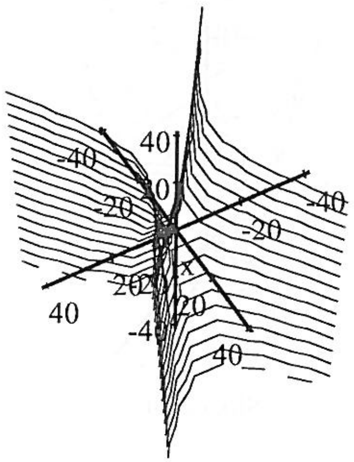
i ona se zove **kružni paraboloid**. Presek ove površi sa ravni $z=c$ je elipsa ili tačka. Presek sa ostale dve koordinatne ravni ili sa ravnima njima paralelnim je parabola. Odatle je i poreklo naziva površi.

Hiperbolički paraboloid.

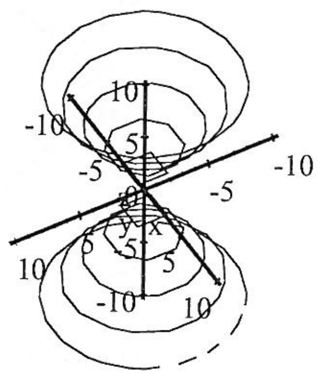
Površ drugog reda čija je jednačina

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \qquad p \cdot q < 0,$$

zove se **hiperbolički paraboloid** (sl.2.25.). Presek ove površi sa bilo kojom ravni $z = c \neq 0$ je hiperbola, dok je njen presek sa ravni $z = 0$ koordinatni početak. Presek ove površi sa ostale dve koordinatne ravni je parabola. Otuda i naziv površi.



Slika 2.25.



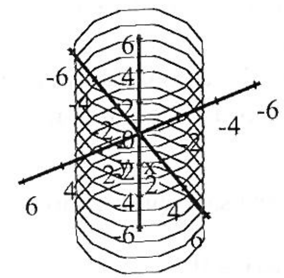
Slika 2.26.

Konusi drugog reda.

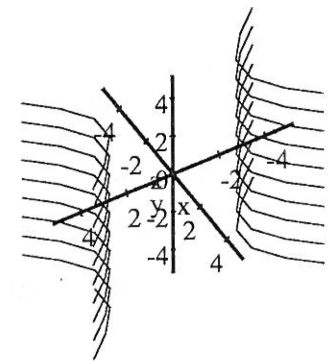
Površ drugog reda čija je jednačina u kanonskom obliku

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

gde su a, b, c pozitivni brojevi, zove se **konus drugog reda** (sl.2.26.). Vrh konusa je koordinatni početak a $z-$osa je osa simetrije konusa. Presek konusa sa ravni koja je normalna na osu z je elipsa. Ranije definisana konusna površ u odnosu na neki pravougli sistem u trodimenzionalnom prostoru ima kanonski oblik.



Slika 2.27.



Slika 2.28.

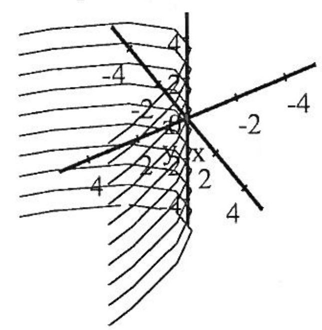
Cilindri.

Navodimo tri vrste cilindričnih površi, tj.njihove kanonske jednačine:

a) **eliptički cilindar** (sl.2.27.) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

b) **hiperbolički cilindar** (sl.2.28.) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

c) **parabolički cilindar** (sl.2.29.) $y^2 = 2px$;
U svakom od navedenih slučajeva (elipsa, hiperbola, parabola) kriva se zove direktrisa (vodilja) a generatrise su paralelne sa $z-$osom.



Slika 2.29.

2.5.9 O jednoj opštijoj jednačini drugog stepena

Razmotrimo sada jednačinu oblika

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (2.41)$$

Vidimo da ona ne sadrži proizvode različitih promenljivih i slično kao kod opšte algebarske jednačine drugog stepena sa dve promenljive koja ne sadrži proizvod

xy, može se grupisanjem članova dopunjavanjem do potpunog kvadrata dobiti neka od pobrojanih površi. Naime, data jednačina može da predstavlja: $\emptyset$, **elipsoid, konusnu površ, jednokrilni i dvokrilni hiperboloid, par paralelnih i neparalelnih ravni, cilndričnu površ-eliptičku, hiperboličku i paraboličku, i eliptički i hiperbolički paraboloid.**

Što se tiče opšte algebarske jednačine drugog stepena sa tri promenljive date kao

$$\Phi_3(x,y,z)+L_3(x,y,z)+a_{44}=0$$

gde je

$$\Phi_3(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}xz,$$

$$L_3(x,y,z)=2a_{23}z+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z,$$

i a_{44} slobodan član, promenom pravca osa koordinatnog sistema ona se može dovesti na prethodni oblik (ne sadrži proizvode različitih promenljivih). Za to se koriste linearne transformacije i njihove sopstvene vrednosti i sopstveni vektori, što izlazi iz okvira ovog programa. Time se onda pokazuje da opšta algebarska jednačina drugog stepena sa tri promenljive može predstavljati samo jednu od maločas nabrojanih površi.

2.32. Primer. *Koje površi drugog reda predstavljaju jednačine:*

a) $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z=0$;

b) $2x^2+2y^2+3z^2+4x+2y+z=0$;

Rešenja. a) Dopunjavanjem do potpunog kvadrata, dobijamo

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z=(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2-3,$$

tj.

$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=\sqrt{3}^2.$$

Data jednačina predstavlja sferu sa centrom u tački $(-1,-1,-1)$ i poluprečnikom $\sqrt{3}$.

b) Na sličan način, imamo

$$\begin{aligned}2x^2+2y^2+3z^2+4x+2y+z &= 2(x^2+2x+1)-2+2(y^2+y)+3\left(z^2+\tfrac{z}{3}\right)\\ &= 2(x+1)^2+2\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2+3\left(z+\tfrac{1}{6}\right)^2-\tfrac{31}{12},\end{aligned}$$

odakle sledi da jednačina predstavlja elipsoid

$$2x'^2+2y'^2+3z'^2=\frac{31}{12},$$

gde smo uzeli $x=x'-1, y=y'-\frac{1}{2}, z=z'-\frac{1}{6}$. ▶

Da bismo razmotrili neka pitanja koja se obično postavljaju u analitičkoj geometriji u vezi sa ravni i pravom i njihovim međusobnim odnosom koristićemo napred izložene rezultate iz vektorske algebre i pojam koordinata.

2.5.10 Ravan

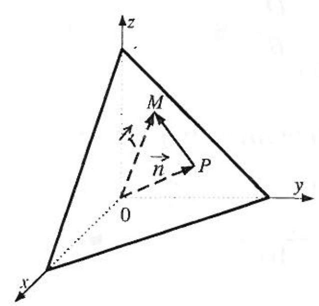
Neka je data ravan α u prostoru, i jedinični vektor $\vec{n}_0$ normalan na ravan α. Neka je taka P prodor normale iz koordinatnog početka na ravan α. Ako sa p označimo intenzitet vektora $\overrightarrow{OP}$, tj. $|\overrightarrow{OP}|=p$, (sl. 2.30.) tada je položaj ravni α u prostoru potpuno određen odstojanjem p ravni α od koordinatnog početka i pravcem normale $\vec{n}_0$. Neka tačka M pripada ravni α, i neka je $\vec{r}$ vektor položaja tačke M. Za svaku tačku M koja pripada ravni α važi da je $|\overrightarrow{OP}|$ projekcija vektora $\vec{r}$ na pravu kojoj pripada vektor $\overrightarrow{OP}$, jer vektori $\overrightarrow{OP}$ i $\vec{n}_0$ imaju isti pravac. Prema tome

$$p=|\overrightarrow{OP}|=|\vec{r}|\cos(\angle(\vec{r},\overrightarrow{OP})). \tag{2.42}$$

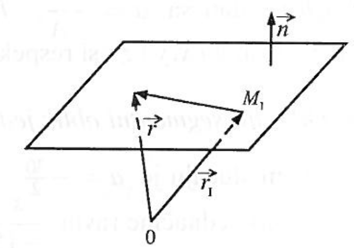
Na osnovu definicije skalarnog proizvoda $\vec{r}\cdot\vec{n}_0=|\vec{r}|\cos(\angle(\vec{r},\overrightarrow{OP}))$, i relacije (2.42) imamo $p=\vec{r}\cdot\vec{n}_0$. Prema tome **normalni vektorski oblik jednačine ravni** dat je sa

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0-p=0, \tag{2.43}$$

Ako vektor normale $\vec{n}$ nije jedinični vektor, tada je $\vec{r}\cdot\vec{n}=|\vec{r}||\vec{n}|\cos(\angle(\vec{r},\overrightarrow{OP}))$.



Slika 2.30.



Slika 2.31.

Množenjem relacije (2.42) sa $|\vec{n}|$ dobijamo da je $p|\vec{n}|=\vec{r}\cdot\vec{n}$, odnosno

$$\vec{r}\cdot\vec{n}-p|\vec{n}|=0. \tag{2.44}$$

Neka je $\vec{n}$ vektor normale na ravan α (vektor koji je kolinearan sa $\vec{n}_0$) dat sa $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$, gde je $A^2+B^2+C^2\neq 0$, odnosno $(A,B,C)\neq(0,0,0)$. Vektor položaja tačke M neka je dat sa

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

Tada se jednačina (2.44) može zapisati kao

$$p|\vec{n}| = Ax + By + Cz.$$

Ako uvedemo oznaku $D = -p|\vec{n}|$, dobijamo **skalarni oblik jednačine ravni**

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{2.45}$$

2.33. Primer. *Odrediti normalni vektorski oblik jednačine ravni, čiji je skalarni oblik* $4x + 8y - z + 18 = 0$.

Rešenje. Vektor normale $\vec{n}$ za datu ravan je $\vec{n} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$, a jedinični vektor normale je $\vec{n}_0 = \frac{4}{\sqrt{81}}\vec{i} + \frac{8}{9}\vec{j} - \frac{1}{9}\vec{k}$. Rastojanje date ravni od koordinatnog početka je $p = -\frac{D}{|\vec{n}|} = -\frac{18}{9} = -2$. Prema tome, normalni vektorski oblik jednačine date ravni je

$$\vec{r} \cdot \left(\frac{8}{9}\vec{i} + \frac{8}{9}\vec{j} - \frac{1}{9}\vec{k}\right) + 2 = 0. \quad \blacktriangleright$$

Ako su u jednačini ravni $Ax + By + Cz + D = 0$ svi koeficijenti A, B, C i D različiti od nule, tada se jednačina te ravni može napisati u **segmentnom obliku**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{2.46}$$

gde su a, b i c dati sa $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$ i predstavljaju odsečke (segmente) ravni na x, y i z osi respektivno.

2.34. Primer. *Odrediti segmentni oblik jednačine ravni* $2x + 3y - 5z + 30 = 0$.

Rešenje. U ovom slučaju je $a = -\frac{30}{2} = -15$, $b = -\frac{30}{3} = -10$, $c = \frac{30}{5} = 6$, pa je segmentni oblik jednačine ravni $\frac{x}{-15} + \frac{y}{-10} + \frac{z}{6} = 1$. $\blacktriangleright$

Jednačina ravni kroz datu tačku koja je normalna na dati vektor

Neka je data tačka M_1 sa koordinatama (x_1, y_1, z_1), koja pripada ravni α i vektor normale $\vec{n}$ na ravan α sa koordinatama (A, B, C). Neka je $\vec{r}$ vektor položaja tačke M sa koordinatama (x, y, z), koja pripada takođe ravni α. Odredićemo jednačinu ravni α kojoj pripada tačka M_1 i koja je normalna na vektor $\vec{n}$ (sl.2.31.).

Vektor $\overrightarrow{M_1M}$ u ravni α je razlika vektora $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ i $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$, tj.

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \vec{r} - \vec{r}_1.$$

Kako su vektori $\vec{n}$ i $\overrightarrow{M_1M}$ ortogonalni sledi da je $(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = 0$, odnosno,

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_1 \cdot \vec{n}. \tag{2.47}$$

Jednačina (2.47) je jednačina ravni koja je određena datom tačkom M_1 i vektorom normale $\vec{n}$.

Jednačina (2.47) u skalarnom obliku je data sa

$$Ax + By + Cz - Ax_1 - By_1 - Cz_1 = 0, \tag{2.48}$$

ili $Ax + By + Cz + D = 0$, gde je $-D = Ax_1 + By_1 + Cz_1$.

2.35. Primer. *Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku* $M_1(2, -3, 5)$ *i normalna je na vektor* $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Rešenje. U ovom slučaju imamo $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$. Ovde je $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, a $x_1 = 2$, $y_1 = -3$, $z_1 = 5$. Prema tome, jednačina ravni koja sadrži tačku M_1 i normalna je na vektor $\vec{n}$ je

$$(x - 2) + (y + 3) + (z - 5) = 0, \quad \text{odnosno} \quad x + y + z - 4 = 0. \ \blacktriangleright$$

2.36. Primer. *Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku* $M(-1, 2, 5)$ *i normalna je na z–osu.*

Rešenje. z–osa je vektor normale, što znači da je $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, pa je jednačina ravni $z - 5 = 0$, odnosno $z = 5$. $\blacktriangleright$

Jednačina ravni kroz tri tačke

Neka su date tri nekolinearne tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ i $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (ne pripadaju istoj pravi). Odredićemo ravan α kojoj pripadaju ove tri tačke.

Neka je vektor položaja proizvoljne tačke $M(x, y, z)$ ravni α označen sa $\vec{r}$, odnosno

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Označimo sa $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ i $\vec{r_3}$ vektore položaja tačaka M_1, M_2 i M_3, respektivno. Tada su vektori $\vec{r} - \vec{r_1}$, $\vec{r} - \vec{r_2}$ i $\vec{r} - \vec{r_3}$ određeni sa

$$\begin{aligned}
\vec{r} - \vec{r_1} &= (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}, \\
\vec{r} - \vec{r_2} &= (x - x_2)\vec{i} + (y - y_2)\vec{j} + (z - z_2)\vec{k}, \\
\vec{r} - \vec{r_3} &= (x - x_3)\vec{i} + (y - y_3)\vec{j} + (z - z_3)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Vektori $\vec{r} - \vec{r_1}$, $\vec{r} - \vec{r_2}$ i $\vec{r} - \vec{r_3}$ su komplanarni, odnosno pripadaju ravni α, te

njihov mešoviti proizvod mora biti jednak nuli. Dakle, važi relacija
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ odakle je}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.49}$$

Jednačina (2.49) predstavlja jednačinu ravni kroz tri tačke.

2.37. Primer. *Date su tačke* $A(3,2,1)$, $B(1,2,2)$ *i* $C(5,0,-1)$. *Odrediti jednačinu ravni koju određuju ove tri tačke.*

Rešenje. Jednačina ravni koju određuju ove tri tačke je
$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 1-3 & 2-2 & 2-1 \\ 5-3 & 0-2 & -1-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{odnosno} \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$
odakle je $2(x-3)-2(y-2)+4(z-1)=0$, tj. $2x-2y+4z=6$.

Date su četiri tačke $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ i $M_4(x_4,y_4,z_4)$. One pripadaju istoj ravni ako je mešoviti proizvod vektora
$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}, \\ \overrightarrow{M_1M_3} &= (x_3-x_1)\vec{i}+(y_3-y_1)\vec{j}+(z_3-z_1)\vec{k}, \\ \overrightarrow{M_1M_4} &= (x_4-x_1)\vec{i}+(y_4-y_1)\vec{j}+(z_4-z_1)\vec{k}, \end{aligned}$$
jednak nuli. Znači, uslov da tačke M_1, M_2, M_3 i M_4 budu komplanarne, odnosno da pripadaju istoj ravni je dat sa
$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0. \blacktriangleright$$

Ugao između dve ravni

Neka su jednačine dve ravni, α i β date u vektorskom obliku
$$\alpha:\ \vec{r}\vec{n}_1+D_1=0, \qquad \beta:\ \vec{r}\vec{n}_2+D_2=0,$$
gde su $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ vektori normala na odgovarajuće ravni α odnosno β.

Ugao između dve ravni α i β je ugao između njihovih odgovarajućih normala $\vec{n}_1$

i $\vec{n}_2$ i dobija se iz definicije skalarnog proizvoda
$$\cos(\angle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)) = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}.$$

Poznato je da je kosinus oštrog ugla pozitivan a kosinus tupog ugla negativan, što znači da ako posmatramo uvek oštar ugao između pravih tada je
$$\cos(\angle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)) = \left|\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right|.$$

Ako su dve ravni date u skalarnom obliku
$$\alpha: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad \beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
znači da su vektori normala na ravni α i β respektivno dati sa
$$\vec{n}_1=A_1\vec{i}+B_1\vec{j}+C_1\vec{k}, \qquad \vec{n}_2=A_2\vec{i}+B_2\vec{j}+C_2\vec{k}.$$

Prema tome, ugao između ravni α i β čije su jednačine date u skalarnom obliku se dobija iz relacije
$$\cos(\angle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)) = \left|\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\right|. \tag{2.50}$$

2.38. Primer. *Odrediti ugao između ravni* $\alpha:\ 3x+2y+z+5=0$ *i* $\beta: 2x-y+3z+2=0$.

Rešenje. Vektori $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ su dati sa $\vec{n}_1=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{n}_2=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$. Ugao između ravni α i β se dobija iz
$$\cos(\angle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)) = \frac{6-2+3}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{2}, \quad \text{pa je} \quad \angle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\frac{\pi}{6}.$$

Dve ravni $\alpha:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\beta:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, su ortogonalne ako je kosinus ugla između njihovih vektora normala jednak nuli. Iz (2.50) sledi da su ravni α i β **ortogonalne**, ako je ispunjen uslov
$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Dve ravni su paralelne ako su njihovi vektori normala kolinearni, odnosno ako važi relacija
$$\vec{n}_1=q\vec{n}_2.$$

To znači da je tada $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$. Iz $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ sledi da je

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dve ravni $\alpha: \ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ i $\beta: \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ su **paralelne** ako je ispunjen uslov

$$A_1 = q\cdot A_2, \quad B_1 = q\cdot B_2, \quad C_1 = q\cdot C_2. \quad \blacktriangleright$$

Rastojanje tačke od ravni

Neka je data jednačina ravni α u normalnom vektorskom obliku $\vec{r}\cdot\vec{n}_0 - p = 0$, gde je $\vec{r}$ vektor položaja proizvoljne tačke ravni α, a $\vec{n}_0$ jedinični vektor normale ravni α i p odstojanje ravni α od koordinatnog početka.

Neka je data tačka $M_1(x_1,y_1,z_1)$ koja ne pripada ravni α i neka je Q podnožje normale iz tačke M_1 na ravan α (sl.2.32.). Vektori $\vec{n}_0$ i $\overrightarrow{QM_1}$ su kolinearni, (oba su normalna na ravan α) pa se vektor $\overrightarrow{QM_1}$ može izraziti kao

$$\overrightarrow{QM_1} = d\,\vec{n}_0,$$

gde je d rastojanje tačke M_1 od ravni α. Ako su tačke M_1 i koordinatni početak O

sa iste strane ravni α, tada je $d>0$,

sa raznih strana ravni α, tada je $d<0$.

Vektor položaja tačke Q određujemo iz relacije

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1Q} = \vec{r}_1 - d\,\vec{n}_0,$$

gde je $\vec{r}_1$ vektor položaja tačke M_1. Tačka Q pripada ravni α pa vektor $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OQ}$ zadovoljava jednačinu ravni α, odnosno važi (sl 2.32.).

$$\vec{r}_2\vec{n}_0 - p = 0, \quad \text{odakle je} \quad (\vec{r}_1 - d\vec{n}_0)\vec{n}_0 - p = 0.$$

Iz poslednje jednakosti imamo $\vec{r}_1\vec{n}_0 - d - p = 0$, pa je rastojanje tačke M_1 od ravni α dato sa

$$d = \vec{r}_1\vec{n}_0 - p. \tag{2.51}$$

Ako je jednačina ravni α data u skalarnom obliku $Ax+By+Cz+D=0$, tada je njen vektorski oblik

$$\vec{r}\,\vec{n} + D = 0,$$

gde je vektor normale $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, a $r = x\vec{i} + y\vec{k} + z\vec{k}$. Kako je

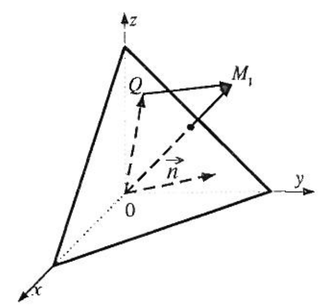
$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|} \quad \text{i} \quad p = -\frac{D}{\pm|\vec{n}|},$$

dobijamo

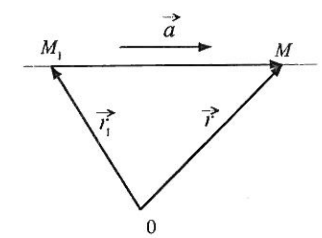
$$\vec{n}_0 = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\pm|\vec{n}|} = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{i} \quad p = -\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Na osnovu relacije (2.51) sledi da je rastojanje između tačke $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i ravni α, koja je data jednačinom u skalarnom obliku $Ax+By+Cz+D=0$,

$$|d| = \left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|. \tag{2.52}$$



Slika 2.32.



Slika 2.33.

2.5.11 Prava

Opšti oblik jednačine prave u ravni je

$$Ax+By+C=0, \quad \text{ako je} \quad A^2+B^2 \neq 0.$$

Ako je $C=0$ prava prolazi kroz koordinatni početak.

Eksplicitni oblik jednačine prave je

$$y = kx+n,$$

gde je k koeficijent pravca prave i važi da je $k = \operatorname{tg}\alpha$, gde je α ugao koji prava zaklapa sa pozitivnim smerom $x-$ose, a prava seče $y-$osu u tački $(0,n)$.

Sve prave koje prolaze kroz tačku $M(x_0,y_0)$, što zovemo **pramen pravih**, imaju jednačine

$$y - y_0 = k(x-x_0).$$

Jednačina prave koja prolazi kroz dve tačke $M(x_1,y_1)$ i $M(x_2,y_2)$ je

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \tag{2.53}$$

Prava u prostoru Odredićemo sada jednačinu prave p u prostoru, koja prolazi kroz tačku $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i paralelna je sa nosačem vektora $\vec{a}$. Neka je $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ vektor položaja tačke M koja pripada pravi p, a $\vec{r}_1=\overrightarrow{OM_1}$ vektor položaja tačke M_1.

Tačke M i M_1 pripadaju pravi p, pa je vektor $\overrightarrow{M_1M}$ kolinearan sa vektorom $\vec{a}$, te je (sl.2.33.)

$$\overrightarrow{M_1M}=t\vec{a},$$

gde je t skalar. Iz relacije $\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}$ sledi da je **vektorski oblik jednačine** prave koja prolazi kroz tačku M_1 i paralelna sa nosačem vektora $\vec{a}$

$$\vec{r}=\vec{r}_1+t\vec{a}, \tag{2.54}$$

gde je $t\in\mathbb{R}$. Kako je

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\quad \overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\quad \text{a}\quad \vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},$$

tada iz jednačine (2.54) dobijamo

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}+t(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}),$$

što je ekvivalentno sa

$$x=x_1+ta_1,\qquad y=y_1+ta_2,\qquad z=z_1+ta_3. \tag{2.55}$$

Jednačine (2.55) su **parametarske jednačine** prave koja prolazi kroz datu tačku $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i paralelna je sa nosačem vektora $a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$.

Ako su sve tri koordinate vektora $\vec{a}$ različite od nule, odnosno $a_i\neq 0$, $i=1,2,3$, tada jednačine (2.55) možemo izraziti na sledeći način:

$$t=\frac{x-x_1}{a_1},\quad t=\frac{y-y_1}{a_2},\quad t=\frac{z-z_1}{a_3},\qquad \text{odnosno}$$

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}. \tag{2.56}$$

Jednačine (2.56) su **kanoničke jednačine** prave.

2.39. Primer. *Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M_1(-1,2,5)$ i paralelna je vektoru $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$.*

Rešenje. Vektor položaja tačke M_1 je $\vec{r}_1=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$. Na osnovu (2.54) vektorska jednačina prave je

$$\vec{r}=\vec{r}_1+t\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}+t(\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}).$$

Parametarske jednačine prave su $x=-1+t$, $y=2-3t$, $z=5+6t$. Kanoničke jednačine prave su $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-5}{6}$. ▶

Jednačina prave kroz dve tačke

Pravu koja je određena dvema različitim tačkama $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i $M_2(x_2,y_2,z_2)$ možemo posmatrati kao pravu koja prolazi kroz tačku M_1 (na primer) i paralelna je sa pravom koja je nosač vektora $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$. Ako je $\vec{r}_1$ vektor položaja tačke M_1, tada je vektorski oblik jednačine prave koja prolazi kroz tačke M_1 i M_2

$$\vec{r}\;=\;\vec{r}_1+t\vec{a},\qquad \text{ili}$$

$$\vec{r}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})+t((x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}). \tag{2.57}$$

Parametarske jednačine prave su

$$x=x_1+t(x_2-x_1),\qquad y=y_1+t(y_2-y_1),\qquad z=z_1+t(z_2-z_1), \tag{2.58}$$

a kanoničke jednačine iste prave su

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{2.59}$$

Ako su date tačke $M_1(x_1,y_1)$ i $M_2(x_2,y_2)$ u xy–ravni tada imamo samo prve dve jednačine u relaciji (2.59), tako da dobijamo jednačinu (2.53).

2.40. Primer. *Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačke $M_1(1,-3,2)$ i $M_2(6,1,-5)$.*

Rešenje. Na osnovu (2.57) je vektorski oblik jednačine ove prave

$$\begin{aligned}\vec{r}\;&=\;(\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k})+t((6-1)\vec{i}+(1-(-3))\vec{j}+(-5-2)\vec{k})\\ &=\;(\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k})+t(5\vec{i}+4\vec{j}-7\vec{k})\end{aligned}.$$

Parametarske jednačine prave su $x=1+5t$, $y=-3+4t$, $z=2-7t$, a kanoničke jednačine iste prave su $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-2}{-7}$. ▶

Rastojanje tačke od prave

Neka je data prava p kanoničkom jednačinom $\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{a_2}=\dfrac{z-z_1}{a_3}$, i tačka $M_2(x_2,y_2,z_2)$ koja ne pripada pravi p. Obeležimo sa $M_1(x_1,y_1,z_1)$ tačku na pravi

p, a sa $M_3(x_3,y_3,z_3)$ presek normale iz tačke M_2 na pravu p i prave p. Rastojanje tačke M_2 od prave p je

$$d = |\overrightarrow{M_2M_3}|.$$

Iz trougla $M_1M_2M_3$ imamo

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}|\sin(\angle(\overrightarrow{M_1M_3},\overrightarrow{M_1M_2})) = |\overrightarrow{M_1M_2}|\sin(\angle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{M_1M_2})).$$

Dalje je $|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{M_1M_2}||\overrightarrow{a}|\sin(\angle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{M_1M_2}))$, pa je

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|}. \tag{2.60}$$

Kako je $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1)\overrightarrow{i} + (y_2-y_1)\overrightarrow{j} + (z_2-z_1)\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$, to je

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{k}.$$

Odavde, korišćenjem (2.60), imamo da je rastojanje d dato izrazom

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Rastojanje dve prave

Neka su prave p i q date sa

$$p: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}, \quad q: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}. \tag{2.61}$$

Ako su prave p i q **paralelne**, tada se rastojanje između njih određuje tako što se uzme proizvoljna tačka na jednoj od pravih, na primer, q i odredi njeno rastojanje od prave p.

Ako su prave p i q **mimoilazne** tj. ne leže u istoj ravni, tada je rastojanje između njih minimalno rastojanje dveju proizvoljnih tačaka, koje pripadaju datim pravama. To je rastojanje jednako odsečku zajedničke normale datih pravih čije krajnje tačke

leže na datim pravama.

Neka su tačke $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i $M_2(x_2,y_2,z_2)$ proizvoljne tačke koje pripadaju respektivno pravama p i q. Vektor $\overrightarrow{N_1N_2}$ je projekcija vektora $\overrightarrow{M_1M_2}$ na zajedničku normalu pravih p i q. Ako sa d označimo rastojanje između pravih p i q, tada je

$$d = |\overrightarrow{N_1N_2}|.$$

Vektor $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ je normalan na prave p i q (nosači vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su paralelni pravama p i q respektivno) i kolinearan sa $\overrightarrow{N_1N_2}$.

Vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{M_1M_2}$ su nekomplanarni i oni određuju paralelopiped čija je zapremina apsolutna vrednost mešovitog proizvoda $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}$.

Visina paralelopipeda H je intenzitet vektora $\overrightarrow{N_1N_2}$, tj. $H=d$, a površina osnove je $P = |\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$. Kako je

$$H = \frac{V}{P}, \quad \text{to je } d = \frac{|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|},$$

odakle sledi da se rastojanje između dveju mimoilaznih pravih p i q, određuje formulom

$$d = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}} \right|. \tag{2.62}$$

Neka su date dve prave

$$p: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3} \quad \text{i} \quad q: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3},$$

i neka je $D = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$. Tada sa može pokazati da važi sledeće:

Prave p i q **su mimoilazne** ako je $D \neq 0$.

Prave p i q **se seku** ako je $D = 0$ i vektori $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$ nisu kolinearni.

Prave p i q **su paralelne** ako su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni a vektor $\overrightarrow{c} = (x_2-x_1)\overrightarrow{i} + (y_2-y_1)\overrightarrow{j} + (z_2-z_1)\overrightarrow{k}$ nije kolinearan sa njima.

Prave p i q **se poklapaju** ako su vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ kolinearni.

Ugao između dve prave

Ugao između dve prave u prostoru je ugao između bilo koja dva vektora čiji su nosači date prave. Kako dva vektora u stvari obrazuju dva suplementna ugla mi ćemo uvek posmatrati samo oštar ili prav ugao. Prema tome, za prave

$$p: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}, \quad q: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3},$$

ugao se dobija iz

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \left| \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \right|. \tag{2.63}$$

2.41. Primer. *Odrediti ugao γ između dve prave*

$$p: \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}, \quad q: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

Rešenje. Prema (2.63) je $\cos\gamma = \left|\frac{3+6-2}{\sqrt{14}\sqrt{14}}\right| = \frac{7}{14}$, odnosno $\gamma = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. ▶

Ugao između prave i ravni

Ugao γ između prave $p: \dfrac{x-x_1}{a_1} = \dfrac{y-y_1}{a_2} = \dfrac{z-z_1}{a_3}$ i ravni $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ se posmatra kao komplement ugla između prave p i normale na ravan α. Kako je vektor normale ravni α dat sa $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, to je

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{n})) = \sin\gamma = \left| \frac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right|,$$

jer je $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{n})) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle(\vec{a}, \vec{n})\right) = \sin(\gamma)$.

2.42. Primer. *Odrediti ugao γ između prave* $p: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+2}{-4}$ *i ravni* $\alpha: -4x+5y-7z+10=0$.

Rešenje. Prava p je paralelna sa nosačem vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$, a vektor normale ravni α je $\vec{n} = -4\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$. Iz

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{n})) = \sin\gamma = \left| \frac{-8+25+28}{\sqrt{2^2+5^2+4^2}\sqrt{4^2+5^2+7^2}} \right| = \frac{45}{\sqrt{45}\sqrt{90}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

sledi da je ugao γ između prave p i ravni α dat sa $\gamma = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. ▶

Glava 3

Granična vrednost, neprekidnost i izvod

Raspravljajući različite aspekte realnog broja, primećujemo da se pri merenju realnih fizičkih veličina dobija niz njihovih približnih vrednosti, sa kojima zatim radimo. Takvo stanje stvari odmah postavlja tri sledeća pitanja:

a) Kakav odnos ima dobijeni niz aproksimacija prema izmerenoj veličini? Imamo u vidu matematičku stranu stvari, tj. želimo da dobijemo tačan opis, šta uopšte znači "niz približnih vrednosti" i u kojoj meri takav niz opisuje vrednosti veličine; da li je to opisivanje jednoznačno i da li taj niz može odgovarati raznim vrednostima izmerenih veličina.

b) U kakvoj su vezi operacije sa približnim vrednostima, i operacije sa tačnim vrednostima, i čime se te operacije karakterišu pri opisivanju nekih dopustivih zamena tačnih vrednosti približnim?

c) Kako je sam niz brojeva definisan, može li on biti niz dovoljno tačnih približnih vrednosti neke veličine? Odgovor na ta i slična pitanja daje pojam **granične vrednosti funkcije** jedan od osnovnih pojmova analize.
Izlaganje teorije graničnih vrednosti počinjemo razmatranjem granične vrednosti funkcija prirodnog argumenta (nizova).

3.1 Nizovi

3.1.1 Osnovni pojmovi

3.1. Definicija. Niz *je funkcija $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

Uobičajeno je da se piše $a_n := a(n)$, $n \in \mathbb{N}$, i $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Broj a_n se zove **opšti**

član niza a. U ovoj glavi n uvek označava neki prirodan broj.
U sledećoj tabeli dato je nekoliko nizova sa opštim članom i izračunato je nekoliko njihovih prvih članova.

Opšti član	Članovi niza	Opšti član	Članovi niza
$a_n = \frac{1}{n}$,	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$,	$b_n = 1 - \frac{1}{n}$,	$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$,
$c_n = \frac{(-1)^n}{n}$,	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$,	$d_n = n$,	$1, 2, 3, 4, \ldots$,
$e_n = (-1)^n n$,	$-1, 2, -3, 4, \ldots$,	$f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$,

Tabela 3.1.

Definicija granične vrednosti niza

3.2. Definicija. *Realan broj L je* **granična vrednost niza** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa osobinom da za svako $n > n_0$ važi $|a_n - L| < \varepsilon$, tj.*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\quad n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Ako je L granična vrednost (kraće: **granica**) niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tada još kažemo da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergira** ka broju L i to pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

3.3. Teorema. *Granica konvergentnog niza je jedinstvena.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima dve granice, označimo ih sa a i b, i neka je, recimo, $a > b$. Tada za $\varepsilon := (a-b)/3$ postoji n_0 takvo da važi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\quad n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

To znači da u intervalu $\left(b - \frac{\varepsilon}{3}, b + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ ima najviše konačno mnogo članova niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ne više od n_0), pa tačka b ne može biti granica tog niza. ▶

3.4. Primer. *Koristeći definiciju 3.2, pokazati da je svaki od sledećih nizova datih sa opštim članom*

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$; b) $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$,

konvergentan ka 0.

Rešenja.

a) Treba pokazati da za svako unapred dato pozitivno ε postoji prirodan broj n_0 takav da važi implikacija

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon, \quad \text{odnosno} \quad n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon. \qquad (3.1)$$

Kako za svako n sa osobinom $n > \frac{1}{\varepsilon}$ važi $\frac{1}{n} < \varepsilon$, to možemo uzeti $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, pa je (3.1) zadovoljeno.

Napomena. Broj $[x]$ (čita se: "najveći ceo od x") po definiciji je najveći ceo broj manji ili jednak od realnog broja x.

b) Za dato $\varepsilon > 0$ odredićemo prirodan broj n_0 tako da za svako $n > n_0$ važi

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| = \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon.$$

Ako je α pozitivan racionalan broj, tada iz zadnje nejednakosti sledi $n > \dfrac{1}{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}}$, pa možemo uzeti da je $n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}}\right] + 1$.

Ako je, međutim, α pozitivan iracionalan broj, tada postoji racionalan broj β takav da važi $0 < \beta < \alpha$, odnosno $n^\beta < n^\alpha$, tako da je $\left|\dfrac{1}{n^\alpha} - 0\right| = \dfrac{1}{n^\alpha} < \dfrac{1}{n^\beta}$, pa možemo uzeti $n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt[\beta]{\varepsilon}}\right] + 1$. ▶

3.5. Primer. *Pokazati po definiciji 3.2 da niz čiji je opšti član dat sa $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$, ima granicu jednaku 1.*

Rešenje. Iz relacija $\left|\frac{n+1}{n+2} - 1\right| = \frac{1}{n+2} < \varepsilon$ sledi da za dato $\varepsilon > 0$, važi $n + 2 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ ili $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 2$. Za n_0 se može uzeti bilo koji prirodan broj veći od broja $\dfrac{1}{\varepsilon} - 2$. Da bismo bili sigurni da je izabrani broj n_0 prirodan, uzećemo (na primer) $n_0 = [1/\varepsilon - 2] + 3$. Tada za svako $n > n_0$ važi $\left|\frac{n+1}{n+2} - 1\right| < \varepsilon$.

Za niz koji ne konvergira, kažemo da **divergira**. Izdvojićemo dve klase **divergentnih nizova.** ▶

3.6. Definicija. *Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

divergira u plus beskonačno, *u oznaci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ako za svaki realan broj $M > 0$ postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n > n_0$ važi $a_n > M$;*

divergira u minus beskonačno, *u oznaci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ako za svaki realan broj $M > 0$ postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n > n_0$ važi $a_n < -M$.*

Niz sa opštim članom $d_n = n$ divergira u plus beskonačno (to je, u stvari, niz prirodnih brojeva), dok niz sa opštim članom $e_n = (-1)^n n$ jeste divergentan (tj. nije konvergentan), ali niti divergira u minus beskonačno niti u plus beskonačno.

3.7. Definicija. *Niz $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je* **ograničen** *ako postoji pozitivan realan broj M takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi* $|a_n| \le M$.

Očevidno da niz koji divergira u plus beskonačno ili u minus beskonačno ne može biti ograničen. Međutim, važi

3.8. Teorema. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz. Neka je dat niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka broju L, odnosno neka je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. To znači da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, pa i za $\varepsilon := 1$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takvo da za sve $n > n_0$ važi

$$|a_n - L| < 1, \quad \text{tj.} \quad L-1 < a_n < L+1.$$

Između konačno mnogo brojeva $a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, L-1$ i $L+1$ možemo odrediti onaj koji ima najveću apsolutnu vrednost, obeležimo ga sa M. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $|a_n| \le M$. Prema definiciji 3.7, niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen. ▶

3.9. Primer. *Da li važi tvrđenje obrnuto teoremi 3.8, tj. da je svaki ograničen niz i konvergentan?*

Rezultat. Ne. Niz koji je ograničen ne mora biti konvergentan, kako se vidi na primeru niza sa opštim članom $a_n = (-1)^n$. ▶

3.10. Primer. *Odrediti koji su nizovi iz tabele 3.1 ograničeni.*

Rezultati. Nizovi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su ograničeni sa 1; niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen je sa $\frac{1}{2}$, dok nizovi $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nisu ograničeni. ▶

3.11. Primer. *Na brojnoj pravoj odrediti prvih pet tačaka koje odgovaraju članovima sledećih nizova, datih svojim opštim članom:*

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; b) $b_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$; c) $c_n = 1 + (-1)^n$; d) $d_n = n \cdot (1 + (-1)^n)$.

Grafičkim prikazima članova nizova iz primera 3.11, vidi se da se članovi niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nagomilavaju oko tačke 0 sa desne strane, dok se članovi niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nagomilavaju oko tačke 1, ali sa obe strane. Članovi niza $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uzimaju samo dve vrednosti, naime važi

$$c_n = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2, & \text{ako je} \quad n = 2k \quad \text{za neko} \quad k \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{ako je} \quad n = 2k+1 \quad \text{za neko} \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Za sve neparne brojeve n, članovi niza $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uzimaju vrednost 0, dok se za parne brojeve n udaljuju u desno (ka $+\infty$).

3.12. Definicija. *Realan broj ℓ je* **tačka nagomilavanja** *niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ako za svako $\varepsilon > 0$ i svako $m \in \mathbb{N}$ postoji bar jedno $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, takvo da je $|a_n - \ell| < \varepsilon$.*

Ekvivalentan iskaz za definiciju 3.12 jeste da je realan broj ℓ tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n sa osobinom $a_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

3.13. Primer. *Odrediti tačke nagomilavanja nizova datih u primeru 3.11.*

Rešenja.

a) Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima jednu tačku nagomilavanja, 0 i prema primeru 3.4 b) ima granicu jednaku nuli.

b) Niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima jednu tačku nagomilavanja, 1, konvergentan je i granica mu je 1.

c) Niz $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima dve tačke nagomilavanja, i to 0 i 2. Ovaj niz je ograničen, ali nije konvergentan.

d) Niz $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima jednu tačku nagomilavanja, 0. U stvari, za sve neparne brojeve $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, je $d_{2k+1} = 0$, pa za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i za sve $k \in \mathbb{N}_0$ važi $d_{2k+1} \in (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$. Međutim, niz $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije ograničen, pa prema teoremi 3.8 nije konvergentan. ▶

Ostavljamo čitaocu da pokaže da je **granica konvergentnog niza i njegova jedina tačka nagomilavanja.** Sa druge strane, niz $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz primera 3.11 d) pokazuje da ako niz ima tačno jednu tačku nagomilavanja, ipak ne mora biti i konvergentan. Ustvari, važi sledeća

3.14. Teorema. *Potreban i dovoljan uslov da niz konvergira jeste da je ograničen i da ima tačno jednu tačku nagomilavanja.*

Iz teoreme 3.8 sledi da je ograničenost potreban uslov za konvergenciju niza. Dalje, teorema 3.3) daje jedinstvenost granice niza, što znači da konvergentan niz ne može imati više od jedne tačke nagomilavanja. Dokaz dovoljnosti uslova za konvergenciju niza u teoremi 3.14 ovde izostavljamo; recimo samo da je ona posledica Kantorove teoreme 1.3.

Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ograničen odozgo** ako postoji realan broj M sa osobinom

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le M.$$

Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ograničen odozdo** ako postoji realan broj M sa osobinom

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \ge M.$$

Očevidno je niz **ograničen** (videti definiciju 3.7) ako i samo ako je ograničen i odozgo i odozdo.

Najveća tačka nagomilavanja odozgo ograničenog niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naziva se **limes superior** i označava se sa $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
Najmanja tačka nagomilavanja odozdo ograničenog niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naziva se **limes inferior** i označava se sa $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.
Korišćenjem aksioma (R16) iz prve glave može se pokazati da ako je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ odozgo ograničen, tada postoji $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, a ako je odozdo ograničen, tada postoji $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.
U primeru 3.11 c) tačka 2 jeste limes superior, dok je tačka 0 limes inferior niza sa opštim članom $c_n = 1+(-1)^n$.
Iz teoreme 3.14 sledi da ako niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka broju L, tada je

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = L.$$

Ako niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima sledeću osobinu:

$(\forall M>0)\ (\exists n\in\mathbb{N})\quad a_n > M$, tada ćemo pisati $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Analogno, ako za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ važi

$(\forall M>0)\ (\exists n\in\mathbb{N})\quad a_n < -M$, tada ćemo pisati $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Na primer, za niz dat sa $a_n = (-1)^n n$ važi $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

3.1.2 Osobine granične vrednosti niza

3.15. Teorema. *Ako su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni nizovi, i ako postoji $n_0\in\mathbb{N}$ sa osobinom $(\forall n\in\mathbb{N})\quad n>n_0 \Rightarrow a_n\le b_n$, tada važi*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dokaz. Obeležimo sa a i b granice nizova $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respektivno, i pretpostavimo da je, suprotno tvrđenju teoreme, $a>b$.
Iz konvergencije nizova $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sledi da za $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 takvi da važi

$(\forall n\in\mathbb{N})\quad n>n_1 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$ i $(\forall n\in\mathbb{N})\quad n>n_2 \Rightarrow |b_n-b|<\varepsilon$,

odnosno

$(\forall n\in\mathbb{N})\quad n>n_1 \Rightarrow a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$ i $(\forall n\in\mathbb{N})\quad n>n_2 \Rightarrow b-\varepsilon<b_n<b+\varepsilon$.

Prema tome za $n>n_3 := \max\{n_0,n_1,n_2\}$ važi

$$b_n < b+\varepsilon = b+\frac{a-b}{2} = a-\frac{a-b}{2} = a-\varepsilon < a_n,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $a_n\le b_n$ za svako $n\ge n_3\ge n_0$. ▶

3.16. Teorema. *Ako za nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ postoji broj $n_0\in\mathbb{N}$ sa osobinom $n>n_0 \Rightarrow a_n\le b_n\le c_n$, tada važi implikacija*

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} b_n = L\right).$$

Dokaz. Prema pretpostavci, za dato $\varepsilon>0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 takvi da važe implikacije

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad n>n_1 \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon \quad\text{i}\quad (\forall n\in\mathbb{N})\quad n>n_2 \Rightarrow |c_n-L|<\varepsilon.$$

Na osnovu toga za $n>n_3 := \max\{n_0,n_1,n_2\}$ važi

$$L-\varepsilon < a_n\le b_n\le c_n < L+\varepsilon, \quad\text{te je}\quad |b_n-L|<\varepsilon,$$

što znači da je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$. ▶

3.17. Teorema. *Ako nizovi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiraju, tada važi*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

tj. granica zbira (respektivno razlike) konvergentnih nizova postoji i jednaka je zbiru (respektivno razlici) njihovih granica;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

tj. granica proizvoda konvergentnih nizova postoji i jednaka je proizvodu njihovih granica;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *uz uslov $b_n\ne 0$ za svako $n\in\mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\ne 0$,*

tj., pod gornjim uslovima, granica količnika konvergentnih nizova postoji i jednaka je količniku njihovih granica.

Dokaz. Neka su brojevi a i b granice nizova $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respektivno.

a) Kako su nizovi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni, to za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 takvi da važe implikacije

$(\forall n\in\mathbb{N})\quad n>n_1 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon/2$ i $(\forall n\in\mathbb{N})\quad n>n_2 \Rightarrow |b_n-b|<\varepsilon/2$.

Na osnovu toga, za $n>n_0 := \max\{n_1,n_2\}$ možemo pisati

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \le |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

odakle sledi tvrđenje.

b) Prema teoremi 3.8 je svaki konvergentan niz ograničen, pa postoji konstanta $M_1>0$ sa osobinom da za sve $n\in\mathbb{N}$ je $|b_n|\le M_1$. Stavimo sada $M := \max\{|a|,M_1\}$;

jasno, mora biti $M > 0$. Tada za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 takvi da važe nejednakosti:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \text{i} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Na osnovu toga za $n > n_3 := \max\{n_1, n_2\}$ možemo pisati

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| = |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \\ &= |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

c) Pod pretpostavkom da granica b niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije nula, pokažimo da se može odrediti prirodan broj n_0 takav da važi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_0 \Rightarrow |b_n| \geq |b|/2.$$

Ovo sledi direktno iz definicije granične vrednosti niza (definicija 3.2). Drugim rečima, u intervalu $(-|b|/2, |b|/2)$ ima najviše konačno mnogo članova niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Iz konvergencije nizova $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 takvi da važe nejednakosti

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{|b|\varepsilon}{4} \quad \text{i} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ n > n_2 \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} \cdot |b_n - b| < \frac{|b|\varepsilon}{4}.$$

Na osnovu toga za $n > n_3 := \max\{n_0, n_1, n_2\}$ možemo pisati

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n \cdot b - a \cdot b_n}{b \cdot b_n}\right| = \left|\frac{a_n \cdot b - a \cdot b + a \cdot b - a \cdot b_n}{b \cdot b_n}\right| = \frac{|b||a_n - a| + |a||b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} \\ &\leq \frac{1}{|b_n|}\left(|a_n - a| + \frac{|a|}{|b|}|b_n - b|\right) < \frac{1}{|b|/2}\left(\frac{|b|}{4}\varepsilon + \frac{|b|}{4}\varepsilon\right) \leq \varepsilon. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

3.18. Teorema. *Ako je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz, tada važe sledeće jednakosti:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (A \cdot a_n) = A \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, *gde je A proizvoljna konstanta različita od nule;*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k$, *gde je k prirodan broj;*

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$ *gde je $k \in \mathbb{N}$. Ako je k paran broj, mora se dodatno pretpostaviti da su članovi niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativni.*

Dokaz.

a) Sledi iz teoreme 3.17 b), ako se stavi $b_n = A$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Sledi primenom matematičke indukcije na tvrđenje iz teoreme 3.17 **b**).

c) Sledi iz **b**) posle smene $\sqrt[k]{a_n} = b_n$, tj. $a_n = (b_n)^k$, $n \in \mathbb{N}$. $\blacktriangleright$

3.19. Primer. *Koristeći teoremu 3.16, odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n!}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$, $|q| < 1$.

Rešenja.

a) Kako je $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$, to je $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$. Na osnovu primera 3.4 a) i teoreme 3.16 sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$. Primetimo da je ulogu niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz teoreme 3.16 preuzeo niz sa opštim članom $a_n = 0$.

b) Na osnovu relacija $\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{(n-2)\cdots 1} < \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}$, $n > 2$, i jednakosti $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n-1} \cdot \dfrac{1}{n-2} = 0$, sledi (članova datog niza su pozitivni) da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n!} = 0$.

c) Po binomnom obrascu važi

$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} + \cdots + 1 > n$, dakle $\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n}$, pa je

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$. Na osnovu teoreme 3.16 sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

d) Posmatraćemo prvo slučaj kada je $0 < q < 1$. Tada je $q = \frac{1}{1+h}$, $h > 0$, pa je $q^n = \frac{1}{(1+h)^n}$. Na osnovu Bernulijeve nejednakosti:

$(1+h)^n \geq 1 + nh$, $h > -1$, i njene posledice $(1+h)^n > nh$, $h > 0$, važi da je

$$q^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{nh}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{nh} = 0$, to je $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, za $0 < q < 1$.

Ako je $-1 < q < 0$, tada za $q_1 = -q$ važi $0 < q_1 < 1$, pa je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n q_1^n = 0$.

Napomena. Niz sa opštim članom q^n divergira za $|q| \geq 1$ (dokažite to!). $\blacktriangleright$

3.20. Primer. *Koristeći primer 3.4 b) i osnovne osobine granične vrednosti, odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5 - 3n^2 + 1}{n^5 + 3n + 2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4 + 2n^2 + 1}{n^3 + 1}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^2 + 3n + 1}{n^3 + 2}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3 - 8n^3}{n^2 + 1}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2 + 2n + 3}{n+1} - \dfrac{n^3 + 1}{n^2 + 2n + 1}\right)$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right)$; h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}}$.

Rešenja.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^5-3n^2+1}{n^5+3n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5\left(2-\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^5}\right)}{n^5\left(1+\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^5}\right)}=2.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4+2n^2+1}{n^3+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4\left(3+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=+\infty.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2+3n+1}{n^3+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(8+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{8+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}=0\cdot 8=0.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-8n^3}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3+12n^2+6n+1-8n^3}{n^2+1}=12.$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n+3}{n+1}-\dfrac{n^3+1}{n^2+2n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+5n+3-n^3-1}{(n+1)^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+2}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=3.$

f) Racionalizacijom brojioca dobija se

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0.$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}=1.$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}\lim\limits_{n\to\infty}=\dfrac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)}=\dfrac{1}{2}.$ ▶

3.21. Primer. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2};$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3};$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}.$

Rešenja.

a) Kako je $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (zbir prvih n članova aritmetičke progresije), to je

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}.$

b) Kako je $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ to je

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\dfrac{1}{3}.$

c) Zbir prvih n članova geometrijske progresije je $1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$ $q\neq 1$, tako da za $|q|<1$ važi

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{1}{1-q}$

(koristili smo primer 3.19 d)). Zbog toga je

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1-(1/2)^n}{1-1/2}}{\dfrac{1-(1/3)^n}{1-1/3}}=4/3.$ ▶

3.1.3 Košijevi nizovi

3.22. Definicija. *Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Košijev, ako zadovoljava uslov*

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_0\in\mathbb{N})\ (\forall m\in\mathbb{N})\ (\forall n\in\mathbb{N})m,n>n_0\ \Rightarrow\ (|a_m-a_n|<\varepsilon). \tag{3.2}$$

Uslov (3.2) se može zameniti sa uslovom

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_0\in\mathbb{N})\ (\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall p\in\mathbb{N})\quad n>n_0\ \Rightarrow\ |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon. \tag{3.3}$$

Lako je videti da je svaki konvergentan niz i Košijev (dokažite to). Međutim, korišćenjem aksiome R16, može se pokazati da važi i obrnuto, tj.:

3.23. Teorema. *Potreban i dovoljan uslov da niz realnih brojeva konvergira jeste da je Košijev.*

3.24. Primer. *Ispitati da li su sledeći nizovi Košijevi:*

a) $f_n=1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{n^2};$ b) $g_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ *(harmonijski niz).*

Rešenja. a) Pokazaćemo da je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Košijev po definiciji 3.22.

$$\begin{aligned}|f_{n+p}-f_n| &= \left|1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}-\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\right|\\ &= \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\ &< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Prema tome, za svako $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ i proizvoljno $p \in \mathbb{N}$ važi: $|f_{n+p} - f_n| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, pa možemo uzeti $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Znači, niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Košijev, pa je prema teoremi 3.23 i konvergentan.

b) Dokazaćemo da harmonijski niz **nije** Košijev. Naime, pokazaćemo da postoji takvo $\varepsilon > 0$, da za svako $n_0 \in \mathbb{N}$ postoji prirodan broj $n > n_0$ i postoji $p \in \mathbb{N}$ sa osobinom da je $|g_{n+p} - g_n| \geq \varepsilon$.

Neka je $\varepsilon = 1/3$. Tada je za $n > n_0$:

$$|g_{n+p} - g_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}.$$

Ako stavimo $p = n$, za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $|g_{n+n} - g_n| = |g_{2n} - g_n| > 1/2 > 1/3$. ▶

3.1.4 Monotoni nizovi

3.25. Definicija. *Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je*

rastući *ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n < a_{n+1}$*

neopadajući *ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \leq a_{n+1}$;*

nerastući *ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \geq a_{n+1}$*

opadajući *ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n > a_{n+1}$.*

Ako niz zadovoljava jednu od četiri navedene definicije, onda je **monoton.**

Značaj monotonih nizova pokazuje sledeća

3.26. Teorema. *Neopadajući niz ograničen odozgo je konvergentan.*

Nerastući niz ograničen odozdo je konvergentan.

Dokaz. Neka je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neopadajući, tj. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ f_n \leq f_{n+1}$ i neka je ograničen odozgo, tj. neka postoji konstanta $M > 0$ takva da važi $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ f_n \leq M$. Prema tome, skup vrednosti X datog niza $X = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je takođe ograničen odozgo, pa prema aksiomi R16' (videti prvu glavu) postoji najmanje gornje ograničenje $s := \sup X$. Pokazaćemo da je broj s granica niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Broj s je gornje ograničenje skupa X, pa važi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ f_n \leq s. \tag{3.4}$$

Budući da je broj s **najmanje** gornje ograničenje skupa X, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji član f_{n_0} datog niza takav da je

$$s - \varepsilon < f_{n_0}. \tag{3.5}$$

Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je neopadajući, pa iz relacija (3.5) i (3.4) sledi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n > n_0 \Rightarrow s - \varepsilon < f_{n_0} \leq f_n \leq s < s + \varepsilon.$$

To znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da važi $n > n_0 \Rightarrow |s - f_n| < \varepsilon$, odakle sledi konvergencija niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Slično se pokazuje da odozdo ograničen nerastući niz ima infimum. ▶

3.27. *Pokazati da je niz dat opštim članom $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$*

a) *rastući;*

b) *ograničen odozgo.*
(Na osnovu teoreme 3.26 sledi da ovaj niz konvergira. Njegova granica je iracionalan broj $e = 2{,}71828\ldots$)

Rešenja.

a) Pokazaćemo da je količnik $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ manji od jedinice, što će značiti da dati niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ raste. Pre svega je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^n \cdot \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n} \cdot \frac{n+1}{n+2}.$$

Na osnovu Bernulijeve nejednakosti $(1+h)^n \geq 1 + nh$, $h > -1$, $n \in \mathbb{N}$, važi $\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \dfrac{n}{(n+1)^2}$, pa je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{1 - \frac{n}{(n+1)^2}} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3 + 3n^2 + 3n + 2} < 1.$$

b) Na osnovu binomne formule je

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{n!n^n}.$$

Sabirke na desnoj strani ćemo majorirati na sledeći način:

$$\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3! \cdot n^3} = \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!},$$

....

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n! \cdot n^n} = \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \frac{1}{n!}.$$

Tako dobijamo

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\ &= 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}<1+2=3.\end{aligned}$$ ▶

3.28. Primer. *Znajući da je* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, *odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n}\right)^{3n+2}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt{n+1}-\ln\sqrt{n}}{n}$; g) $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left(\ln\sqrt{n+1}-\ln\sqrt{n}\right)$.

Rešenja.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^3=e^3.$

b) $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n}\right)^{3n+2}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{3n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{\frac{2n}{3}\cdot\frac{9}{2}}\cdot 1\\ &=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{2n/3}\right)^{9/2}=e^{9/2}.\end{aligned}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)^{n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{(-n)(-1)}}=e^2, \text{ ili}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{2(n-1)}{2}}\\ &=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)^2=e^2.\end{aligned}$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}=\frac{1}{e^2}.$$

e) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^{n}=\left(e^{-2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}n}=0.$$

f) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt{n+1}-\ln\sqrt{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/n}=\frac{1}{2}\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}=\frac{1}{2}\ln 1=0.$$

g) $$\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\ln\sqrt{n+1}-\ln\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=1/2.$$

U zadacima f), g) i h) korišćena je neprekidnost eksponencijalne i logaritamske funkcije na njihovim definicionim skupovima. ▶

3.29. Primer. *Pokazati da je niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dat sa*

$$f_1=\sqrt{2},\quad f_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\ korena}=\sqrt{2+f_{n-1}},\qquad n=2,3,\ldots,$$

konvergentan i odrediti njegovu granicu.

Rešenje. Pokazaćemo prvo pomoću matematičke indukcije da je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući. Pre svega je $f_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=f_1$. Ako pretpostavimo da je $f_n>f_{n-1}$, tada sledi

$$\sqrt{f_n+2}>\sqrt{f_{n-1}+2},\quad \text{tj.}\quad f_{n+1}>f_n.$$

Ova povlači da je dati niz rastući. Sada ćemo pokazati da je dati niz ograničen odozgo, i to brojem $\sqrt{2}+1$. Pre svega, važi $f_1=\sqrt{2}<\sqrt{2}+1$. Iz pretpostavke $f_n<\sqrt{2}+1$, sledi da je

$$f_{n+1}=\sqrt{2+f_n}<\sqrt{2+\sqrt{2}+1}<\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1.$$

Time smo pokazali da je dati niz ograničen.

Dakle, niz je rastući i ograničen odozgo, te je prema teoremi 3.26 konvergentan. Dakle, postoji realan broj L takav da važi

$$\lim_{n\to\infty}f_n=\lim_{n\to\infty}f_{n-1}=L.$$

Na osnovu $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+f_{n-1}}$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=\sqrt{2+\lim\limits_{n\to\infty}f_n}$, dolazimo do jednačine $L=\sqrt{2+L}$. Kvadriranjem zadnje jednačine dolazimo do kvadratne jednačine, $L^2-L-2=0$, čija su rešenja $L_1=2$ i $L_2=-1$. Pošto su svi članovi niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivni, jasno je da njegova granica ne može da bude negativna. Prema tome važi $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ korena}}=2.$ ▶

3.2 Granična vrednost funkcije

3.2.1 Osnovni pojmovi

Za definiciju granične vrednosti funkcije u tački, moramo imati pojam tačke nagomilavanja skupa.

3.30. Definicija. *Neka skup $A \subset \mathbb{R}$ ima beskonačno mnogo članova. Tačka x_0 je* **tačka nagomilavanja skupa** $A \subset \mathbb{R}$, *ako za svako $\varepsilon > 0$ interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ sadrži bar jedan elemenat iz skupa A, različit od x_0.*

Ostavljamo čitaocu da pokaže da tada u skupu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A$ ima beskonačno mnogo elemenata skupa A.
Svaka tačka zatvorenog intervala $[a,b]$ jeste i njegova tačka nagomilavanja, međutim tačke nagomilavanja otvorenog intervala (a,b) su sve njegove tačke, ali i tačke a i b koje mu ne pripadaju.

3.31. Definicija. *Neka je tačka x_0 tačka nagomilavanja domena A funkcije $f : A \to \mathbb{R}$. Broj L je f u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za svako $x \in A$ koje zadovoljava uslov $0 < |x - x_0| < \delta$ važi $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

Tada pišemo $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \in A} f(x) = L$ ili $f(x) \to L$ kada $x \to x_0$, $x \in A$.

Korišćenjem logičkih simbola može se prethodna definicija iskazati kao
$$\lim_{x \to x_0,\, x \in A} f(x) = L \iff$$
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in A)\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Primetimo da tačka x_0 može, ali ne mora, pripadati definicionom skupu A funkcije f, ali *mora biti tačka nagomilavanja* skupa A, odnosno u svakom intervalu koji sadrži tačku x_0 mora postojati beskonačno mnogo elemenata definicionog skupa funkcije f. Obratimo pažnju i na činjenicu da iz nejednakosti $0 < |x - x_0|$ sledi da su tačke x koje se "približavaju" tački x_0 *uvek različite od same tačke* x_0 u kojoj se traži granična vrednost.

3.32. Primer. *Pokazati po definiciji 3.31 da je granična vrednost funkcije $f(x) = -x^2 + 4x$, $x \in \mathbb{R}$, u tački $x_0 = 1$ jednaka 3, tj. da važi $\lim\limits_{x \to 1,\, x \in \mathbb{R}} (-x^2 + 4x) = 3$.*

Rešenje. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Ako je $x \in (0,2)$, $x \neq 1$, tada važi $|x - 3| < 3$, pa sledi
$$|f(x) - 3| = |-x^2 + 4x - 3| = |x - 3||x - 1| < 3 \cdot |x - 1|.$$
Dakle, ako sada izaberemo $\delta := \varepsilon/3$, tada je
$$0 < |x - 1| < \delta = \varepsilon/3 \Rightarrow |f(x) - 3| < 3 \cdot |x - 1| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \qquad \blacktriangleright$$

Desna granična vrednost (respektivno **leva granična vrednost**) funkcije f u tački x_0 dobija se ako u definiciji 3.31 posmatramo samo one vrednosti $x \in A$ koje su veće (respektivno manje) od x_0. Ako ona postoji, označava se sa
$$\lim_{x \to x_0,\, x \in A_+} f(x) \quad (\text{respektivno} \quad \lim_{x \to x_0,\, x \in A_-} f(x)),$$
gde je $A_+ = A \cap (x_0, +\infty)$ i $A_+ = A \cap (-\infty, x_0)$.

3.33. Teorema. *Ako postoje leva i desna granična vrednost funkcije $f : A \to \mathbb{R}$ u tački x_0, potreban i dovoljan uslov da funkcija f ima graničnu vrednost u tački x_0 jeste da važe jednakosti:*
$$\lim_{x \to x_0,\, x \in A_+} f(x) = \lim_{x \to x_0,\, x \in A_-} f(x) = \lim_{x \to x_0,\, x \in A} f(x).$$

3.2.2 Osobine granične vrednosti funkcije

3.34. Teorema. *Neka su realne funkcije f i g definisane na skupu $A \subset \mathbb{R}$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa A. Ako pretpostavimo da postoje*
$$\lim_{x \to x_0,\, x \in A} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to x_0,\, x \in A} g(x) = K,$$
tada važe sledeće jednakosti:
$$\lim_{x \to x_0,\, x \in A} (f(x) \pm g(x)) = L \pm K;$$
granična vrednost **zbira** *(respektivno razlike) dve funkcije jednaka je zbiru (respektivno razlici) graničnih vrednosti funkcija, tj.*
$$\lim_{x \to x_0,\, x \in A} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot K;$$
granična vrednost **proizvoda** *dve funkcije jednaka je proizvodu graničnih vrednosti funkcija, tj.*
$$\lim_{x \to x_0,\, x \in A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K},\ g(x) \neq 0,\ \ x \neq x_0,\ \ x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A,\ \ \varepsilon > 0,\ K \neq 0,$$
granična vrednost **količnika** *dve funkcije jednaka je količniku graničnih vrednosti funkcija.*

3.35. Teorema. *Neka su realne funkcije f i g definisane na skupu $A \subset \mathbb{R}$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa A. Ako postoje granične vrednosti*
$$\lim_{x \to x_0,\, x \in A} f(x) = L \ \ i \ \ \lim_{x \to x_0,\, x \in A} g(x) = K, \textit{ i za sve } x \in A \setminus \{x_0\} \textit{ važi nejednakost}$$
$$f(x) \le g(x), \quad \textit{tada je } L \le K.$$

3.36. Teorema. *Neka su realne funkcije f i g definisane na skupu $A \subset \mathbb{R}$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa A. Ako postoje granične vrednosti*
$$\lim_{x \to x_0,\, x \in A} f(x) = \lim_{x \to x_0,\, x \in A} g(x) = L, \textit{ i važi}$$
$$f(x) \le h(x) \le g(x), \textit{ za sve } x \in A \setminus \{x_0\}, \quad \textit{tada je } \lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$

Često se koristi sledeća teorema o graničnoj vrednosti kompozicije funkcija posebno kada se granična vrednost funkcije nalazi pomoću *smene*.

3.37. Teorema. *Ako postoje granične vrednosti* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *i* $\lim\limits_{y\to L} g(y) = K$ *i za* $x \neq a$ *u nekoj okolini* $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ *važi da je* $f(x) \neq L$, *tada postoji granična vrednost* $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)$, *koja je jednaka*

$$\lim_{x\to a} g\circ f(x) = K. \tag{3.6}$$

U praksi, ako je skup A prirodni definicioni skup funkcije f, ili se domen A podrazumeva, pisaćemo samo

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad \lim_{x\to x_0+} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0-} f(x)$$

za graničnu vrednost, desnu i levu graničnu vrednost funkcije f u tački x_0.

3.38. Primer. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-3x^2-x-2}{x-2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-4x}{x^2-x-12}$;

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-13x-10}{2x^2-7x-15}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2x+3}{x^2-x} - 3\dfrac{x+1}{x^3-x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$; **h)** $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{x^2-9}$; **i)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^7+12x^5-13x^4+5x^2+4x-9}{x^5-4x^4+3x^3-2x^2+x+1}$;

j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5-3x^4+5x^3-7x^2+4}{x^5-5x^4+8x^3+x^2-12x+4}$.

Rešenja.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 6.$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-3x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(2x^2+x+1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(2x^2+x+1) = 11.$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-4x}{x^2-x-12} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x(x-4)}{(x-4)(x+3)} = \dfrac{4}{7}.$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-13x-10}{2x^2-7x-15} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(x-5)(3x+2)}{(x-5)(2x+3)} = \dfrac{17}{13}.$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2.$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2x+3}{x^2-x} - 3\dfrac{x+1}{x^3-x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+2x}{x(x-1)(x+1)} = -2.$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{12}{4} = 3.$

h) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{27}{-6} = -9/2.$

i) Ako je $x = x_0$ nula polinoma $P_n(x)$, tada važi $P_n(x) = (x-x_0)Q_{n-1}(x)$, gde se koeficijenti polinoma $Q_{n-1}(x)$ određuju pomoću Hornerove sheme. Za polinom iz brojioca važi

$$\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 12 & -13 & 0 & 5 & 4 & -9 & x=1 \\ & 1 & 1 & 13 & 0 & 0 & 5 & 9 & 0. \end{array}$$

Prema tome je $x^7+12x^5-13x^4+5x^2+4x-9 = (x-1)(x^6+x^5+13x^4+5x+9)$. Za polinom iz imenioca je

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 & 1 & 1 & x=1 \\ & 1 & -3 & 0 & -2 & -1 & 0, \end{array}$$

pa sledi $x^5-4x^4+3x^3-2x^2+x+1 = (x-1)(x^4-3x^3-2x-1)$. Tako dobijamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^7+12x^5-13x^4+5x^2+4x-9}{x^5-4x^4+3x^3-2x^2+x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^6+x^5+13x^4+5x+9)}{(x-1)(x^4-3x^3-2x-1)} = -\frac{29}{5}.$$

j) Za polinom iz brojioca važi

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 5 & -7 & 0 & 4 & x=2 \\ & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 & 0. \end{array}$$

Dakle važi $x^5-3x^4+5x^3-7x^2+4 = (x-2)(x^4-x^3+3x^2-x-2)$. Za polinom iz imenioca važi

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & -5 & 8 & 1 & -12 & 4 & x=2 \\ & 1 & -3 & 2 & 5 & -2 & 0. \end{array}$$

Prema tome je $x^5-5x^4+8x^3+x^2-12x+4 = (x-2)(x^4-3x^3+2x^2+5x-2)$. Znači važi

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^5-3x^4+5x^3-7x^2+4}{x^5-5x^4+8x^3+x^2-12x+4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^4-x^3+3x^2-x-2)}{(x-2)(x^4-3x^3+2x^2+5x-2)} = 2. \quad \blacktriangleright$$

3.39. Primer. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{8+x}-4}{\sqrt[3]{x}-2}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{x}$.

Rešenja.

a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \dfrac{1}{6}.$

Ovaj zadatak se mogao rešiti i korišćenjem jednakosti $x-9 = (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)$, $x > 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = 1/6.$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-4)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(\sqrt{x+2}+2)(x-2)}{x-2} = 4.$

d) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{8+x}-4}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(\sqrt{8+x}-4)(\sqrt{8+x}+4)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{8+x}+4)}$

$=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{8+x}+4)}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}.$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x^2+x+1}-x-1)(\sqrt{x^2+x+1}+x+1)}{x(\sqrt{x^2+x+1}+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x(\sqrt{x^2+x+1}+x+1)}=\dfrac{-1}{1+1}=-1/2.$ ▶

3.40. Definicija. *Neka domen A funkcije $f:A\to\mathbb{R}$ sadrži interval $(a,+\infty)$ za neki realan broj a. Broj L je* **granična vrednost funkcije f u plus beskonačno,** *ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $T>a$, tako da važi implikacija* $x>T\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$.

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L. \tag{3.7}$$

Analogno se definiše i granična vrednost funkcije $f:A\to\mathbb{R}$ u $-\infty$, u oznaci $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, samo što tada domen A mora da sadrži interval $(-\infty,b)$ za neki realan broj b.

3.41. Primer. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x+5}{x^2+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3+3x^2+2x+5}{5x^3+x^2+x+3}$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3+3x^2+2x+5}{5x^4+x^2+x+3}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^4+3x^2+2x+5}{5x^3+x^2+x+3}$; **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$; **f)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+x-1}-4x\right)$.

Rešenja.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x+5}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=3.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3+3x^2+2x+5}{5x^3+x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=1.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3+3x^2+2x+5}{5x^4+x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^4\left(5+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)}=0.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^4+3x^2+2x+5}{5x^3+x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4\left(5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=+\infty.$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}=1.$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}=0.$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+x-1}-4x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{16x^2+x-1}-4x\right)\left(\sqrt{16x^2+x-1}+4x\right)}{\sqrt{16x^2+x-1}+4x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{16x^2+x-1}+4x}=\dfrac{1}{8}.$ ▶

3.2.3 Neke granične vrednosti funkcija

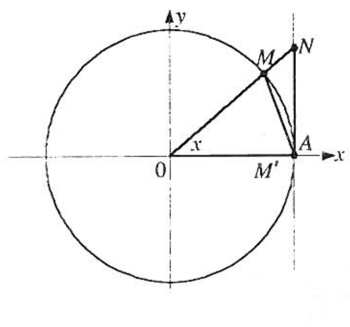
3.42. Primer. *Pokazati da je* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

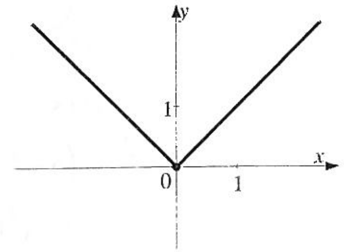
Rešenje. Posmatrajmo jediničnu kružnicu sa centrom u tački $O(0,0)$ i neka je dat ugao $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, čiji kraci seku kružnicu u tačkama $A(1,0)$ i $M(x,y)$. Tangenta kružnice u tački A neka seče krak OM u tački N, i neka je M' podnožje normale iz tačke M na $x-$osu (sliku 3.1).

U tom slučaju važi očevidna nejednakost

$$P_{\triangle OAM}<P_{i(OAM)}<P_{\triangle OAN}, \tag{3.8}$$

gde, na primer, $P_{\triangle OAM}$ označava površinu trougla OAM, a $P_{i(OAM)}$ označava površinu kružnog isečka OAM. Visina trougla OAM koja odgovara stranici OA je $MM'=\sin x$, pa je $P_{\triangle OAM}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x=\dfrac{\sin x}{2}$. Slično, pošto je kateta NA pravouglog trougla OAN jednaka $\operatorname{tg}x$, to je $P_{\triangle OAN}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg}x=\dfrac{\operatorname{tg}x}{2}$. Konačno, iz elementarne matematike je poznato da je površina kružnog isečka jednaka polovini proizvoda





Slika 3.1. Slika 3.2.

dva poluprečnika i zahvaćenog ugla (jasno, izraženog u radijanima):

$$P_{i(OAM)} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA}\cdot\overline{OM}\cdot x\right) = \frac{x}{2}.$$

Relacija (3.8) se može zapisati na sledeći način: $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$. Odatle je

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \qquad (3.9)$$

jer smo pretpostavili da je $x \in (0, \pi/2)$, što povlači da su i $\sin x > 0$ i $\operatorname{tg} x > 0$. Kako zbog neprekidnosti funkcije $g(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, u tački $x = 0$ važi $\lim\limits_{x\to 0+} \cos x = \cos 0 = 1$ to iz teoreme 3.36 sledi da je

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$, je parna, pa važi da je i $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$, što konačno daje $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ▶

3.43. Primer. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(7x-7)}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 5x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin 2x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

Rešenja.

a) Korišćenjem neprekidnosti funkcije $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, u tački $x = 0$ dobija se

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

b) Funkcija $h(x) = \frac{\sin 7(x-1)}{x-1}$, $x \neq 1$, se može napisati kao složena funkcija $h = g \circ f$, gde je $f(x) = 7(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$ i $g(y) = \frac{\sin y}{y/7}$, $y \neq 0$. Kako je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 1}(7(x-1)) = 0, \quad \lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y/7} = 7 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 7\cdot 1 = 7,$$

to su zadovoljeni uslovi teoreme 3.37, te sledi

$$\lim_{x\to 1} g\circ f(x) = \lim_{y\to 0} g(y) = 7, \quad \text{pa je} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7(x-1)}{x-1} = 7.$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

d) Na osnovu identiteta $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, dobija se

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

e) Na osnovu primera pod d) je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{2\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{1}{4}$.

f) Oslobađanjem od korena u imeniocu dobija se: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{\frac{1}{2}+1} = 4/3. \quad ▶$$

3.44. Primer. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin 4\pi x}{\sin 3\pi x}$; b) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$; c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Rešenja.

a) Posle uvođenja smene $t = x-1$, $x = t+1$, pri čemu $t \to 0$ kada $x \to 1$, dobija se

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin 4\pi x}{\sin 3\pi x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 4\pi(t+1)}{\sin 3\pi(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(4\pi t+4\pi)}{\sin(3\pi t+3\pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 4\pi t}{-\sin 3\pi t}$$

$$= \frac{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin 4\pi t}{4\pi t}}{\lim\limits_{t\to 0} \frac{-\sin 3\pi t}{3\pi t}} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{4\pi t}{3\pi t} = \frac{1}{-1}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}.$$

b) $$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2} = \cos a.$$

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin a}{\cos a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{\cos x\cos a\cdot(x-a)}=\dfrac{1}{\cos^2 a}.$

d) Posle uvođenja smene $t=\operatorname{arctg}x$, gde $t\to 0$ kada $x\to 0$, sledi (videti zadatak pod c))

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}t}=1. \quad ▶$$

3.45. Primer. *Pokazati da je* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

Rešenje. Ako označimo sa $n=[x]$, tada važi $n\le x<n+1$, odnosno

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n}.$$

Prema tome je $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^x<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x$,

odakle je $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, tj.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Ako $x\to+\infty$, tada i $n\to\infty$, pa je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\le\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Iz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$, i teoreme 3.36 sledi tvrdjenje. ▶

3.46. Primer. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+2}\right)^{x+2}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\sqrt{x+1}-\ln\sqrt{x}\right)\cdot x$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg}x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$; **h)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Rešenja.

a) Odredićemo prvo levu graničnu vrednost date funkcije u nuli, tj. $\lim\limits_{x\to 0-}(1+x)^{1/x}$.
Ako stavimo $t=1/x$, tj. $x=1/t$, tada $t\to-\infty$ kada $x\to 0-$. Tako dobijamo

$$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{1/x}=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\lim_{s\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-s}\right)^{-s}=e.$$

Analogno se dobija da je i desna granična vrednost date funkcije u nuli jednaka e. Dakle, i tražena granična vrednost je jednaka e, tj. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{x})^x}{(1-\frac{1}{x})^x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^x=e^2.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+2}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{2(x+1)}\right)^{2(x+1)}\right)^{1/2}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+2}\right)=e^{1/2}.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\sqrt{x+1}-\ln\sqrt{x}\right)\cdot x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x=\dfrac{1}{2}\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\dfrac{1}{2}.$

e) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg}x}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+\sin x)^{1/\sin x}\right)^{\cos x}=\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=e^1=e.$

f) Smenom $t=e^x-1$, tj. $x=\ln(t+1)$, pri čemu $t\to 0$ kada $x\to 0$, dobija se

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(t+1)^{1/t}}=1.$$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=1.$

h) Pokazaćemo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=a$, $a\in\mathbb{R}$, jer je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{ax}-1}{x}-\dfrac{e^{bx}-1}{x}\right).$

Smenom $t=e^{ax}-1$, ($t\to 0$ kada $x\to 0$), tj. $x=\dfrac{\ln(t+1)}{a}$, dobija se

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{a}}=\lim_{t\to 0}\frac{a}{\frac{1}{t}\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{a}{\ln(t+1)^{1/t}}=a.$$

Prema tome je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=a-b.$ ▶

3.47. Primer. *Odrediti sledeće desne granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 0+}(2+\sqrt{x})$; b) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\sqrt{x^3}-\ln x\right)$; c) $\lim\limits_{x\to -5+}(\sqrt{x+5}+x)$;

d) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to 3+}\frac{1}{x-3}$; f) $\lim\limits_{x\to 0+}2^{\frac{1}{x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0+}e^{-1/x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{1+e^{1/x}}$; i) $\lim\limits_{x\to 0+}\ln\left(1+2^{-1/x}\right)$.

Rezultati.

a) $\lim\limits_{x\to 0+}(2+\sqrt{x})=2$. b) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\sqrt{x^3}-\ln x\right)=0-(-\infty)=+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to -5+}(\sqrt{x+5}+x)=-5$. d) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to 3+}\frac{1}{x-3}=+\infty$. f) $\lim\limits_{x\to 0+}2^{1/x}=+\infty$. g) $\lim\limits_{x\to 0+}e^{-1/x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{e^{1/x}}=0$.

h) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{1+e^{1/x}}=0$. i) $\lim\limits_{x\to 0+}\ln\left(1+2^{-1/x}\right)=0$. ▶

3.48. Primer. *Odrediti sledeće leve granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 0-}(2+\sqrt{-x})$; b) $\lim\limits_{x\to 0-}\left(\sqrt{(-x)^5}+\ln(1+x)\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to -1-}\frac{\sqrt{1-x}}{1-x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{1}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 3-}\frac{1}{3-x}$; g) $\lim\limits_{x\to 0-}2^{1/x}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0-}e^{-1/x}$; i) $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{1}{1+e^{1/x}}$; j) $\lim\limits_{x\to 0-}\ln\left(1+2^{1/x}\right)$.

Rešenja.

a) Funkcija $f(x)=2+\sqrt{-x}$ je definisana za $x<0$, pa važi $\lim\limits_{x\to 0-}(2+\sqrt{-x})=2$.

U prethodnom primeru pod a) nije bilo moguće tražiti levu graničnu vrednost, dok se u ovom slučaju ne može tražiti desna granična vrednost date funkcije.

b) Funkcija je definisana za $x>-1$: $\lim\limits_{x\to 0-}\left(\sqrt{(-x)^5}+\ln(1+x)\right)=0+0=0$.

c) $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}=0$.

d) $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\sqrt{1-x}}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\sqrt{1-x}}{\left(\sqrt{(1-x)(1+x)}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}}=+\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$. f) $\lim\limits_{x\to 3-}\frac{1}{3-x}=+\infty$. g) $\lim\limits_{x\to 0-}2^{1/x}=0$.

h) $\lim\limits_{x\to 0-}e^{-1/x}=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{1}{e^{1/x}}=+\infty$. i) $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{1}{1+e^{1/x}}=1$.

j) $\lim\limits_{x\to 0-}\ln(1+2^{1/x})=0$. ▶

3.2.4 Asimptote

3.49. Definicija. Asimptota *grafika funkcije* $f:A\to B$ *u* $+\infty$, *(respektivno u* $-\infty$*) je prava linija* $y=kx+n$ *za koju važi*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+n))=0 \quad (\textit{respektivno} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-(kx+n))=0). \quad (3.10)$$

Ako je u (3.10) $k=0$, tj. ako f ima graničnu vrednost n u $+\infty$ (respektivno u $-\infty$), tada grafik funkcije f ima **horizontalnu asimptotu** u $+\infty$ (respektivno u $-\infty$), čija je jednačina $y=n$.

Ako je u (3.10) $k\neq 0$, tada se prava $y=kx+n$ zove **kosa asimptota** grafika funkcije f u $+\infty$ odn. u $-\infty$. Brojevi k i n se u tom slučaju određuju pomoću graničnih vrednosti

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx).$$

Ako za neko a, domen funkcije f sadrži interval $(a,+\infty)$ i za svako $M>0$ postoji $T>a$, sa osobinom da za $x>T$, važi $f(x)>M$, tada kažemo da f **teži ka plus beskonačno kada** $x\to+\infty$ i to pišemo $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Analogna značenja imaju i oznake

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

Za ispitivanje grafika neke funkcije f, a posebno da bi definisali **vertikalnu asimptotu grafika funkcije,** važno je sledeće proširenje pojma granične vrednosti funkcije u tački.

Neka domen A funkcije f sadrži interval (x_0,b) za neko $b>x_0$. Ako za svako $M>0$ postoji $\delta>0$, takvo da važi implikacija

$$(\forall x\in A)\ \ 0<x-x_0<\delta \Rightarrow f(x)>M,$$

tada kažemo da funkcija f **teži ka plus beskonačno kada** $x\to x_0+$, što se označava sa

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = +\infty. \tag{3.11}$$

Odgovarajuća značenja imaju i oznake

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = -\infty. \tag{3.12}$$

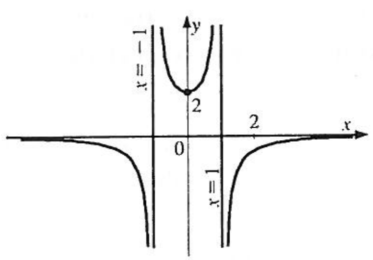
3.50. Definicija. Vertikalna asimptota *grafika funkcije $f : A \to B$ u tački x_0 je prava linija $x = x_0$ ako f teži bilo ka $+\infty$ ili ka $-\infty$ kada bilo $x \to x_0+$ ili $x \to x_0-$.*

Drugim rečima, vertikalna prava $x = x_0$ je vertikalna asimptota ako u proširenom smislu postoji bar jedna od četiri granične vrednosti iz (3.11) i (3.12).

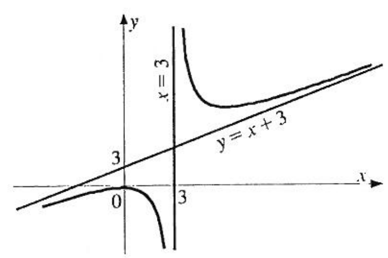
3.51. Primer. *Odrediti asimptote grafika sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$; b) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$; c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$;

d) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$; e) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$; f) $f(x) = \arcsin e^{-x}$.



Slika 3.3. $f(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$



Slika 3.4. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$

Rešenja.

a) Prirodni domen funkcije f je skup $\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$. Njen grafik, dat na slici 3.3, ima vertikalne asimptote $x = 1$ i $x = -1$, jer je

$$\lim_{x\to 1+} \frac{2}{1-x^2} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -1+} \frac{2}{1-x^2} = +\infty.$$

(Primetimo da je $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{2}{1-x^2} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to -1-} \dfrac{2}{1-x^2} = -\infty$.)

Grafik funkcije ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kad $x \to +\infty$ i kad $x \to -\infty$, jer je

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{1-x^2} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{1-x^2} = 0.$$

b) Funkcija f je definisana na intervalu $(-1,1)$. Iz

$$\lim_{x\to -1+} \ln\frac{1-x}{1+x} = +\infty, \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 1-} \ln\frac{1-x}{1+x} = -\infty,$$

sledi da grafik funkcije f ima dve vertikalne asimptote: $x = 1$ i $x = -1$.

c) Grafik funkcije f ima vertikalnu asimptotu $x = 3$ i kosu asimptotu $y = x + 3$ kad $x \to +\infty$ i kad $x \to -\infty$ (slika 3.4).

d) Funkcija f je definisana na intervalu $[1, +\infty)$. Grafik funkcije f nema vertikalnu asimptotu, jer je $\lim\limits_{x\to 1+} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = \sqrt{2}$.
Grafik f ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kad $x \to +\infty$, jer je $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = 0$.

e) Funkcija f je definisana na intervalu $[0,4]$. Njen grafik nema asimptota.

f) Funkcija f je definisana na intervalu $[0, +\infty)$. Nema vertikalnih asimptota, jer funkcija f ima konačnu desnu graničnu vrednosti u 0: $\lim\limits_{x\to 0+} \arcsin e^{-x} = \dfrac{\pi}{2}$.
Kako je $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin e^{-x} = 0$, to sledi da grafik funkcije f ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kad $x \to +\infty$. ▶

3.3 Neprekidnost funkcije

3.3.1 Definicija neprekidne funkcije

3.52. Definicija. *Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je* **neprekidna u tački** $x_0 \in A$ *ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$ tako da važi implikacija*

$$(\forall x \in A) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Iz ove definicije sledi da se neprekidnost funkcije ispituje samo u onim tačkama u kojima je ona definisana. Međutim, nije obavezno (kao kod granične vrednosti funkcije) da posmatrana tačka bude i tačka nagomilavanja domena funkcije. Važi

3.53. Teorema. *Neka je tačka $x_0 \in A$ tačka nagomilavanja domena funkcije $f : A \to \mathbb{R}$. Tada je f neprekidna u tački x_0 ako i samo ako je*

$$\lim_{x\to x_0,\, x\in A} f(x) = f(x_0).$$

U praksi, se obično pojavljuju sledeća tri slučaja.

I Neka je realna funkcija f definisana na intervalu $(a,b) \subset A$ i neka tačka x_0 pripada (a,b). Funkcija f je neprekidna u tački x_0 ako

$$\textbf{postoji } \lim_{x\to x_0} f(x); \text{ i } \textbf{važi jednakost } \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

II Neka je realna funkcija f definisana na skupu koji sadrži interval $[x_0, b)$. Funkcija f je **neprekidna sa desna u tački** x_0 ako važe sledeća dva uslova:

postoji $\lim_{x\to x_0+} f(x)$; i važi jednakost $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

III Neka je realna funkcija f definisana na skupu koji sadrži interval $(a, x_0]$. Funkcija f je **neprekidna sa leva u tački** x_0 ako važe sledeća dva uslova:

postoji $\lim_{x\to x_0-} f(x)$; i važi jednakost $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je **neprekidna na skupu** $B \subset A$ ako je neprekidna u svakoj tački skupa B.
Posebno, funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je **neprekidna na zatvorenom intervalu** $[a,b] \subset A$ ako je neprekidna na otvorenom intervalu (a,b) i ako važi (videti slučajeve II i III):

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to b-} f(x) = f(b).$$

3.54. Teorema. *Ako su funkcije f i g neprekidne u tački x_0, tada su u toj tački neprekidne i funkcije koje predstavljaju njihov*

zbir $f+g$; **razliku** $f-g$; **proizvod** $f\cdot g$; **količnik** $\dfrac{f}{g}$, *ako je* $g(x_0)\neq 0$.

Dokaz. Pokazaćemo samo da je zbir dve neprekidne funkcije u tački x_0 neprekidan u toj tački, i to za slučaj kada je x_0 tačka nagomilavanja njihovih domena.

Dakle, neka su funkcije f i g neprekidne u tački x_0. Prema teoremi 3.53 tada važi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Kako je $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ i granična vrednost zbira jednaka zbiru graničnih vrednosti (ako postoje), to je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) &= \lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)\\ &= f(x_0)+f(x_0) = (f+g)(x_0).\end{aligned}$$ ▶

Takođe je *kompozicija neprekidnih funkcija neprekidna funkcija.*

Osnovne elementarne funkcije su neprekidne na celom njihovom definicionom skupu:

polinom je neprekidna funkcija na celom skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ (sledi iz neprekidnosti na $\mathbb{R}$ funkcije $f(x) = x$ i prethodne teoreme);

racionalna funkcija $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ je neprekidna na skupu $\{x\in\mathbb{R} \mid Q(x)\neq 0\}$;

sinusna i kosinusna funkcija su neprekidne na celom skupu $\mathbb{R}$;

funkcija $f(x) = \mathrm{tg}\,x$ je neprekidna na skupu $\mathbb{R}\setminus\{\frac{2k+1}{2}\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$, dok je funkcija

$f(x) = \mathrm{ctg}\,x$ neprekidna na skupu $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$;

eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, je neprekidna na skupu $\mathbb{R}$;

logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, je neprekidna na $(0,+\infty)$.

Na osnovu prethodnog, i **elementarne funkcije su neprekidne na svom prirodnom definicionom skupu.**

Na primer,

a) Funkcija $f(x) = \frac{1}{x-1}$ nije definisana u tački $x=1$, tako da se ne može ni ispitivati neprekidnost ove funkcije u tački 1. (Pogrešno bi bilo reći da je funkcija f prekidna u tački 1.)

b) Funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{za } x\neq 1,\\ 2 & \text{za } x=1;\end{cases}$ je neprekidna u tački $x=1$, jer je
$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 = f(1)$.

c) Funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{za } x\neq 1,\\ 5 & \text{za } x=1;\end{cases}$ nije neprekidna u tački $x=1$, jer je $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq 5 = f(1)$, (uporediti sa zadatkom pod b)).

d) Funkcija $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{za } x\neq 0,\\ 10 & \text{za } x=0;\end{cases}$ je prekidna u tački $x=0$, jer je
$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 10 = f(0)$,

Primetimo da je funkcija f definisana u tački 0 i ima u njoj graničnu vrednost jednaku 1. Prema slučaju I iz uvoda, da je funkcija f bila definisana u tački 0 sa vrednošću 1, bila bi u njoj i neprekidna.

e) Funkcija $f(x) = |x|$, $x\in\mathbb{R}$; je neprekidna u tački $x=0$, jer važi (sl.3.2.)
$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x = 0$ i $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(-x) = 0$,
a u isto vreme je $f(0) = 0$.

f) Funkcija $f(x) = \mathrm{sgn}\,x := \begin{cases} 1 & \text{za } x>0,\\ 0 & \text{za } x=0,\\ -1 & \text{za } x<0.\end{cases}$ je prekidna u tački $x=0$, jer je
$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0-} f(x)$.
Za razliku od zadatka pod c) ili d), ovde je potpuno svejedno kako je funkcija definisana u tački $x=0$ (videti sliku 3.5).

3.3.2 Prekidi funkcija

Ako funkcija $f: A \to \mathbb{R}$ nije neprekidna u nekoj tački $x_0 \in A$, kažemo da funkcija u toj tački ima **prekid** i to

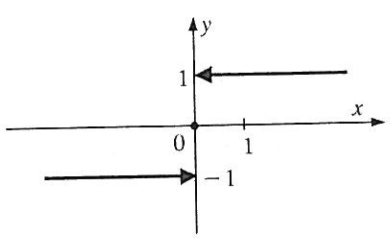
prividan prekid ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ i važi $L \neq f(x_0)$;

prekid prve vrste ako postoje $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = L_1$ i $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = L_2$, ali $L_1 \neq L_2$;

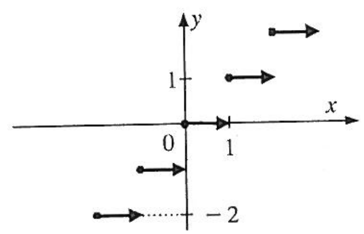
prekid druge vrste ako nije ni prividan ni prekid prve vrste.

Funkcija $f(x) = [x]$ dodeljuje broju $x \in \mathbb{R}$ najveći ceo broj koji nije veći od x. Dakle, za $k \in \mathbb{Z}$ je $\lim\limits_{x\to k+} f(x) = k$ i $\lim\limits_{x\to k-} f(x) = k-1$, pa f ima prekid prve vrste u svakom celom broju k (slika 3.6).

Posmatrajmo funkciju f datu sa: $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1; \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ Ona je neprekidna

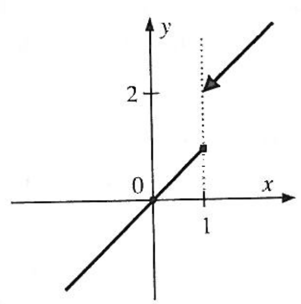


Slika 3.5.

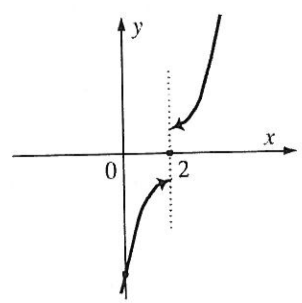


Slika 3.6.

na skupu $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ali ima prekid prve vrste u tački 1. Grafik ove funkcije je dat na slici 3.7.



Slika 3.7.



Slika 3.8.

Funkcija f data sa $f(x) = \begin{cases} -x^2+4x-5, & x<2; \\ 0, & x=2; \\ x^2-4x+5, & x>2. \end{cases}$ (slika 3.8) ima prekid prve

vrste u tački $x_0 = 2$, i neprekidna je na skupu $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu

3.55. Teorema. *Neprekidna funkcije na zatvorenom intervalu dostiže svoj maksimum i minimum.*

3.56. Primer. *Za funkciju* $f(x) = x^2+1$, $x \in \mathbb{R}$, *odrediti njen infimum, supremum, i, ako postoje, minimum i maksimum na datom intervalu* I:

a) $I = [-2,0)$; b) $I = [1,3)$; a) $I = [-2,3]$;

Rešenja.

a) Funkcija $f(x) = x^2+1$ nad intervalom $[-2,0)$ ima infimum u tački 0, koji je jednak 1. Ova funkcija ima maksimum (dakle i supremum) nad $(-2,0)$, koji je dostignut u tački -2, i taj maksimum je jednak $f(-2) = 5$.

b) $\inf\limits_{x\in[1,3)} f(x) = 2$, $\min\limits_{x\in[1,3)} f(x) = 2$, $\sup\limits_{x\in[1,3)} f(x) = 10$, ne postoji $\max\limits_{x\in[1,3)} f(x)$.

c) $\inf\limits_{x\in[-2,3]} f(x) = \min\limits_{x\in[-2,3]} f(x) = f(0) = 1$, $\sup\limits_{x\in[-2,3]} f(x) = \max\limits_{x\in[-2,3]} f(x) = f(3) = 10$.

Teorema 3.55 se primenjuje samo u slučaju **c)**; primeri **a)** i **b)** pokazuju da ta teorema nije tačna bez uslova o zatvorenosti posmatranog intervala. ▶

3.4 Izvod funkcije

3.57. Definicija. *Neka je realna funkcija* f *definisana na intervalu* (a,b) *i neka je* x_0 *jedna tačka intervala* (a,b). *Granična vrednost*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \tag{3.13}$$

ako postoji, naziva se **prvi izvod funkcije f u tački x_0**.

Pored $f'(x_0)$, za prvi izvod funkcije f u tački x_0 koristi se i oznaka $f'_x(x_0)$, čime se naglašava promenljiva po kojoj se traži izvod.

Funkcija $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ je **diferencijabilna u tački** $x_0 \in (a,b)$ ako ona ima prvi izvod u tački x_0.

Funkcija je **diferencijabilna na intervalu** (a,b) ako je diferencijabilna u svakoj tački intervala (a,b). U tom se slučaju funkcija $f': (a,b) \to \mathbb{R}$, koja broju $x \in (a,b)$ dodeljuje broj $f'(x)$, zove **izvodna funkcija** ili **prvi izvod funkcije** f.

Funkcija je diferencijabilna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ ako je diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b) i ako postoje sledeće granične vrednosti

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\quad \text{i}\quad \lim_{h\to 0-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}.$$

Levi izvod funkcije f u tački x_0 je definisan sa $f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Desni izvod funkcije f u tački x_0 je definisan sa $f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Funkcija ima izvod u tački x_0 ako postoje i levi i desni izvod u toj tački i ako su oni jednaki, tj.

$$f'_-(x_0)=f'_+(x_0).$$

3.58. Primer. *Po definiciji, odrediti prvi izvod date funkcije f u tački x_0 njenog definicionog skupa:*

a) $f(x)=3x^2-2x+5,\ x\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=\dfrac{3}{x},\ x\neq 0$;

c) $f(x)=\sqrt{x},\ x>0$; d) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x\neq 0$.

Odrediti najveći podskup od $\mathbb{R}$ na kome taj izvod postoji.

Rešenja.

a) Po definiciji je za $x_0\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x_0+h)^2-2(x_0+h)+5-(3x_0^2-2x_0+5)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3x_0^2+6x_0h+3h^2-2x_0-2h+5-3x_0^2+2x_0-5}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(6x_0+3h-2)}{h}=6x_0-2. \end{aligned}$$

b) Za $x_0\neq 0$ važi: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{3}{x_0+h}-\frac{3}{x_0}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{3(x_0-x_0-h)}{x_0(x_0+h)}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-3h}{x_0(x_0+h)h}=\dfrac{-3}{x_0^2}$.

c) Za $x_0>0$ važi:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

d) Za $x_0\in\mathbb{R}$, $x_0\neq 0$, važi:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x_0+h}-\sqrt[3]{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x_0+h}-\sqrt[3]{x_0}\right)\left(\sqrt[3]{(x_0+h)^2}+\sqrt[3]{(x_0+h)x_0}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{(x_0+h)^2}+\sqrt[3]{(x_0+h)x_0}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(x_0+h)^2}+\sqrt[3]{(x_0+h)x_0}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=\frac{1}{3x_0^{2/3}}. \end{aligned}$$

▶

Tablica prvih izvoda

- $(x^n)'=nx^{n-1},\quad n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}$;
- $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ x>0$;
- $(\sin x)'=\cos x,\quad x\in\mathbb{R}$;
- $(\cos x)'=-\sin x,\quad x\in\mathbb{R}$;
- $(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$;
- $(\operatorname{ctg}x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi|\ k\in\mathbb{Z}\}$;
- $(a^x)'=a^x\cdot\ln a,\quad a>0,\ x\in\mathbb{R}$,
- $(e^x)'=e^x,\quad x\in\mathbb{R}$;
- $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a},\quad a>0,\ a\neq 1,\ x>0$;
- $(\ln x)'=\dfrac{1}{x},\quad x>0$;
- $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1$;
- $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1$;
- $(\operatorname{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}$;
- $(\operatorname{arcctg}x)'=\dfrac{-1}{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}$.

3.59. Primer. *Korišćenjem definicije prvog izvoda 3.57 pokazati da su navedeni prvi izvodi osnovnih elementarnih funkcija tačni.*

Rešenja. Pokazaćemo samo neke od gornjih jednakosti; čitaocu ostavljamo da pokaže ostale.

Neka je $n\in\mathbb{N}$. Tada je prvi izvod funkcije $f(x)=x^n$ u tački $x\in\mathbb{R}$ po definiciji jednak:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n-x^n}{h}=nx^{n-1}.$$

Neka je $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je prvi izvod funkcije $f(x) = x^{-n}$ u tački $x > 0$ jednak:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x^n-(x+h)^n}{x^n(x+h)^n}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x^n(x+h)^n} \cdot \frac{x^n - x^n - nx^{n-1}h - \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 - \cdots - h^n}{h} = \frac{1}{x^{2n}} \cdot (-nx^{n-1}) = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Za $f(x) = \sin x$ i $x \in \mathbb{R}$ imamo po definiciji

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1 \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = \cos x. \end{aligned}$$

Za $f(x) = \operatorname{ctg} x$ imamo za $x \notin \{k\pi |\, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{ctg}(x+h) - \operatorname{ctg} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cos(x+h)\sin x - \cos x \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin(-x+(x+h))}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sin(x+h)\sin x} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sin(x+h)\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Za funkciju $f(x) = a^x$ prvi izvod u tački $x \in \mathbb{R}$ po definiciji 3.57 je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Posle smene $t = a^h - 1$, $h = \dfrac{\ln(t+1)}{\ln a}$, pri čemu $t \to 0$ kada $h \to 0$, dobijamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} = \ln a \lim_{h\to 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}} = \ln a$$

Tako dobijamo $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} a^x \dfrac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$, $\quad a > 0, a \neq 1$.

Za funkciju $f(x) = \ln x$ prvi izvod u tački $x > 0$ je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} = \frac{1}{x}. \blacktriangleright$$

U prethodnim dokazima korišćena je neprekidnost osnovnih elementarnih funkcija na njihovom definicionom skupu.

3.60. Primer. *Data je funkcija* $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. *Odrediti: domen izvodne funkcije* f'; *prvi izvod funkcije* f' *u tački* $x \in \mathbb{R}$; *i vrednosti* $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(-\sqrt{2})$, $f'(a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Domen izvodne funkcije f' je ceo skup $\mathbb{R}$. $f'(x) = 6x - 5$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(1) = 6 \cdot 1 - 5 = 1$, $f'(2) = 6 \cdot 2 - 5 = 7$. $f'(-\sqrt{2}) = 6 \cdot (-\sqrt{2}) - 5$ $= -6 \cdot \sqrt{2} - 5$ i $f'(a) = 6a - 5$. ▶

3.61. Teorema. *Ako je funkcija* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *diferencijabilna u tački* $x_0 \in (a,b)$, *tada je ona neprekidna u tački* x_0.

Dokaz. Ako x pripada definicionom skupu funkcije f i $x \neq x_0$, $x - x_0 = h$, tada se funkcija f može zapisati kao

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{h} \cdot h.$$

Prema tome je

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Ako je funkcija f neprekidna u tački x_0, tada ona ne mora biti i diferencijabilna u tački x_0 (videti sledeći primer). Dakle, neprekidnost je potreban (ali ne i dovoljan) uslov za diferencijabilnost funkcije. Drugim rečima, ako funkcija u nekoj tački nije neprekidna, onda ona ne može imati izvod u toj tački.

3.62. Primer. *Pokazali smo (videti primer 3.4) da je funkcija* $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, *neprekidna u svakoj tački* $x \in \mathbb{R}$, *pa i u tački 0. Pokazati da ova funkcija* **nema** *prvi izvod u tački nula.*

Rešenje. Pokazaćemo da za funkciju $f(x) = |x|$ ne postoji $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$, tako što ćemo potražiti levu i desnu graničnu vrednost gornjeg izraza u 0 (odnosno levi i desni izvod u 0) i uveriti se da one nisu jednake.

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1,$$

dok je desni izvod u 0 jednak 1 :

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1.$$

Prema tome, ova funkcija nema prvi izvod u tački 0, i pored toga što je neprekidna u toj tački. ▶

3.4.1 Osnovna pravila za prvi izvod funkcije

3.63. Teorema *Ako su funkcije* f *i* g *definisane na intervalu* (a,b) *i imaju prve izvode u tački* $x \in (a,b)$, *tada njihov zbir, razlika, proizvod i količnik takođe imaju prvi* *izvod u tački $x \in (a,b)$; u slučaju količnika mora se dodatno pretpostaviti da je $g(x) \neq 0$. Važe sledeća pravila za*

a) **izvod zbira,** *odnosno* **razlike** *funkcija:* $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;

b) **linearnu kombinaciju funkcija**: $(Af(x) + Bg(x))' = Af'(x) + Bg'(x)$, *$A$ i B su realne konstante;*

c) **izvod proizvoda** *funkcija:* $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

d) **izvod količnika** *funkcija:* $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$

Dokaz.

b) Ako označimo sa $z(x) = Af(x) + Bg(x)$, tada imamo

$$\begin{aligned} z'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(Af(x+h) + Bg(x+h)) - (Af(x) + Bg(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(A\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + B\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\ &= A\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + B\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = Af'(x) + Bg'(x). \end{aligned}$$

Slučaj pod a) sledi iz b), ako stavimo $A = 1$ i $B = \pm 1$.

c) Ako stavimo $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, tada imamo

$$\begin{aligned} p'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) \pm f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \end{aligned}$$

d) Ako stavimo $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, tada je

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)g(x)\cdot h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x) \pm g(x)\cdot f(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)g(x)\cdot h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)}{g(x+h)g(x)} - \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{g(x+h)g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$ ▶

U sledećim zadacima odrediti prvi izvod za svaku od datih funkcija, korišćenjem tablice i osnovnih pravila za prvi izvod funkcije, kao i skupove na kojima ti izvodi postoje.

3.64. Primer.

a) $f(x) = x^7 - 4x^2 + 2x$; b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3} + x\sqrt{x}$; c) $f(s) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5s^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{s^3}} + 3\sqrt[4]{s^3}$;

d) $f(t) = \dfrac{2t^3 + t^2 - 1}{t^2}$; e) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + \sin x}{\sqrt{a^2 + b^3}}$; f) $f(p) = \dfrac{a\ln p}{2} + be^p + ab\operatorname{arctg} p$,

gde su u zadacima pod e) i f) a i b realni parametri.

Rešenja.

a) Za $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = 7x^6 - 8x + 2$.

b) Za $x > 0$ je $f'(x) = \dfrac{1}{3\cdot(2\sqrt{x})} + \dfrac{3\sqrt{x}}{2} = \dfrac{1}{6\sqrt{x}} + 1.5\sqrt{x}$.

c) Za $s > 0$, datu funkciju možemo pisati u obliku $f(s) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}s^{-2/3} - s^{-3/2} + 3s^{3/4}$, pa je

$$f'(s) = \frac{-4}{3\sqrt[3]{5s^5}} + \frac{3}{2}s^{-5/2} + \frac{9}{4}s^{-1/4}.$$

d) Za $t \neq 0$, datu funkciju možemo pisati u obliku $f(t) = 2t + 1 - \dfrac{1}{t^2}$, odakle je $f'(t) = 2 + 2t^{-3}$.

e) Za $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = \dfrac{6x + 4 + \cos x}{\sqrt{a^2 + b^3}}$.

f) Za $p > 0$ je $f'(p) = \dfrac{a}{2p} + be^p + \dfrac{ab}{1+p^2}$. ▶

3.65. Primer.

a) $f(x) = (3x-2)(x^2 + e^x + 1)$ b) $f(x) = (\sqrt{x} + 2x)\left(\sin x + \cos x + \dfrac{\operatorname{ctg} x}{8}\right)$;

c) $(x) = (3x^3 + 1)(\ln x^{\sqrt{2}} + 4)$; d) $f(t) = t\cdot\sin t\cdot\cos t + e^t\cdot\ln t\cdot\operatorname{tg} t$.

Rešenja.

a) Za $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = 3(x^2 + e^x + 1) + (3x-2)(2x + e^x)$.

b) Za $x > 0$ i $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, je

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right)\left(\sin x + \cos x + \frac{\operatorname{ctg} x}{8}\right) + (\sqrt{x} + 2x)\left(\cos x - \sin x - \frac{1}{8\sin^2 x}\right).$$

c) Data funkcija se za $x > 0$ može napisati kao $f(x) = (3x^3+1)(\sqrt{2}\ln x + 4)$, pa je

$$f'(x) = 9x^2(\sqrt{2}\ln x + 4) + (3x^3+1)\frac{\sqrt{2}}{x}, \quad x > 0.$$

d) U ovom slučaju, data funkcija je zbir dva sabirka, pri čemu je svaki sabirak proizvod tri faktora, pa je za $t > 0$ i $t \neq (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbf{N}_0$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t)'\sin t\cos t + t(\sin t\cos t)' + (e^t)'\cdot\ln t\cdot \operatorname{tg} t + e^t(\ln t\cdot\operatorname{tg} t)' \\ &= \sin t\cos t + t\cdot\cos^2 t - t\sin^2 t + e^t\ln t\cdot\operatorname{tg} t + \frac{e^t\operatorname{tg} t}{t} + e^t\ln t\frac{1}{\cos^2 t} \\ &= \frac{\sin 2t}{2} + t\cos 2t + e^t\left(\ln t\left(\operatorname{tg} t + \frac{1}{\cos^2 t}\right) + \frac{\operatorname{tg} t}{t}\right). \end{aligned}$$ ▶

3.66. Primer.

a) $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$; b) $\dfrac{\sin x + e^x\operatorname{tg} x}{\ln x + 1}$; c) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$; d) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x + 2x\cos x}{2^x+1}$.

Rešenja.

a) Za $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = \dfrac{(4x-3)(x^2+1)-(2x^2-3x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3x^2+2x-3}{(x^2+1)^2}$.

b) Za $x > 0 \wedge x \neq \dfrac{1}{e} \wedge x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, je

$$f'(x) = \frac{\left(\cos x + e^x\operatorname{tg} x + \dfrac{e^x}{\cos^2 x}\right)(\ln x + 1) - \dfrac{1}{x}(\sin x + e^x\operatorname{tg} x)}{(\ln x+1)^2}.$$

c) Za $x \neq \dfrac{4k-1}{4}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x}{1 + 2\sin x\cos x} = \frac{2}{1+\sin(2x)}. \end{aligned}$$

d) Za $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = \dfrac{(2\sin x\cos x + 2\cos x - 2x\sin x)(2^x+1) - (\sin^2 x + 2x\cos x)2^x\ln 2}{(2^x+1)^2}$. ▶

3.4.2 Diferencijal funkcije

Neka je data diferencijabilna funkcija $y = f(x)$ nad intervalom (a,b) i neka nezavisno promenljiva uzima vrednosti od x_0 do x_1, tako da $x_0, x_1 \in (a,b)$. Tada se

veličina

$h := \Delta x := x_1 - x_0$ naziva **priraštaj argumenta** x u tački x_0, a veličina

$$\Delta y := f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0),$$

koja predstavlja odgovarajuću promenu zavisno promenljive y, naziva **priraštaj funkcije** f u tački x_0.

Iz definicije prvog izvoda $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, sledi

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + r(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

gde je $r(\Delta x)$ funkcija priraštaja Δx sa osobinom $\lim\limits_{\Delta x\to 0} r(\Delta x) = 0$. Dakle, važi približna formula $f'(x) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ kada $\Delta x \approx 0$, odnosno

$$\Delta y \approx f'(x_0)\cdot\Delta x \quad \text{ako} \quad \Delta x \approx 0. \tag{3.14}$$

3.67. Definicija. *Neka je f diferencijabilna funkcija i Δx priraštaj argumenta. Tada je*

diferencijal nezavisno promenljive $dx = \Delta x$;

diferencijal zavisno promenljive (ili: **diferencijal funkcije***) $dy = f'(x)\,dx$.*

Tako se prvi izvod može izraziti kao $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

3.68. Primer. *Data je funkcija $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Odrediti:*

a) *priraštaj funkcije u proizvoljnoj tački x;*

b) *približnu vrednost funkcije f u tački $1,1$;*

c) *približnu vrednost funkcije f u tački $1,01$;*

d) *diferencijal funkcije f u proizvoljnoj tački x.*

Rešenja.

a) Priraštaj funkcije u tački x je

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = 2(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - 1 - 2x^2 - 3x + 1 \\ &= 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3\Delta x = (4x+3)\Delta x + 2(\Delta x)^2 = f'(x)\Delta x + 2(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

b) U ovom slučaju je $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$, a $f(1) = 4$, pa na osnovu relacije 3.14 imamo

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(1)\cdot\Delta x, \qquad f(1.1) \approx f(1) + f'(1)\Delta x = 4 + 5\cdot 0,1 = 4,5.$

Inače, tačna vrednost je $f(1,1) = 4,72$.

c) U ovom slučaju je $x_1 = 1$, $\Delta x = 0,01$, pa je $f(1,01) = f(1) + 4 \cdot 0,01 = 4,04$. Tačna vrednost je $f(1,01) = 4,05$.

d) Diferencijal dy date funkcije f je $dy = (4x+3)\,dx$. ▶

3.69. Primer. *Odrediti približne vrednosti sledećih brojeva:*

a) $\sqrt{4,0003}$; b) $\ln(1,001)$; c) $\sqrt[3]{1,0003}$,

koristeći diferencijal funkcije u datoj tački.

Rešenja. U ovom slučaju primenićemo relaciju (videti (3.14))

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x, \quad \text{kada } \Delta x \approx 0.$$

a) Za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$, prvi izvod je $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x = 4$ i $\Delta x = 0,0003$:

$$\sqrt{4,0003} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}0,0003 \approx 2 + \frac{0,0003}{4} = 2,000075.$$

b) Stavimo $\Delta x = 0,001$ i $x = 1$; tada je $\ln(1,001) \approx \ln 1 + \dfrac{1}{1} \cdot 0,001 = 0,001$.

c) Iz $\Delta x = 0,0003$ i $x = 1$, sledi $\sqrt[3]{1,0003} \approx \sqrt[3]{1} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{1}}0,0003 = 1,0001$. ▶

3.70. Primer. *Odrediti diferencijale sledećih funkcija:*

a) $y = 2\sqrt{\cos\frac{1}{x}} + \ln(x^2+1)$; b) $y = 5\operatorname{arctg}(2x+7)e^{3x+1} + 12^x$;

c) $y = \dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x^3 + 3^x + 3x}$; d) $y = \arcsin(5x^4+2) + \dfrac{5^x + 4x^2}{e^{\sin x + \cos x}}$.

Rešenja.

a) Iz $y' = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\sqrt{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}} + \dfrac{2x}{1+x^2}$, sledi $dy = \left(\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\sqrt{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}} + \dfrac{2x}{1+x^2}\right)dx$.

b) Kako je prvi izvod date funkcije

$$y' = 5\frac{2}{1+(2x+7)^2}e^{3x+1} + 15\operatorname{arctg}(2x+5)e^{3x+1} + 12^x \ln 12,$$

to je traženi diferencijal jednak

$$dy = \left(5\frac{2}{1+(2x+7)^2}e^{3x+1} + 15\operatorname{arctg}(2x+5)e^{3x+1} + 12^x \ln 12\right)dx.$$

c) $$dy = \frac{(\cos x + 1/\cos^2 x)(x^3+3^x+3x) - (\sin x + \operatorname{tg} x)(3x^2 + 3^x \ln 3 + 3)}{(x^3+3^x+3x)^2}dx.$$

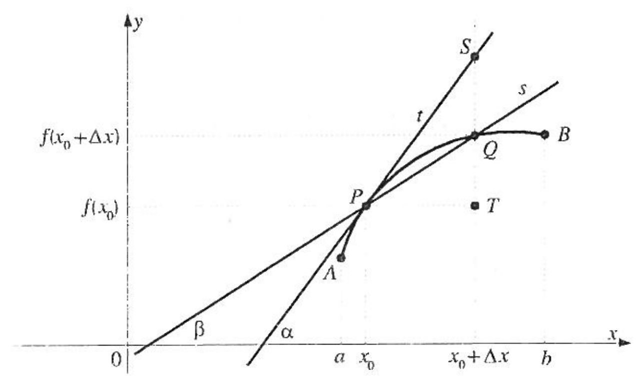
d) $$dy = \left(\frac{20x^3}{\sqrt{1-(5x^4+2)^2}} + \frac{(5^x \ln 5 + 8x) - (5^x + 4x^2)(\cos x - \sin x)}{e^{\sin x + \cos x}}\right)dx. ▶$$

3.4.3 Geometrijsko tumačenje izvoda i priraštaja funkcije

Neka funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ima prvi izvod u tački $x_0 \in (a,b)$. Označimo tačke $P(x_0, f(x_0))$ i $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ (videti sl. 3.9). Koeficijent pravca tetive PQ krive, određene funkcijom f, dat je sa

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

gde je β ugao prave određene sa duži PQ i pozitivnog smera $x-$ose. Ako je funkcija f neprekidna u tački x_0, tada se tačka Q približava tački P po datoj krivoj kada $\Delta x \to 0$, tj. kada se tačka $x_0 + \Delta x$ približava tački x_0 ostajući na $x-$osi. U graničnom



Slika 3.9.

slučaju, prava PQ postaje tangenta krive u tački P i **koeficijent pravca tangente** na datu krivu u datoj tački x jednak je prvom izvodu date funkcije u tački x_0 :

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Dakle, prava

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \tag{3.15}$$

gde je $y_0 = f(x_0)$, jeste **tangenta grafika funkcije** f **u tački** $P(x_0, f(x_0))$. Ako je još zadovoljen uslov $f'(x_0) \neq 0$, prava

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{3.16}$$

je **normala grafika funkcije** f u tački $P(x_0, f(x_0))$.

Neka je S tačka preseka tangente u tački P sa ordinatom u tački x_0+h na $x-$osi, a T podnožje normale iz tačke P na ordinatu SQ.

Tada je $\overline{TQ} = f(x_0+h) - f(x_0) = \Delta y$ priraštaj funkcije f u tački x_0;

$\overline{TS} = f'(x_0)\Delta x$ vrednost diferencijala funkcije f u tački x_0 koja odgovara priraštaju $h = \Delta x$. Primetimo da je $\overline{ST}$ priraštaj na tangenti.

Duži $\overline{TQ}$ i $\overline{ST}$ su približno jednake, ako je priraštaj Δx mali.

3.71. Primer. *Odrediti ugao α koji zaklapa tangenta grafika funkcije $y = x^2 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, sa pozitivnim smerom $x-$ose u tački*

a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = 1/2$.

Rešenja. Kako je $y' = 2x - 1$, to je

a) $y'(0) = -1 = \operatorname{tg}\alpha$, odakle je $\alpha = 3\pi/4$; b) $y'(1) = 1 = \operatorname{tg}\alpha$, odakle je $\alpha = \pi/4$;

c) $y'(1/2) = 0 = \operatorname{tg}\alpha$, odakle je $\alpha = 0$, (tangenta u tački $x = 1/2$ je paralelna sa $x-$osom). ▶

3.72. Primer. *Odrediti ugao α koji u tački $x = 0$ zaklapa tangenta grafika funkcije date sa*

a) $y = \sin x$; b) $y = \sin(\sqrt{3}x)$; c) $y = \cos x$;

d) $y = 1 - \operatorname{tg} x$; e) $y = \ln(x+1)$; f) $y = x^2 - e^x$,

sa pozitivnim smerom $x-$ose.

Rešenja.

a) $y' = \cos x$, $y'(0) = 1 = \operatorname{tg}\alpha$, odakle je $\alpha = \pi/4$.

b) $y' = \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)$, $y'(0) = \sqrt{3} = \operatorname{tg}\alpha$, odakle je $\alpha = \pi/3$.

c) $y' = -\sin x$, $y'(0) = 0 = \operatorname{tg}\alpha$, odakle je $\alpha = 0$.

d) $y' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y'(0) = -1 = \operatorname{tg}\alpha$, odakle je $\alpha = 3\pi/4$.

e) $y' = \dfrac{1}{1+x}$, $y'(0) = 1 = \operatorname{tg}\alpha$, odakle je $\alpha = \pi/4$.

f) $y' = 2x - e^x$, $y'(0) = -1 = \operatorname{tg}\alpha$, odakle je, $\alpha = 3\pi/4$. ▶

3.73. Primer. *Napisati jednačine tangente i normale na datu krivu u datoj tački:*

a) $y = x^3 - 2x^2 + 2$ *u tački* $(2,2)$; b) $x^2 + 3xy + y^2 = 11$ *u tački* $(1,2)$;

c) $y = \sin 2x$ *u tački* $(0,0)$; d) $y = \ln(x^2+1)$ *u tački* $(1, \ln 2)$.

Rešenja.

a) Prvi izvod date funkcije je $y' = 3x^2 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$, pa je prvi izvod date funkcije u tački $x = 2$ jednak $y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$. Prema geometrijskom tumačenju izvoda, broj $y'(2)$ predstavlja koeficijenat pravca tangente na datu krivu u tački $(2,2)$. Prema tome, ako je jednačina tražene tangente oblika

$$y = kx + n, \quad \text{tada je} \quad k = 4.$$

Slobodan član n se određuje iz uslova da tačka $(2,2)$ pripada tangenti.
Iz $2 = 4 \cdot 2 + n$ sledi da je $n = -6$, pa je jednačina tražene tangente $y = 4x - 6$.
Ako je jednačina normale oblika $y = k_1 x + n_1$, tada uslov da su normala i tangenta grafika u istoj tački međusobno normalne prave povlači

$$k_1 = -1/k,$$

gde je k koeficijent pravca tangente. Pošto je $k = 4$, to je $k_1 = -1/4$, pa je jednačina normale $y = \frac{-1}{4}x + n_1$.
Uslov da tačka $(2,2)$ pripada normali daje $2 = \frac{-1}{4} \cdot 2 + n_1$, tj. $n_1 = 5/2$, pa je jednačina tražene normale $4y + x = 10$.

b) Iz $2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0$ dobija se $y' = -\dfrac{2x+3y}{3x+2y}$, tj. $y'(1) = -\dfrac{2\cdot 1 + 3 \cdot 2}{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2} = -\dfrac{8}{7}$.
Ako je tangenta oblika $y = kx + n$, tada je $k = -8/7$, pa iz $y = -\frac{8}{7}x + n$ sledi $2 = -\frac{8}{7} \cdot 1 + n$ ili $n = 22/7$. Dakle, tražena jednačina tangente je $7y + 8x = 22$.
Jednačina normale dobija se iz $y = \frac{7}{8}x + n_1$, odakle je $2 = \frac{7}{8} \cdot 1 + n_1$, tako da je jednačina tražene normale $8y - 7x = 9$.

c) Iz $y' = 2\cos 2x$, $y'(0) = 2$, sledi da ako je tražena tangenta oblika $y = kx + n$, tada za koeficijent pravca te tangente važi $k = 2$. Iz $y = 2x + n$ i uslova da je $y(0) = 0$ sledi $n = 0$, pa je $y = 2x$ jednačina tangente grafika funkcije $y = \sin 2x$ u tački $(0,0)$.
Jednačina tražene normale u tački $(0,0)$ dobija se iz jednačine $y = \frac{-x}{2} + n_1$, odnosno $n_1 = 0$. Tražena normala ima jednačinu $y = -x/2$.

d) Iz $y' = \frac{2x}{x^2+1}$ sledi $y'(1) = 1$, pa se iz $y = x + n$, odnosno $\ln 2 = 1 + n$, dobija jednačina tangente $y = x - 1 + \ln 2$. Jednačina normale je $y + x = \ln 2 + 1$. ▶

3.74. Primer. *Odrediti jednačine tangente i normale za sledeće funkcije:*

a) $y = \sqrt{x}$ *u tački* $(4,2)$; b) $y = e^{x^2-1}$ *u tački* $(1,1)$;

c) $y = \operatorname{arctg} x^2$ *u tački* $(0,0)$; d) $y = \arcsin\left(\frac{x+2}{2}\right)$ *u tački* $(0, \frac{\pi}{2})$.

Rešenja.

a) Iz $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sledi $y'(4) = \dfrac{1}{4}$, pa je jednačina tangente oblika $y = \dfrac{1}{4}x + n$. Uslov $y(4) = 2$ daje $2 = 1 + n$, pa je tražena jednačina tangente $4y - x = 4$.
Jednačina normale je $y = -4x + n_1$, pa iz uslova $2 = -4 \cdot 4 + n_1$, sledi $y + 4x = 18$.

b) Iz $y' = 2xe^{x^2-1}$ sledi $y'(1) = 2$, pa je jednačina tangente data sa $y = 2x+n$. Kako je $1 = 2+n$, to je jednačina tangente u tački $(1,1)$ data sa $y = 2x-1$.

Jednačina normale $y = -\frac{x}{2}+n_1$, zbog uslova $1 = -\frac{1}{2}+n_1$, ima oblik $2y+x = 3$.

c) Iz jednakosti $y' = \frac{2x}{1+x^4}$ sledi $y'(0) = 0$, pa je zbog $0 = 0+n$ tražena jednačina tangente $y = 0$. Tangenta se, u stvari, poklapa sa $x-$osom.

Jednačina normale u ovom slučaju je $x = 0$, tj. to je $y-$osa.

d) Iz $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{2}\right)^2}}$ i $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{2}\right)^2}} = +\infty$, sledi da levi izvod u tački nula ne postoji. Tražena tangenta je $y-$osa, čija je jednačina $x = 0$.

Jednačina normale je $y = 0$, tj. tražena normala se poklapa se x-osom. ▶

3.75. Primer. *Odrediti parametar k tako da prava $y = kx+1$ bude tangenta krive $y^2 = 4x$ i odrediti tačku (ili tačke) dodira.*

Rešenje. Datu krivu možemo zapisati kao $y(x) = \pm 2\sqrt{x}, x \geq 0$. Označimo sa $T(x_0, y(x_0))$ tačku u kojoj tangenta dodiruje datu parabolu. Tada je

$k = y'(x_0) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}$ i $y(x_0) = \pm 2\sqrt{x_0}$. Prema tome se ordinata tačke dodira nalazi iz

$$y(x_0) = y'(x_0)x_0+1, \quad \text{tj.} \quad \pm 2\sqrt{x_0} = \pm\frac{1}{\sqrt{x_0}}x_0+1.$$

Uzimanjem pozitivnog predznaka u zadnjoj jednakosti dobija se $x_0 = 1$ i tačka dodira je $T(1,2)$. Jednačina tangente u toj tački je $y = x+1$.

Druga tangenta sa datim koeficijentom pravca **ne postoji,** jer se iz jednačine $-2\sqrt{x_0} = -\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}x_0+1$, dobija $\sqrt{x_0} = -1$, što je kontradikcija. ▶

3.76. Primer. *Iz tačke $A(2,-2)$ povući tangente na parabolu $f(x) = x^2-3x+1$ i naći tačke dodira.*

Rešenje. Označimo sa $(x_0, f(x_0))$ tačku dodira tangente i date parabole. Koeficijent pravca tangente je $k = f'(x_0) = 2x_0-3$, a jednačina tangente je $y-f(x_0) = k(x-x_0)$, odnosno za $x = 2$, $y = -2$ važi

$$-2-x_0^2+3x_0-1 = (2x_0-3)(2-x_0).$$

Tako se dobija jednačina $x_0^2-4x_0+3 = 0$, sa rešenjima $x_0 = 1$ i $x_0 = 3$.

Prema tome, tačke dodira su $B(1,-1)$ i $C(3,1)$, a koeficijenti pravaca tangenti su $k_1 = -1$ i $k_2 = 3$. Jednačine traženih tangenti su $y+x = 0$ i $y = 3x-8$. ▶

3.4.4 Izvod složene funkcije

3.77. Teorema *Neka funkcija $g : (a,b) \to (c,d)$ ima izvod u tački $x_0 \in (a,b)$ i neka funkcija $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ ima izvod u tački $g(x_0) \in (c,d)$. Tada složena funkcija $k = f \circ g$, $k : (a,b) \to \mathbb{R}$, ima izvod u x_0 i važi*

$$k'(x_0) = f'_g(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Dokaz. Prema pretpostavci, funkcija g ima izvod u tački x_0, te je

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \quad \text{i} \quad \lim_{h\to 0}\Big(g(x_0+h)-g(x_0)\Big) = 0.$$

Dakle ako je $g(x_0+h)-g(x_0) = l$, odnosno $g(x_0+h) = g(x_0)+l$, tada $l \to 0$ kada $h \to 0$.

Posmatraćemo dva slučaja: $g'(x_0) \neq 0$ i $g'(x_0) = 0$.

I Ako je $g'(x_0) \neq 0$ i, za h dovoljno malo, $g(x_0+h)-g(x_0) \neq 0$, tada važi

$$\begin{aligned} k'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{k(x_0+h)-k(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)} \cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{l\to 0}\frac{f(g(x_0)+l)-f(g(x_0))}{l} \cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &= f'_g(g(x_0))g'(x_0). \end{aligned}$$

II Ako je $g'(x_0) = 0$ i, za sve dovoljno male vrednosti $h \neq 0$, $g(x_0+h)-g(x_0) = 0$, tada je $k'(x_0) = 0$, jer je $\dfrac{k(x_0+h)-k(x_0)}{h} = 0$.

Ako, međutim, za dovoljno malo $h \neq 0$ važi $g(x_0+h)-g(x_0) \neq 0$, tada je

$$\begin{aligned} k'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{k(x_0+h)-k(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)} \cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &= 0 = f'_g(g(x_0))g'(x_0). \quad ▶ \end{aligned}$$

3.78. Primer. *Odrediti izvode sledećih složenih funkcija:*

a) $f(x) = (x^4+3x^2+3)^5$; b) $f(t) = (t^2+1)^2$; c) $f(s) = \sqrt[3]{5s^2-s-3}$;

d) $f(x) = (3x-1)^6 \cdot \sqrt{2x-5}$; e) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{5/2}$; f) $f(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{4x^2+9}}$.

Rešenja.

a) Ako označimo $u = x^4 + 3x^2 + 3$, tada se data funkcija može zapisati kao $f(u) = u^5$, pa je njen izvod $f'(x) = f'_u u'_x = 5u^4 \cdot u'$.

Kako je $u' = 4x^3 + 6x$, to je prvi izvod date složene funkcije

$$f'(x) = 5(x^4 + 3x^2 + 3)^4 (4x^3 + 6x), \ x \in \mathbb{R}.$$

b) $f'(t) = 2(t^2 + 1) \cdot 2t = 4t(t^2 + 1), \ t \in \mathbb{R}.$

c) $f'(s) = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{(5s^2 - s - 3)^{-2}} \cdot (10s - 1) = \dfrac{10s - 1}{3\sqrt[3]{(5s^2 - s - 3)^2}}, \ 5s^2 - s \neq 3.$

d) U ovom slučaju za $x > \dfrac{5}{2}$ imamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 \cdot 3 \cdot (3x-1)^5 \cdot \sqrt{2x-5} + (3x-1)^6 \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x-5}} \\ &= 18(3x-1)^5 \cdot \sqrt{2x-5} + (3x-1)^6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-5}} \\ &= \frac{(3x-1)^6 + 18(3x-1)^5 \cdot (2x-5)}{\sqrt{2x-5}} = \frac{(3x-1)^5 \cdot (39x-91)}{\sqrt{2x-5}}. \end{aligned}$$

e) Za $x > 0$ je $f'(x) = \dfrac{5}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{3/2} \cdot \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{5}{2(x+1)^2} \cdot \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{3/2} = \dfrac{5\sqrt{x^3}}{2\sqrt{(x+1)^7}}.$

f) Za $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{4x^2+9} - \frac{(2x+3)8x}{2\sqrt{4x^2+9}}}{4x^2+9} = \dfrac{-12x+18}{(\sqrt{4x^2+9})^3}.$ ▶

3.79. Primer. *Odrediti izvode sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \sin 2x + \cos 5x$; b) $f(x) = 3\sin^5 x + \operatorname{tg}\sqrt{x}$; c) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$;

d) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x} + \operatorname{tg} x$; e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(5\cos x + \arccos x)^3}}$; f) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$;

g) $f(x) = \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{\arcsin x}$; h) $f(x) = \cos(3x) + \cos(x^3) + \cos^3 x + 3\cos x$.

Rezultati.

a) $f'(x) = 2\cos 2x - 5\sin 5x$. b) $f'(x) = 15\sin^4 x \cos x + \dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

c) $f'(x) = 2(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x$.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} x}} \cdot \left(\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$. e) $f'(x) = \dfrac{-3}{2} \cdot \dfrac{-5\sin x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{(5\cos x + \arccos x)^5}}$.

f) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \dfrac{1 - x - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \dfrac{2}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{x^2+1}.$

g) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{\arcsin x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

h) $f'(x) = -3\sin(3x) - 3x^2\sin(x^3) - 3\cos^2 x \sin x - 3\sin x.$ ▶

3.80. Primer. *Odrediti izvode sledećih složenih funkcija:*

a) $f(x) = e^{x^2+3x+1}$; b) $f(x) = e^{\sin x + \cos x}$;

c) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+2} + \sqrt{\ln(x^2+2)}$; d) $f(t) = 2^{t^2-1} + \ln(t^2-1)$;

e) $f(x) = \ln(e^x+1)^3 + \ln^3(e^x+1)$; f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Rezultati.

a) $f'(x) = e^{x^2+3x+1}(x^2+3x+1)' = (2x+3)e^{x^2+3x+1}$. b) $f'(x) = (\cos x - \sin x)e^{\sin x + \cos x}$.

c) $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+2} + \dfrac{1}{\sqrt{\ln(x^2+2)}} \cdot \dfrac{x}{x^2+2}$. d) $f'(t) = 2t\ln 2 \cdot 2^{t^2-1} + \dfrac{2t}{(t^2-1)}$.

e) $f'(x) = \dfrac{3e^x}{e^x+1} + 3\ln^2(e^x+1) \cdot \dfrac{e^x}{e^x+1}$. f) $f'(x) = \dfrac{1-x}{1+x} \cdot \dfrac{2}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{1-x^2}$. (Uporediti sa primerom 3.79 f).) ▶

3.81. Primer. *Odrediti prve izvode sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$; b) $f(x) = \dfrac{x\arcsin e^x + \ln(\sin 2x)}{\operatorname{arctg} x}$;

c) $f(x) = 6\ln\dfrac{x^2+1}{x^2-1} + 2\ln\dfrac{x-1}{x+1} + 4\operatorname{arctg} x$; d) $f(x) = \dfrac{2^{x^2}\cos(x^2+1)\operatorname{arctg} x}{e^{\sin x + 2} + \cos 2x}$.

Rezultati.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{-\sin^3 x - 2\sin x\cos^2 x}{\sin^4 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} + \frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x} \\ &= \frac{\sin^2 x + 1 + \cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{2}{\sin^3 x}. \end{aligned}$$

b) $f'(x) = \dfrac{\left(\arcsin e^x + x(1-e^{2x})^{-1/2}e^x + \dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}\right)\operatorname{arctg} x}{(\operatorname{arctg} x)^2} - \dfrac{(x\arcsin e^x + \ln(\sin 2x))\frac{1}{1+x^2}}{(\operatorname{arctg} x)^2}.$

c)
$$f'(x) = 6\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}+2\frac{x+1}{x-1}\frac{2}{(x+1)^2}+4\frac{1}{1+x^2}$$
$$= 6\frac{-4x}{x^4-1}+4\frac{1}{x^2-1}+4\frac{1}{x^2+1}=\frac{-24x+4x^2+4+4x^2-4}{x^4-1}=\frac{8x^2-24x}{x^4-1}.$$

d)
$$f'(x) = \frac{2x2^{x^2}\ln 2\cos(x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x}{e^{\sin x+2}+\cos 2x}+\frac{2^{x^2}(-\sin(x^2+1))2x\,\mathrm{arctg}\,x}{e^{\sin x+2}+\cos 2x}$$
$$+\frac{2^{x^2}\cos(x^2+1)}{(e^{\sin x+2}+\cos 2x)(x^2+1)}-\frac{2^{x^2}\cos(x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x(\cos x e^{\sin x+2}-2\sin 2x)}{(e^{\sin x+2}+\cos 2x)^2}.\ \blacktriangleright$$

3.4.5 Izvod implicitne funkcije

Ako je funkcija $y=y(x)$ data implicitno jednačinom
$$F(x,y)=0,$$
tada se diferenciranjem po x, a koristeći činjenicu da je y funkcija od x, dobija jednačina u kojoj se pojavljuju x,y i y'. Rešavanjem te jednačine po y', nalazimo traženi izvod.

3.82. Primer. *Odrediti prvi izvod implicitnih funkcija:*

a) $x^2+y^2=4$; b) $2x-3y+3=x^2+2y-6x$;

c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5x$; d) $x^4+4x^2y^2-3xy^3+3x=0$;

e) $(y^2-9)^3=(2x^3+3x-1)^2$; f) $(2+xy)^2=3x^2-7$.

Rešenja.

a) Pre svega je $(y^2)'_x=2yy'$, pa diferenciranjem po x date jednakosti dobijamo $2x+2yy'=0$, odakle sledi $y'=-x/y$.

b) Iz jednačine $2-3y'=2x+2y'-6$ sledi $y'=\dfrac{-2x+8}{5}$.

c) Iz jednačine $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}=5$ sledi $y'=10\sqrt{y}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

d) Pre svega važi $4x^3+8xy^2+8x^2yy'-3y^3-9xy^2y'+3=0$, odakle sledi
$$y'=\frac{-4x^3-8xy^2+3y^3-3}{8x^2y-9xy^2}.$$

e) U ovom slučaju je $6(y^2-9)^2yy'=2(2x^3+3x-1)(6x^2+3)$, odakle sledi
$$y'=\frac{(2x^3+3x-1)(2x^2+1)}{y(y^2-9)^2}.$$

f) Pošto je $2(2+xy)(y+xy')=6x$, to je $y'=\dfrac{3x-2y-xy^2}{x(2+xy)}$. ▶

3.83. Primer. *Odrediti prvi izvod sledećih funkcija:*

a) $y=x^x$; b) $y=x^{\sqrt{x}}$; c) $y=(\sqrt{x})^x$;

d) $y=x^{\sin x}$; e) $y=(\sin x)^{\cos x}$,

za $x>0$ *(zadaci pod a), b), c) i d)), odnosno, u zadatku pod e), za* x *sa osobinom* $\sin x>0$.

Rešenja.

a) Datu funkciju možemo zapisati u obliku $y=e^{x\ln x}$, čiji je prvi izvod
$$y'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1),\quad x>0.$$
Ovaj zadatak može se rešiti i tako što se prvo data jednakost $y=x^x$ logaritmuje, pa onda potraži izvod:
$$\ln y=x\ln x\Rightarrow\frac{y'}{y}=\ln x+1,\quad \text{tj.}\quad y'=y(\ln x+1).$$
Zamenom $y=x^x$ u zadnju jednakost ponovo dobijamo $y'=x^x(\ln x+1)$.

b) Na osnovu jednakosti $y=e^{\sqrt{x}\ln x}$, $x>0$, sledi
$$y'=e^{\sqrt{x}\ln x}\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)=x^{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}},\qquad x>0.$$

c) Kako je $y=e^{(x\ln x)/2}$, to je $y'=e^{(x\ln x)/2}\left(\dfrac{1+\ln x}{2}\right)$, $x>0$.

d) Iz $y=e^{\sin x\ln x}$ sledi $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$, $x>0$.

e) Iz $y=e^{\cos x\ln\sin x}$ sledi $y'=(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$, $\sin x>0$. ▶

3.4.6 Izvod inverzne funkcije

3.84. Teorema *Ako bijektivna funkcija* $f:(a,b)\to(c,d)$ *zadovoljava sledeća tri uslova:*

(i) *funkcija* f *je monotona na intervalu* (a,b);

(ii) *funkcija* f *ima prvi izvod u tački* $x_0\in(a,b)$;

(iii) *broj* $f'(x_0)$ *je različit od nule,*

tada funkcija f *ima* **inverznu funkciju** $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$, *i njen izvod u tački* $y_0=f(x_0)$ *je*
$$(f^{-1})'_y(y_0)=\frac{1}{f'_x(x_0)}.\tag{3.17}$$

U praksi, izvod inverzne funkcije za datu funkciju može se odrediti ili eksplicitnim nalaženjem inverzne funkcije, ili pomoću relacije (3.17).

3.85. Primer. *Odrediti izvod funkcije f^{-1}, inverzne za datu funkciju f:*

a) $f(x)=2x+3,\ x\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=\sqrt{x}+3,\ x>0$; c) $f(x)=x^2-2x,\ x>1$.

Rešenja.

a) **Prvi način.** Ako stavimo $y=f(x)=2x+3$, tada važi $x=\frac{y-3}{2}$. Dakle, funkcija $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$ je inverzna za datu funkciju f i njen izvod je $(f^{-1})'(x)=1/2,\ x\in\mathbb{R}$.

Drugi način. Posle zamene mesta promenljivih x i y dobijamo $x=2y+3$, odnosno $f(y)=2y+3$ i $f'(y)=2$. Prema gornjoj formuli važi $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}=\dfrac{1}{2}$.

b) Kako je $x=f(y)=\sqrt{y}+3$ i $f'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, to je traženi prvi izvod inverzne funkcije, f^{-1}, jednak $(f^{-1})'(x)=2\sqrt{y}=2(x-3),\ x>3$ (drugi način).

c) U ovom slučaju je $x=f(y)=y^2-2y$ i $f'(y)=2y-2$, odakle sledi da je izvod inverzne funkcije f^{-1} oblika $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{2y-2}$. Pošto je $(f^{-1}(x)-1)^2=x+1$, to je konačno $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}},\ x>-1$. ▶

3.4.7 Prvi izvod funkcije date u parametarskom obliku

Funkcija $y=f(x)$, $x\in(a,b)$, je data u parametarskom obliku ako je

$$x=\phi(t),\quad y=\psi(t),\quad t\in(\alpha,\beta), \tag{3.18}$$

pri čemu je ϕ monotona funkcija.

3.86. Teorema *Neka su ϕ i ψ diferencijabilne funkcije na intervalu (α,β) i neka je $\phi_t'\neq 0$, $t\in(\alpha,\beta)$. Tada se prvi izvod funkcije $y=f(x)$ date u parametarskom obliku (relacija (3.18)) određuje po formuli*

$$f'(x)=\frac{\psi_t'}{\phi_t'}\quad ili\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

3.87. Primer. *Odrediti prvi izvod sledećih funkcija datih u parametarskom obliku:*

a) $x=t^2+2t,\quad y=2t^3-6t,\quad t\in\mathbb{R}$;
b) $x=2(t-\sin t),\quad y=2(1-\cos t),\quad t\in(0,2\pi)$;
c) $x=2\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t,\quad t\in(0,\pi/2)$.

Rešenja.

a) Pošto je $x_t'=2t+2$, $y_t'=6t^2-6$, to je $y'=\dfrac{6t^2-6}{2t+2}=3(t-1),\ t\neq -1$.

b) Pošto je $x_t'=2(1-\cos t)$, $y_t'=2\sin t$, to je $y'=\dfrac{\sin t}{(1-\cos t)},\ t\in(0,2\pi)$.

c) Pošto je $x_t'=6\cos^2 t(-\sin t)$, $y_t'=3\sin^2 t\cos t$, to je $y'=\dfrac{3\sin^2 t\cos t}{-6\cos^2 t\sin t}=-\dfrac{1}{2\operatorname{ctg} t}$, $t\in(0,\pi/2)$. ▶

3.4.8 Izvodi višeg reda

Pretpostavimo da funkcija f ima prvi izvod f' na intervalu (a,b) i neka je $x_0\in(a,b)$. **Drugi izvod funkcije f u tački** x_0 je izvod funkcije f' u tački x_0 (ako postoji), i obeležava se sa $f''(x_0)$.
Analogno se definišu treći, četvrti, ..., n–ti izvod funkcije f u tački x_0, i obeležavaju se redom sa $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0),\dots,f^{(n)}(x_0)$.

3.88. Primer. *Za funkciju*

a) $f(x)=4x^2-2x+5-\dfrac{3}{x}$, *odrediti* $f',f'',f''',f^{(4)}$;

b) $f(x)=\sqrt{3-5x}$, *odrediti* f',f'',f''';

c) $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x+1}$, *odrediti* f',f'',f''';

d) $x^3-y^3=2,\ y=f(x)$, *odrediti* f',f'';

e) $y^4+3y-4x^3=5x+3,\ y=f(x)$. *odrediti* f'';

Rešenja.

a) Prvi izvod funkcije f je funkcija f' data sa $f'(x)=8x-2+3x^{-2}, x\neq 0$, dok je njen drugi izvod jednak $f''(x)=(f'(x))'=8-6x^{-3},\ x\neq 0$. Dalje je $f'''(x)=18x^{-4}$, $f^{(4)}(x)=-72x^{-5},\ x\neq 0$.

b) Za $x<3/5$ je $f'(x)=\dfrac{-5}{2\sqrt{3-5x}}$, $f''(x)=\dfrac{-25}{4\sqrt{(3-5x)^3}}$ i $f'''(x)=\dfrac{-375}{8\sqrt{(3-5x)^5}}$.

c) Za $x\neq -1/3$ je $f'(x)=\dfrac{2(3x+1)-3(2x-3)}{(3x+1)^2}=\dfrac{11}{(3x+1)^2}$,
$f''(x)=\dfrac{-66}{(3x+1)^3}$ i $f'''(x)=\dfrac{594}{(3x+1)^4}$.

d) Diferenciranjem date jednačine po x dobijamo $3x^2 - 3y^2y' = 0$, tj. $y' = \frac{x^2}{y^2}$. Diferenciranjem zadnje jednačine po x i zamenom y' iz prethodne jednakosti sledi:

$$y'' = \frac{2xy - 2y'x^2}{y^3} = \frac{2xy - 2\left(\frac{x^2}{y^2}\right)x^2}{y^3} = \frac{2xy^3 - 2x^4}{y^5}.$$

e) U ovom slučaju imamo $y' = \frac{12x^2+5}{4y^3+3}$ i

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{24x(4y^3+3) - (12x^2+5)12y^2y'}{(4y^3+3)^2} = \frac{24x(4y^3+3) - (12x^2+5)12y^2\frac{12x^2+5}{4y^3+3}}{(4y^3+3)^2} \\ &= \frac{24x(4y^3+3)^2 - 12y^2(12x^2+5)^2}{(4y^3+3)^3}, \\ &= 12\frac{32xy^6 + 48xy^3 - 144x^4y^2 - 120x^2y^2 - 25y^2 + 18x}{(4y^3+3)^3}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

3.89. Primer. *Za sledeće funkcije:* a) $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$; b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, *odrediti* $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$ *i* $f^{(5)}(0)$.

Rešenja.

a) Pre svega je $f(0) = 1$, a za $x \in \mathbb{R}$ važi $f'(x) = 24x^3 + 6x^2 - 6x + 5$,
$f'(0) = 5$, $f''(x) = 72x^2 + 12x - 6$, $f''(0) = -6$, $f'''(x) = 144x + 12$,
$f'''(0) = 12$, $f^{(4)}(x) = 144$, $f^{(4)}(0) = 144$, $f^{(5)}(x) = 0$, $f^{(5)}(0) = 0$;

Za polinom n–tog stepena

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$, $(a_n \neq 0)$ važi

$$P^{(j)}(0) = a_j \cdot j! \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Naravno, ako je $j > n$, tada za sve $x \in \mathbb{R}$ važi $P^{(j)}(x) = 0$.

b) U ovom slučaju je $f(0) = 1$, a za $x \neq 1$ važi

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f'(0) = 1 \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f''(0) = 2,$$

$$f'''(x) = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4}, \quad f'''(0) = 6,$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1-x)^5}, \quad f^{(4)}(0) = 24, \quad f^{(5)}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(1-x)^6}, \quad f^{(5)}(0) = 120; \blacktriangleright$$

3.90. Primer. *Naći* $f^{(j)}(x)$ *za* $j \in \mathbf{N}$, *ako je*

a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = \sin x$; c) $f(x) = \cos x$.

Rešenja.

a) Za $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = e^x$ i $f''(x) = e^x$. Ako za neko $m \in \mathbb{N}$ važi $f^{(m)}(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, tada diferenciranjem ove jednakosti sledi $\left(f^{(m)}(x)\right)' = (e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Na osnovu principa matematičke indukcije sledi da za sve $j \in \mathbb{N}$ važi

$$f^{(j)}(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Pošto je za $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, tada je

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x,$$

i za $j \in \mathbb{N}$ važi:

$$f^{(4j)}(x) = \sin x, \quad f^{(4j+1)}(x) = \cos x, \quad f^{(4j+2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4j+3)}(x) = -\cos x.$$

Ove formule se mogu napisati u obliku

$$\sin^{(j)} x = \sin\left(x + \frac{j\pi}{2}\right), \quad j \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

c) Analogno slučaju pod b), imamo za $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(4j)}(x) = \cos x, \quad f^{(4j+1)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4j+2)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4j+3)}(x) = \sin x,$$

odnosno

$$\cos^{(j)}(x) = \cos\left(x + \frac{j\pi}{2}\right), \quad j \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

3.5 Primena izvoda funkcije

3.5.1 Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije

Funkcija f raste (respektivno opada) na intervalu (a,b) ako za svako $x_1, x_2 \in (a,b)$ važi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \text{(respektivno} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

3.91. Teorema *Neka je funkcija* f *neprekidna na zatvorenom intervalu* $[a,b]$ *i diferencijabilna na otvorenom intervalu* (a,b).

Ako je $f'(x) > 0$ *za svako* $x \in (a,b)$, *tada je funkcija* f *rastuća na intervalu* $[a,b]$.

Ako je $f'(x) < 0$ *za svako* $x \in (a,b)$, *tada je funkcija* f *opadajuća na intervalu* $[a,b]$.

Dokaz ove teoreme biće dat kasnije u primeru 3.103.

3.92. Teorema *Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b).*

Ako je funkcija f rastuća na intervalu $[a,b]$, tada je $f'(x) \geq 0$ za svako $x \in (a,b)$.

Ako je funkcija f opadajuća na intervalu $[a,b]$, tada je $f'(x) \leq 0$ za svako $x \in (a,b)$.

Dokaz. Neka je x proizvoljna tačka intervala (a,b). Pošto je prema pretpostavci funkcija f rastuća na (a,b), to za dovoljno malo h važi

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0.$$

Posle primene graničnog procesa imamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \geq 0, \quad x \in (a,b),$$

jer po pretpostavci funkcija f ima izvod u tački x.

Na primer,

funkcija $f(x) = x^2$ na intervalu $(-\infty,0)$ opada i $f'(x) = 2x < 0$, a na intervalu $(0,+\infty)$ raste i $f'(x) > 0$, dok

funkcija $f(x) = x^3$ raste na intervalu $(-\infty,+\infty)$. Kako je $f'(x) = 3x^2$, to je $f'(x) > 0$ za $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ i $f'(0) = 0$. ▶

Prethodni primer pokazuje da rastuća funkcija ne mora imati uvek pozitivan izvod.

3.93. Definicija. *Tačka c koja pripada domenu funkcije f zove se* **kritična tačka** *funkcije f ako je ili $f'(c) = 0$ ili $f'(c)$ ne postoji.*

3.94. Primer. *Odrediti kritične tačke funkcije $f(x) = (x+5)^2\sqrt[3]{x-4}$,* $x \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Data funkcija je neprekidna za svako $x \in \mathbb{R}$. Za $x \neq 4$, prvi izvod funkcije f je

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+5)(x-4)^{1/3} + (x+5)^2\frac{1}{3(x-4)^{2/3}} = \frac{(x+5)^2+6(x+5)(x-4)}{3(x-4)^{2/3}} \\ &= \frac{(x+5)(7x-19)}{3(x-4)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Kako je $f'(x) = 0$ za $x = -5$ i $x = 19/7$, a prvi izvod ne postoji za $x = 4$, to data funkcija ima tri kritične tačke: $x_1 = -5$, $x_2 = 19/7$ i $x_3 = 4$.

Podsetimo se da funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ima lokalni maksimum (respektivno lokalni

minimum) u tački $x_0 \in (a,b)$ ako postoji interval (c,d) koji sadrži tačku x_0, tako da za sve $x \in (c,d)$ važi $f(x) \leq f(x_0)$ (respektivno $f(x) \geq f(x_0)$). ▶

3.95. Teorema. *Ako je funkcija f neprekidna na intervalu (a,b) i ima* **ekstremnu vrednost** *(tj. lokalni minimum ili lokalni maksimum) u tački c, $c \in (a,b)$, tada je tačka c kritična tačka funkcije f (tj. ili je $f'(c) = 0$ ili $f'(c)$ ne postoji).*

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija f ima u tački c ekstremnu vrednost. Ako $f'(c)$ ne postoji, tada nema šta da se dokazuje. Ako $f'(c)$ postoji, tada je tačan samo jedan od sledeća tri iskaza:

$$f'(c) > 0, \quad f'(c) < 0 \quad \text{ili} \quad f'(c) = 0.$$

Pretpostavimo da je $f'(c) > 0$. Iz definicije prvog izvoda sledi da postoji interval $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset (a,b)$, takav da važi

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0 \quad \text{za sve} \quad 0 < |h| < \varepsilon.$$

To znači da je $f(c+h) > f(c)$ za $h > 0$, odnosno $f(c+h) < f(c)$ za $h < 0$. Prema tome $f(c)$ nije ni najveća vrednost (maksimum) ni najmanja vrednost (minimum) na intervalu $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, suprotno pretpostavci da u c funkcija f ima ekstremnu vrednost. Analogno se dobija kontradikcija i kada se pretpostavi $f'(c) < 0$. Prema tome je $f'(c) = 0$. ▶

Geometrijska interpretacija prethodne teoreme jeste da diferencijabilna funkcija ima horizontalnu tangentu u tački lokalnog ekstrema.

Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ tada je **globalni maksimum** (respektivno **globalni minimum**) na tom intervalu najveća (respektivno najmanja) od vrednosti $f(a)$, $f(b)$, $f(c_i)$, $i = 1,\ldots,k$, gde su c_i kritične tačke funkcije f, a k njihov broj.

3.96. Primer. *Odrediti globalni maksimum i globalni minimum za funkciju $f(x) = x^3 - 12x + 5$, na intervalu $[-3,5]$.*

Rešenje. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$. Prema tome, kritične tačke su $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, i važi $f(-3) = 14$, $f(-2) = 21$, $f(2) = -11$, $f(5) = 70$.

Odatle sledi da data funkcija f ima globalni minimum u tački $x_2 = 2$, a globalni maksimum u krajnjoj tački intervala $x = 5$. ▶

Prvi kriterijum za određivanje ekstremnih vrednosti funkcije

3.97. Teorema. *Neka je funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$, i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b), izuzev možda u tački $c \in$*

(a,b) i neka je c kritična tačka za funkciju f.

1. *Ako je $f'(x) > 0$ za $x \in (a,c)$, a $f'(x) < 0$ za $x \in (c,b)$, tada funkcija f ima lokalni maksimum u tački c.*

2. *Ako je $f'(x) < 0$ za $x \in (a,c)$, a $f'(x) > 0$ za $x \in (c,b)$, tada funkcija f ima lokalni minimum u tački c.*

3. *Ako je $f'(x) > 0$, ili $f'(x) < 0$, za sve $x \in (a,b)$, osim možda u tački c, tada funkcija f nema ekstremne vrednosti u tački c.*

Dokaz. 1. Na osnovu teoreme 3.91 uslov $f'(x) > 0$ za $x \in (a,c)$, povlači da funkcija f raste na intervalu (a,c), dok uslov $f'(x) < 0$ za $x \in (c,b)$, znači da funkcija f opada na intervalu (c,b). Prema tome je $f(c) > f(x)$, za sve $x \in (a,b)$, $x \neq c$, što znači da u tački c funkcija dostiže lokalni maksimum. Delovi 2. i 3. dokazuju se analogno. ▶

3.98. Primer. *Odrediti tačke u kojima date funkcije imaju ekstremne vrednosti i intervale na kojima one rastu, odnosno opadaju:*

a) $f(x) = 2 - 4x - x^2,\ x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = (x+1)^2,\ x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = (x+1)^3,\ x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5,\ x \in \mathbb{R}$;

e) $f(x) = \dfrac{-x}{x+2},\ x \in \mathbb{R}, x \neq -2$; f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x + 16},\ x \in \mathbb{R}$;

g) $f(x) = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x},\ x \in \mathbb{R}$; h) $f(x) = x + \ln x,\ x > 0$.

Rešenja.

a) Kako je $f'(x) = -4 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, to je $f'(x) = 0$ za $x = -2$, gde funkcija f ima ekstremnu vrednost.

Za $-4 - 2x > 0$, tj. za $x < -2$, funkcija raste.

Za $-4 - 2x < 0$, tj. za $x > -2$, funkcija opada.

Prema tome, u tački $x = -2$ data funkcija ima lokalni maksimum.

b) Kako je $f'(x) = 2(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$, to u tački $x = -1$ funkcija ima ekstremnu vrednost. Za $x+1 > 0$, tj. za $x > -1$, funkcija raste.

Za $x+1 < 0$, tj. za $x < -1$, funkcija opada.

Prema tome, u tački $x = -1$ data funkcija ima lokalni minimum.

c) Kako je $f'(x) = 3(x+1)^2 > 0$ za $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$, to na tom skupu data funkcija raste, pa zato u tački $x = -1$ ona nema ekstremnu vrednost. Dakle, funkcija f raste na celom $\mathbb{R}$.

d) Kako je $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x+5)(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$, to su kritične tačke $x_1 = -5/3$ i $x_2 = 1$. Za $(3x+5)(x-1) > 0$, funkcija raste.

(Poslednja nejednačina rešava se ili pomoću grafika odgovarajuće parabole ili pomoću odgovarajućih intervala na kojima su izrazi $3x+5$ i $x-1$ istog znaka.)

Tako se dobija da data funkcija raste na intervalima $(-\infty,-5/3)$ i $(1,+\infty)$.

Funkcija f opada na intervalu $(-5/3,1)$.

Prema tome, u tački $x_1 = -5/3$ funkcija f ima lokalni maksimum, a u tački $x_2 = 1$ data funkcija ima lokalni minimum.

e) Kako je $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+2)^2} < 0$, $x \neq -2$, to data funkcija opada na intervalima $(-\infty,-2)$, $(-2,+\infty)$ i nema ekstremnih vrednosti.

f) Kako je $f'(x) = \dfrac{16 - x^2}{(x^2 - 6x + 16)^2}$, to su kritične tačke $x_1 = -4$, i $x_2 = 4$.

Data funkcija raste za $f'(x) > 0$, tj. za $16 - x^2 > 0$, što povlači da f raste na intervalu $(-4,4)$.

Funkcija f opada na intervalima $(-\infty,-4)$ i $(4,+\infty)$.

Funkcija f ima lokalni minimum u tački $x_1 = -4$, a lokalni maksimum u tački $x_2 = 4$.

g) Kako je $f'(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3}(1 - \dfrac{1}{x^{2/3}}) = \dfrac{x^{2/3} - 1}{3x^{2/3}} = \dfrac{x^2 - 1}{3x^{2/3}(x^{4/3} + x^{2/3} + 1)}$, $x \neq 0$, to funkcija ima kritične tačke $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 0$.

Funkcija f opada za $x^2 - 1 < 0$, odnosno na intervalima $(-1,0)$ i $(0,1)$.

Funkcija f raste na intervalima $(-\infty,-1)$ i $(1,+\infty)$.

Funkcija f ima lokalni maksimum u tački $x_1 = -1$, a lokalni minimum u tački $x_2 = 1$. Tačka $x_3 = 0$ nije ekstrem funkcije.

h) Kako je $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+x}{x} > 0$, to funkcija f raste na intervalu $(0,+\infty)$ i f nema ekstremnih vrednosti. ▶

3.5.2 Teoreme srednje vrednosti

3.99. Rolova teorema. *Ako je funkcija f*

neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$,

diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b) i

važi $f(a) = f(b)$,

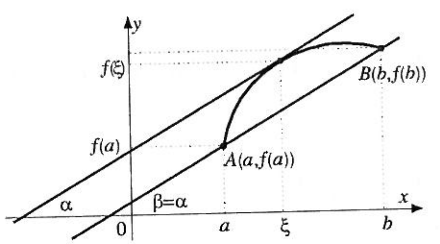
tada postoji tačka $\xi \in (a,b)$ za koju je $f'(\xi) = 0$.

Dokaz. Ako je funkcija f konstanta, tj. $f(a) = f(x) = f(b)$, za sve $x \in (a,b)$, tada je $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a,b)$.

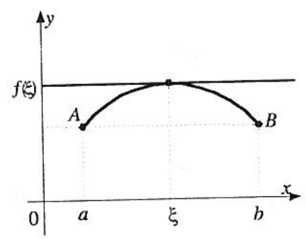
Ako je $f(x) > f(a)$, za neke vrednosti $x \in (a,b)$, tada prema teoremi 3.58 funkcija f dostiže lokalni maksimum u nekoj tački $c \in (a,b)$. Primetimo da tada važi $f(c) > f(a) = f(b)$. Kako je, prema pretpostavci, funkcija f diferencijabilna na (a,b), to na osnovu teoreme 3.95 sledi da je u tački c prvi izvod jednak nuli, tj. $f'(c) = 0$.

Analogno, ako je $f(x) < f(a)$ za neko $x \in (a,b)$, funkcija dostiže lokalni minimum u nekoj tački $c \in (a,b)$ za koju zbog diferencijabilnosti važi $f'(c) = 0$. ▶

Geometrijsko značenje Rolove teoreme 3.99 je da, za funkciju koja zadovoljava sva tri njena uslova, postoji bar jedna tačka $\xi \in (a,b)$ u kojoj je tangenta grafika horizontalna prava (sl. 3.11).



Slika 3.10.



Slika 3.11.

3.100. Lagranžova teorema. *Ako je funkcija f*

neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i

diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b),

tada postoji tačka $\xi \in (a,b)$, takva da važi $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Dokaz. Funkcija

$$g(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a), \quad x \in [a,b],$$

zadovoljava uslove Rolove teoreme. Naime, funkcija g je neprekidna na intervalu $[a,b]$, diferencijabilna na intervalu (a,b) i $g(a) = g(b) = 0$.

Prvi izvod funkcije g je

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Na osnovu Rolove teoreme 3.99 postoji tačka $\xi \in (a,b)$ takva da je $g'(\xi) = 0$, tj.

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \quad ▶$$

Geometrijsko značenje Lagranžove teorema 3.100 je da, za funkciju f koja zadovoljava njene uslove, postoji tačka $\xi \in (a,b)$, u kojoj je tangenta paralelna sa sečicom koju određuju tačke $A(a,f(a))$ i $B(b,f(b))$ (sl. 3.10). Naime, koeficijent pravca sečice AB je

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

što je prema Lagranžovoj teoremi jednako prvom izvodu funkcije f u tački ξ, tj. koeficijentu pravca tangente funkcije f tački sa apscisom ξ.

3.101. Primer. *Pokazati da funkcija $f(x) = x(x-1)(x-2)$ zadovoljava uslove Rolove teoreme na intervalima $[0,1]$ i $[1,2]$, odnosno na intervalu $[0,2]$, i odrediti odgovarajuće vrednosti ξ.*

Rešenje. Data funkcija je neprekidna i diferencijabilna u svakoj tački ovih intervala i važi $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, što znači da ona zadovoljava uslove Rolove teoreme na intervalima $[0,1]$, $[1,2]$ i $[0,2]$. Kako je $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, to je $f'(x) = 0$ za $x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Dakle, tačke u kojima je prvi izvod funkcije jednak nuli su $\xi_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0,1]$ i $\xi_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \in [1,2]$. Na intervalu $[0,2]$ funkcija f' ima dve realne nule ξ_1 i ξ_2. ▶

Poslednji primer pokazuje da tačka ξ iz Rolove teoreme nije jedinstvena. Primetimo takođe da Rolova teorema daje samo postojanje tačke ξ u kojoj je prvi izvod jednak nuli, ali ne i njenu konstrukciju.

3.102. Primer. *Primenom Lagranžove teoreme 3.100 pokazati sledeće nejednakosti*

a) $|\sin x - \sin y| \le |x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}$; **b)** $|\cos(2x) - \cos(2y)| < 2|x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}$;

c) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \le |x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}$; **d)** $\dfrac{x-y}{x} < \ln\dfrac{x}{y} < \dfrac{x-y}{y}, \quad 0 < y < x.$

Rešenja.

a) Primenom Lagranžove teoreme na funkciju $f(t) = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, koja je neprekidna i diferencijabilna na proizvoljnom intervalu $[x,y]$, dobijamo da postoji tačka $\xi \in (x,y)$ takva da važi

$$\sin x - \sin y = (x-y)\cos\xi,$$

odakle je $|\sin x - \sin y| = |\cos\xi| \cdot |x-y| \leq |x-y|$.

b) Za funkciju $f(t) = \cos(2t)$, $t \in \mathbb{R}$, koja je neprekidna i diferencijabilna na intervalu $[x,y]$, postoji tačka $\xi \in (x,y)$ sa osobinom

$$\cos(2x) - \cos(2y) = -2(x-y)\sin(2\xi),$$

odnosno $|\cos 2x - \cos 2y| = |-2\sin 2\xi| \cdot |x-y| \leq 2|x-y|$.

c) Za funkciju $f(t) = \operatorname{arctg} t$, $t \in \mathbb{R}$, koja je neprekidna i diferencijabilna na intervalu $[x,y]$, postoji tačka $\xi \in (x,y)$ sa osobinom $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \dfrac{x-y}{1+\xi^2}$. Odavde je

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| = \frac{|x-y|}{1+\xi^2} \leq |x-y|.$$

d) Za funkciju $f(t) = \ln t$, $t > 0$, koja je neprekidna i diferencijabilna na intervalu $[y,x]$, $0 < y < x$, postoji tačka $\xi \in (y,x)$ sa osobinom $\ln x - \ln y = \ln\frac{x}{y} = \frac{x-y}{\xi}$. Odavde je $|\ln x - \ln y| = \frac{|x-y|}{\xi}$, odnosno $\frac{1}{x} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{y}$, važi $\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$. ▶

3.103. Primer. *Pokazati teoremu 3.91.*

Dokaz. Pokazaćemo samo prvi deo teoreme, odnosno sledeće tvrđenje.
Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$, diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b) i važi $f'(x) > 0$ za svako $x \in (a,b)$, tada je funkcija f rastuća na intervalu $[a,b]$.
Neka su date proizvoljne tačke $x_1, x_2 \in (a,b)$ i neka je $x_1 < x_2$. Na osnovu Lagranžove teoreme sledi da postoji tačka $\xi \in (x_1,x_2)$ takva da važi

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi).$$

Iz $f'(\xi) > 0$ i $x_2 - x_1 > 0$, sledi da je i $f(x_2) > f(x_1)$, pa funkcija f raste. ▶
Treća teorema srednje vrednosti je

3.104. Košijeva teorema. *Ako su funkcije f i g neprekidne na zatvorenom intervalu $[a,b]$, diferencijabilne na otvorenom intervalu (a,b) i $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in (a,b)$, tada postoji tačka $\xi \in (a,b)$, za koju je* $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Košijeva teorema predstavlja uopštenje Lagranžove teoreme. Naime za $g(x) = x$, $x \in (a,b)$, dobijamo

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(\xi)}{1},$$

što daje tvrđenje Lagranžove teoreme.
Drugo važno uopštenje Lagranžove teoreme jeste

3.105. Tejlorova teorema. *Ako je funkcija f neprekidna i ima neprekidne sve izvode do $n-$tog reda na intervalu $[a,b]$ i ima izvod $f^{(n+1)}$ na intervalu (a,b), tada za $x \in [a,b]$ važi* **Tejlorova formula**

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) \\ &+ \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \end{aligned}$$

gde je $\xi = a + \theta\cdot(x-a)$ i $0 < \theta = \theta(x) < 1$.

Specijalno za $a = 0$ i $x \in [0,b]$ imamo **Maklorenovu formulu:**

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

gde je $\xi = \theta\cdot x$ i $0 < \theta = \theta(x) < 1$.

Polinom

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

se naziva **Tejlorov polinom** stepena n za funkciju f u tački a.

Tejlorova teorema pokazuje da važi

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)}{(x-a)^n} = 0.$$

Ova graničnu vrednost pokazuje da je polinom $P_n(x)$ aproksimacija funkcije f u okolini tačke a, što pišemo $f(x) \approx P_n(x)$, $x \approx a$.

Greška ove aproksimacije je $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$, gde je $\xi = a + \theta\cdot(x-a)$ i $0 < \theta < 1$.

Analogno, polinom

$$P_n(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

se naziva **Maklorenov polinom** stepena n za funkciju f i on aproksimira funkciju f sa greškom $R_n = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$, gde je $\xi = \theta\cdot x$ i $0 < \theta < 1$.

3.106. Primer. *Polinom $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$, $x \in \mathbb{R}$, razviti po stepenima binoma $x-2$ (tj. $a = 2$).*

Rešenje. Kako je $f(2) = -16$ i $f'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 6x + 7$, $\quad f'(2) = -33$;

$f''(x) = 12x^2 - 30x - 6$, $\quad f''(2) = -18$; $f'''(x) = 24x - 30$, $\quad f'''(2) = 18$;

$f^{(4)}(x) = 24$, $\quad f^{(4)}(2) = 24$, to je

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6 &= -16 - 33(x-2) - 18\frac{(x-2)^2}{2} + 18\frac{(x-2)^3}{3!} + 24\frac{(x-2)^4}{4!} \\ &= -16 - 33(x-2) - 9(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4. \end{aligned}$$

U ovom slučaju, peti izvod polinoma f identički je jednak nuli.
Uopšte, kod razvoja nekog polinoma stepena n u Tejlorov polinom istog stepena imamo grešku koja je identički jednaka nuli. ▶

3.107. Primer. *Funkciju* $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, *aproksimirati Maklorenovim polinomom*

a) *prvog stepena;* b) *drugog stepena;* c) *trećeg stepena,*

i oceniti grešku na intervalu $[0, 1]$.

Rešenja. Pre svega je $f'(x) = e^x = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, i $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$.

a) Za $n = 1$ je $e^x \approx 1 + x$ (sl. 3.12) kada je $x \approx 0$, a ostatak je $R_1 = \frac{x^2}{2}e^{\xi}$, za $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$. Tada se greška za $x \in [0, 1]$ može oceniti sa $|R_1(x)| \le \frac{x^2}{2}e \le \frac{e}{2} \approx 1,359$.

b) Za $n = 2$ je $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (sl. 3.13) kada je $x \approx 0$ i ostatak je $R_2 = \frac{x^3}{3!}e^{\xi}$, $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$. Ocena greške na intervalu $[0, 1]$ je $|R_2(x)| \le \frac{x^3}{3!}e \le \frac{e}{6} \approx 0,453$.

c) Za $n = 3$ je $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$, kada je $x \approx 0$, i greška na intervalu $[0, 1]$ je $|R_3(x)| = \frac{x^4}{4!}e^{\xi} \le \frac{e}{24} \approx 0,113$, $\quad \xi = \theta x$, $\quad 0 < \theta < 1$. Primetimo da se sa povećanjem stepena n greška po apsolutnoj vrednosti smanjuje, tj. aproksimacija funkcije sa njenim Maklorenovim polinomom je bolja što je njegov stepen viši. Ostavljamo čitaocu da pokaže da funkciju $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, 1]$ Maklorenov polinom šestog stepena aproksimira sa greškom manjom od $0,00054$. ▶

3.108. Primer. *Odrediti Maklorenove polinome do člana* x^4 *za sledeće funkcije:*

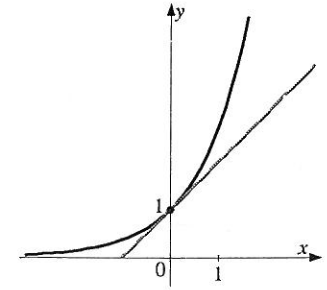
a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = \cos x$; c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; d) $f(x) = \ln(1+x)$,

Rešenja.

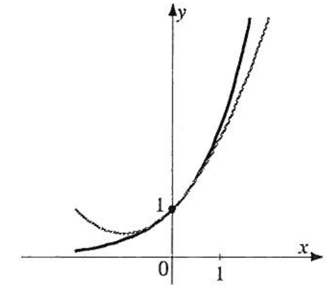
a) Kako je $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x$, $\quad f'(0) = 1$, $\quad f''(x) = -\sin x$, $\quad f''(0) = 0$,

$f'''(x) = -\cos x$, $\quad f'''(0) = -1$, $\quad f^{(4)}(x) = \sin x$, $\quad f^{(4)}(0) = 0$,

to je traženi Maklorenov polinom za funkciju $f(x) = \sin x$ jednak $\quad P_4(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$, i važi



Slika 3.12.



Slika 3.13.

$\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$ za $x \approx 0$.

b) U ovom slučaju je $f(0) = 1$, $f'(x) = -\sin x$, $\quad f'(0) = 0$, $\quad f''(x) = -\cos x$,

$f''(0) = -1$, $\quad f'''(x) = \sin x$, $\quad f'''(0) = 0$, $\quad f^{(4)}(x) = \cos x$, $\quad f^{(4)}(0) = 1$.

Maklorenov polinom četvrtog stepena za funkciju $f(x) = \cos x$ je $P_4(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$, i

važi $\quad \cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$, $\quad x \approx 0$.

c) Kako je $\quad f(0) = 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $\quad f'(0) = 1$, $\quad f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$,

$f''(0) = 2$, $f'''(x) = \dfrac{3!}{(1-x)^4}$, $\quad f'''(0) = 6$, $\quad f^{(4)}(x) = \dfrac{4!}{(1-x)^5}$, $\quad f^{(4)}(0) = 4!$,

to je traženi Maklorenov polinom $P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ i važi

$\dfrac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, $\quad x \approx 0$.

d) Kako je $f(0) = 0$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f'(0) = 1$ $\; f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$,

$f''(0) = -1$, $f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$, $\quad f'''(0) = 2$, $\quad f^{(4)}(x) = -\dfrac{3!}{(1+x)^4}$, $\quad f^{(4)}(0) = -3!$,

to je $P_4(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$ i važi $\quad \ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$, $\quad x \approx 0$. ▶

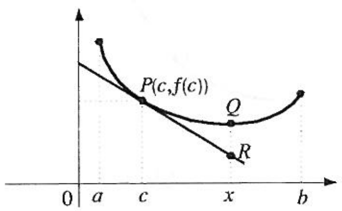
3.5.3 Konkavnost grafika funkcije

3.109. Definicija. *Neka je funkcija* f *diferencijabilna u tački* c.

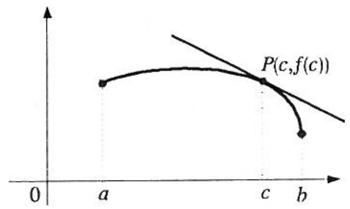
Grafik funkcije f *je* **konkavan odozgo** *u tački* $P(c, f(c))$, *ako postoji otvoren interval* (a, b) *koji sadrži tačku* c *sa osobinom da je grafik funkcije na intervalu* (a, b) **iznad tangente** *funkcije u tački* P *(sl. 3.14.)*

Grafik funkcije f *je* **konkavan odozdo** *u tački* $P(c, f(c))$, *ako postoji otvoren* *interval (a,b) koji sadrži tačku c sa osobinom da je grafik funkcije na intervalu (a,b)* **ispod tangente** *funkcije u tački P (sl. 3.15.)*

Pored termina konkavan odozgo i konkavan odozdo, koriste se respektivno i termini **konveksan** i **konkavan.**



Slika 3.14.



Slika 4.15.

3.110. Teorema. *Ako je funkcija f dva puta diferencijabilna na otvorenom intervalu koji sadrži tačku c, tada je u tački $P(c,f(c))$ grafik funkcije*

konkavan odozgo ako je $f''(c) > 0$;

konkavan odozdo ako je $f''(c) < 0$.

Dokaz. Ako je $f''(c) > 0$, tada na osnovu $f''(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$ sledi da postoji interval (a,b) koji sadrži tačku c takav da je

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \quad \text{za sve} \quad x \in (a,b), \quad x \neq c. \tag{3.19}$$

Označimo $g(x) = f(x) - y$, $x \in (a,b)$, gde je y izabrano tako da je tačka $R(x,y)$ na tangenti grafika funkcije f u tački $P(c,f(c))$. Neka je, dalje, $Q(x,f(x))$ tačka na grafiku funkcije f. Ako pokažemo da je $g(x) > 0$ za svako $x \in (a,b)$, $x \neq c$, tada dobijamo prvo tvrđenje teoreme (sl. 4.7).

Jednačina tangente u tački P je oblika

$$y - f(c) = f'(c)(x - c), \quad \text{odnosno} \quad y = f(c) + f'(c)(x - c). \tag{3.20}$$

Pošto funkcija f zadovoljava uslove Lagranžove teoreme na intervalu $[a,b]$, to postoji tačka $\xi \in (a,b)$ takva da važi

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c). \tag{3.21}$$

Iz relacija (3.20) i (3.21) sledi da se funkcija g može zapisati kao

$$g(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) = f'(\xi)(x - c) - f'(c)(x - c) = (f'(\xi) - f'(c))(x -$$

$$c),$$

gde tačka $\xi \in (x,c)$, a takođe i $\xi \in (a,b)$. Iz prethodne relacije, kao i na osnovu relacije (3.19), sledi da je $g(x) > 0$, što je i trebalo pokazati.

Drugi deo se pokazuje analogno. ▶

3.111. Definicija. *Neka je funkcija f neprekidna i diferencijabilna na intervalu (a,b). Tačka $P(c,f(c))$ je* **prevojna tačka** *grafika funkcije f ako postoji otvoreni interval (a,b), $c \in (a,b)$, takav da važi jedan od sledeća dva uslova:*

a) $f''(x) > 0$ *za* $x \in (a,c)$ *i* $f''(x) < 0$ *za* $x \in (c,b)$,

b) $f''(x) < 0$ *za* $x \in (a,c)$ *i* $f''(x) > 0$ *za* $x \in (c,b)$.

Drugim rečima, u prevojnoj tački grafik funkcije menja svoju konkavnost.
Neka funkcija f ima neprekidan drugi izvod na intervalu (a,b). Iz definicije (3.111) neposredno sledi da je uslov

$$f''(c) = 0. \tag{3.22}$$

potreban da funkcija f ima prevojnu tačku u $c \in (a,b)$. Naravno, uslov (3.22) **nije dovoljan** za postojanje prevojne tačke grafika funkcije u tački c. To se vidi iz sledećeg primera.

3.112. Primer. *Za funkciju $f(x) = x^4 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, odrediti prevojne tačke, intervale konkavnosti odozgo i konkavnosti odozdo.*

Rešenje. Pošto je $f'(x) = 4x^3$ i $f''(x) = 12x^2$, to je tačka $c = 0$ jedina za koju važi uslov (3.22). Za $x \neq 0$ je $f''(x) > 0$, pa je data funkcija konkavna odozgo na oba intervala $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$. Dakle, funkcija f nema prevojnu tačku u $x = 0$, i pored toga što je $f''(0) = 0$. ▶

3.113. Primer. *Za sledeće funkcije odrediti intervale na kojima su one konkavne odozgo, konkavne odozdo, kao i njihove prevojne tačke:*

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; **b)** $f(x) = (x^2 - 3)^2$; **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$.

Rešenja.

a) U ovom slučaju je $f'(x) = 3x^2 - 6x$ i $f''(x) = 6x - 6$, pa je $f''(1) = 0$. Odavde sledi da je data funkcija konkavna odozgo za $x > 1$ i konkavna odozdo za $x < 1$. Prevojna tačka grafika date funkcije je tačka $(1, -1)$.

b) Pošto je $f'(x) = 4x^3 - 12x$ i $f''(x) = 12(x^2 - 1)$, to je $f''(x) = 0$ za $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Kako je $f''(x) < 0$ za $x \in (-1, 1)$, to je funkcija konkavna odozdo u tom intervalu;

$f''(x) > 0$ za $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, to je funkcija konkavna odozgo na ova dva intervala. Prevojne tačke grafika date funkcije su u $x_1 = -1$ i u $x_2 = 1$.

c) Drugi izvod date funkcije je $f''(x) = \dfrac{2}{9x^{5/3}}$, $x \neq 0$. Funkcija je konkavna odozgo na $(0,+\infty)$. Funkcija je konkavna odozdo na $(-\infty,0)$. Prevojna tačka grafika date funkcije je tačka $(0,-1)$, i pored toga što u toj tački drugi izvod ne postoji. ▶

Drugi kriterijum za određivanje ekstremnih vrednosti funkcije

3.114. Teorema. *Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b) koji sadrži tačku c i neka je $f'(c) = 0$.*

Ako je $f''(c) < 0$, tada funkcija f ima lokalni maksimum u tački c.

Ako je $f''(c) > 0$, tada funkcija f ima lokalni minimum u tački c.

Dokaz. Uslov $f'(c) = 0$, povlači da je tangenta na datu krivu u tački $P(c, f(c))$ horizontalna. Ako je još i $f''(c) < 0$, tada postoji interval (a,b), koji sadrži tačku c takav da je funkcija konkavna odozdo, pa se grafik date funkcije nalazi ispod tangente u tački P. To znači da data funkcija ima lokalni maksimum u tački P. Analogno se pokazuje tvrđenje i u slučaju kada je $f''(c) > 0$. ▶

3.115. Teorema. *Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b) koji sadrži tačku c i neka važe jednakosti $f'(c) = 0$ i $f''(c) = 0$. Pretpostavimo da postoji prirodan broj $n > 2$ sa osobinom $f^{(n)}(c) \neq 0$; neka je n i najmanji takav broj. Tada razlikujemo sledeća dva slučaja.*

1. *Ako je broj n* **paran** *u tački c, tada funkcija f ima ekstremnu vrednost i to:*
lokalni maksimum ako je $f^{(n)}(c) < 0$, odnosno
lokalni minimum ako je $f^{(n)}(c) > 0$.

2. *Ako je broj n* **neparan** *u tački c, tada funkcija f nema ekstremnu vrednost, ali ima prevojnu tačku.*

3.116. Primer. *Odrediti ekstremne vrednosti i intervale monotonosti sledećih funkcija $x \in \mathbb{R}$:*

a) $f(x) = x - \sin x$; b) $f(x) = \sin^2 x$; c) $f(x) = x^2 e^x$; d) $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$.

Rešenja.

a) Kako je $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, to funkcija f raste na skupu $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Kako je $f''(2k\pi) = \sin(2k\pi) = 0$ i $f'''(2k\pi) = \cos(2k\pi) = (-1)^k \neq 0$, to funkcija f u tačkama $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ima prevojne tačke. Prema tome funkcija f raste na intervalu $(-\infty,+\infty)$.

b) Kako je $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$, to je $f'(x) = 0$, za $x_k = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pošto je $f''(x) = 2\cos(2x)$ i $f''(x_k) = 2(-1)^k$, to data funkcija ima lokalne minimume u tačkama x_{2j}, a lokalne maksimume u tačkama x_{2j+1}, $j \in \mathbb{Z}$.

Funkcija f raste kada je $f'(x) > 0$, odnosno na svakom od intervala $\left(k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkcija f opada na svakom od intervala $\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}, (k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Naravno, mogla se koristiti i činjenica da je data funkcija f periodična sa osnovnom periodom π.

c) Kako je $f'(x) = (2x + x^2)e^x$, to je $f'(x) = 0$, za $x_1 = 0$ i $x_2 = -2$. Pošto je $f''(x) = (2 + 4x + x^2)e^x$, to je $f''(0) > 0$ i $f''(-2) < 0$. Dakle, funkcija ima lokalni maksimum u tački $x_2 = -2$, a lokalni minimum u tački $x_1 = 0$.

Funkcija raste na intervalu $(-\infty,-2)$ i na $(0,+\infty)$, a opada na intervalu $(-2,0)$.

d) Kako je

$$f'(x) = (2x)x^{2/3} + (x^2 - 8)\left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = \frac{6x^2 + 2(x^2 - 8)}{3x^{1/3}} = \frac{8(x^2 - 2)}{3x^{1/3}},$$

to je $f'(x) = 0$ za $x_1 = -\sqrt{2}$ i $x_2 = \sqrt{2}$. Treća kritična tačka za funkciju f je $x_3 = 0$, jer u njoj prvi izvod date funkcije ne postoji.

Pošto je za svako $x \neq 0$: $f''(x) = \dfrac{8}{9} \cdot \dfrac{5x^2 + 2}{x^{4/3}} > 0$, to funkcija f ima lokalni minimum u kritičnim tačkama $x_1 = -\sqrt{2}$ i $x_2 = \sqrt{2}$. Pošto je

$x^2 - 2 > 0$ za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ i $x^2 - 2 < 0$ za $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

to je $f'(x) > 0$ za $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. Na ta dva intervala funkcija f raste. Funkcija f opada na intervalima $(-\infty, -\sqrt{2})$ i $(0, \sqrt{2})$, jer je na svakom od njih $f'(x) < 0$.

Najzad, funkcija f ima lokalni maksimum u tački $x_3 = 0$, jer prvi izvod f' menja znak prolaskom kroz tačku 0. ▶

3.5.4 Lopitalovo pravilo

Za određivanje graničnih vrednosti $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, [1] često se koristi

[1] U ovom odeljku ∞ označava bilo koji od simbola $+\infty$ ili $+\infty$.

3.117. Lopitalovo pravilo. *Neka su funkcije f i g diferencijabilne u svakoj tački intervala (a,b), sem možda u tački $c \in (a,b)$. Neka su još ispunjena sledeća tri uslova:*

a) $g'(x) \neq 0$ *za* $x \neq c$;

b) *obe funkcije f i g teže nuli (respektivno teže ka ∞) kada x teži c;*

c) *postoji* $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tada takođe postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *i važi* $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Dokaz. Pretpostavimo da $f(x) \to 0$ i $g(x) \to 0$ kada $x \to c$, i da je $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Pokazaćemo da je tada i $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Definišimo funkcije F i G na sledeći način:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq c; \\ 0, & x = c, \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq c; \\ 0, & x = c. \end{cases} \tag{3.23}$$

Tada važe jednakosti

$$\lim_{x\to c} F(x) = \lim_{x\to c} f(x) = 0 = F(c) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to c} G(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 = G(c),$$

Pošto su funkcije f i g neprekidne u svakoj tački intervala (a,b), sem možda u tački c, to su i funkcije F i G neprekidne na celom intervalu (a,b). Takođe je za svako t iz intervala (x,c) (ili (c,x)), gde je $x \in (a,b)$, $x \neq c$, zadovoljeno $F'(t) = f'(t)$ i $G'(t) = g'(t)$, što znači da funkcije F i G zadovoljavaju uslove Košijeve teoreme 3.104 na svakom od tih intervala. Dakle, postoji $\xi \in (x,c)$ takvo da je

$$\frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Na osnovu relacije (3.23) je $F(c) = 0$ i $G(c) = 0$, pa sledi da je za $x \neq c$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{3.24}$$

Primetimo da $\xi \to c$ kada $x \to c$, pa pošto prema uslovu 3 izraz na desnoj strani (3.24) ima graničnu vrednost jednaku L, to i količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ mora imati istu graničnu vrednost, tj. mora biti

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to c} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L.$$

Analogno se pokazuje i slučaj $f(x) \to \infty$ i $g(x) \to \infty$ kada $x \to c$. ▶

U praksi, kada treba odrediti graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, postupamo na sledeći način. Prvo proverimo da li je u pitanju granična vrednost "$\frac{0}{0}$" ili "$\frac{\infty}{\infty}$", pa ako jeste, ispitujemo $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Ako ona postoji, onda postoji i tražena granična vrednost i obe su međusobno jednake.

3.118. Primer. *Koristeći Lopitalovo pravilo, odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x + 3x - 1}{2x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x \sin 2x}$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2\ln x}{\sqrt{x}}$; e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3}$; f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$.

Rešenja.

a) Pokažimo prvo da su ispunjeni uslovi za primenu Lopitalovog pravila. Pre svega, funkcije $f(x) = \cos x + 3x - 1$ i $g(x) = 2x$ su diferencijabilne u proizvoljnom intervalu koji sadrži tačku nula i dati izraz je oblika "$\frac{0}{0}$" kada $x \to 0$, jer je $f(0) = g(0) = 0$. Dalje je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos x + 3x - 1)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x + 3}{2} = 3/2$. Na osnovu Lopitalovog pravila je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x + 3x - 1}{2x} = 3/2$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x \sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2\sin x}{\sin 2x + 2x\cos 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2\cos x}{4\cos 2x - 4x\sin 2x} = 4/4 = 1.$

c) Dati izraz je oblika "$\frac{\infty}{\infty}$," pa je $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6x + 2}{2x} = \frac{6}{2} = 3.$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3e^{3x}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{9e^{3x}}{6x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{27e^{3x}}{6} = +\infty.$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0.$

Proveriti da su ispunjeni uslovi Lopitalovog pravila u prethodnim zadacima. ▶

3.119. Primer. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$; b) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin x \ln \sin x$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(e^{1/x} - 1)$; d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \sin\frac{1}{x}$.

Rešenja.

a) $\lim\limits_{x\to0+} x\ln x = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0+}(-x) = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to0+} \sin x\ln\sin x = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to0+}(-\sin x) = 0.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{1/x}-1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^{1/x}-1)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{-1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = 1.$ ▶

3.120. Primer. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{1/x}$; b) $\lim\limits_{x\to0+}(e^x-1)^x$; c) $\lim\limits_{x\to0+}x^x$; d) $\lim\limits_{x\to0}(2x+1)^{\operatorname{ctg}x}$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$.

Rešenja. U ovim zadacima javljaju se neodređeni izrazi oblika "0^0, 1^∞ i ∞^0. Njihove granične vrednosti određuju se prethodnim logaritmovanjem.

a) Za funkciju $y=(1+2x)^{1/x}$ važi $\ln y = \dfrac{1}{x}\ln(1+2x)$, odakle je
$$\lim_{x\to0}\ln y = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{1} = 2.$$
Na osnovu toga je $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to0}\ln y} = e^2$.

b) Za funkciju $y=(e^x-1)^x$ važi $\ln y = x\ln(e^x-1)$, odakle je
$$\lim_{x\to0+}\ln y = \lim_{x\to0+}\frac{\ln(e^x-1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0+}\frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to0+}\frac{-x^2e^x}{e^x-1} = \lim_{x\to0+}\frac{-(2xe^x+x^2e^x)}{e^x} = 0.$$
Na osnovu toga je $\lim\limits_{x\to0+}(e^x-1)^x = e^{\lim\limits_{x\to0}\ln y} = e^0 = 1$.

c) Za funkciju $y=x^x$ važi $\ln y = x\ln x$, odakle je $\lim\limits_{x\to0+}\ln y = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0+}(-x) = 0$. Na osnovu toga je $\lim\limits_{x\to0+}x^x = e^{\lim\limits_{x\to0}\ln y} = e^0 = 1$.

d) Za funkciju $y=(2x+1)^{\operatorname{ctg}x}$ važi $\ln y = \operatorname{ctg}x\ln(2x+1)$, pa je
$\lim\limits_{x\to0}\ln y = \lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x\ln(2x+1)) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2x+1)}{\operatorname{tg}x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2}{2x+1}}{\frac{1}{\cos^2x}} = 2$. Prema tome je $\lim\limits_{x\to0}y = e^2$.

e) Iz $y=x^{1/x}$ sledi $\ln y = \dfrac{\ln x}{x}$, pa je $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. Na osnovu toga je $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x} = e^0 = 1$. ▶

3.121. Primer. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Rešenja. Ovde se javljaju izrazi "$\infty-\infty$", i njihove granične vrednosti se takođe mogu dobiti primenom Lopitalovog pravila, nakon primena odgovarajućih transformacija.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{2x} = 2.$

b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0;$

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-e^x+1}{xe^x-x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^x}{xe^x+e^x-1} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-e^x}{xe^x+2e^x} = -1/2.$ ▶

3.122. Primer. *Odrediti graničnu vrednost* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sin x}{2x+\sin x}$.

Rešenje. Kako je za $x>2$
$$\frac{2x-1}{2x+1}\le\frac{2x-\sin x}{2x+\sin x}\le\frac{2x+1}{2x-1}\quad \text{i važi} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{2x-1} = 1,$$
to je $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sin x}{2x+\sin x} = 1$. U ovom slučaju, međutim, ne može se primeniti Lopitalovo pravilo, jer ne postoji $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-\sin x)'}{(2x+\sin x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\cos x}{2+\cos x}$. ▶

3.5.5 Fizički smisao izvoda

Ako funkcija $s=s(t)$, $t\ge0$, opisuje pređeni put materijalne tačke (kao funkciju vremena t), tada je prvi izvod funkcije s u tački $t_0>0$ (ako postoji), **trenutna brzina** te materijalne tačke u momentu t_0, dok je drugi izvod funkcije s u tački t_0 (ako postoji) **trenutno ubrzanje** te materijalne tačke u momentu t_0.

3.123. Primer. *Telo se kreće pravolinijski, a udaljenost od početne tačke data je zakonom* $s=t^3-12t^2+36t$, *gde je vreme t dato u sekundama, a put s u metrima.*

a) *Odrediti vremenski interval u kome se udaljenost s od početnog položaja povećava i vremenski interval u kome se udaljenost s od početnog položaja smanjuje.*

b) *Odrediti vremenski interval u kome se brzina v povećava i vremenski interval u kome se brzina v smanjuje.*

c) *Odrediti razdaljinu tela od početne tačke posle 7 sekundi.*

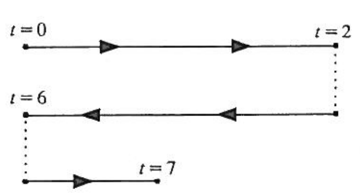
Rešenja. Prema prethodnom, brzina posmatranog tela je $v(t)=s'(t)=3t^2-24t+36$, a ubrzanje je $a(t)=s''(t)=6t-24$.

a) Udaljenost s od početnog položaja se povećava ako je $s'(t)=v(t)>0$, tj. za
$$3t^2-24t+36 = 3(t^2-8t+12) = 3(t-2)(t-6) > 0.$$

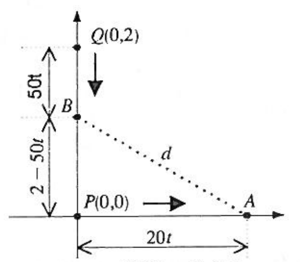
To se dešava za $0 < t < 2$ i $t > 6$. Udaljenost s od početnog položaja se smanjuje ako je $s'(t) = v(t) = 3(t-2)(t-6) < 0$, tj. za $2 < t < 6$.

b) Brzina se povećava ako je $v'(t) = a(t) = 6t - 24 > 0$, tj. ako je $t > 4$.

Brzina se smanjuje ako je $v'(t) = a(t) = 6t - 24 < 0$, tj. ako je $0 < t < 4$.



Slika 3.16.



Slika 3.17.

c) U početnom trenutku $t = 0$ je $s = 0$, tj. telo je u tački O. U vremenu $0 < t < 2$ dužina puta se povećava, što znači da se telo kreće u desno, tj. u pozitivnom smeru s ose. Za $t = 2$ je $s = 32$m. Za sledeće 4 sekunde, tj. za $2 < t < 6$, rastojanje od tačke O se smanjuje, tj. telo se kreće u levo (u negativnom smeru s–ose). Za $t = 6$ je $s = 0$, tj. telo se vratilo u tački O. Ako se t dalje povećava, tj. za $6 < t < 7$, telo se ponovo kreće u desno i za $t = 7$ je udaljeno $s = 7$m od tačke O. ▶

3.124. Vertikalan hitac. *Projektil se ispaljuje vertikalno u vis brzinom od* $400\,m/sec$. *Opisati njegovo kretanje tokom vremena. Uzeti da je ubrzanje Zemljine teže* $g \approx 10\,m/s^2$. *Visina na koju se telo penje data je opštim izrazom* $h(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$, *tj.* $h(t) = 400t - 5t^2$.

Rešenje. Ovo je tipičan primer jednoliko usporenog kretanja. Visina data u funkciji od vremena jeste parabola okrenuta na dole. Nule ove parabole su $t_1 = 0$s i $t_2 = 80$s. Prva vrednost predstavlja trenutak lansiranja, a druga odgovara vremenu kada se projektil vrati na zemlju.

Brzina projektila je $v(t) = h'(t) = 400 - 10t$. Brzina $v(t)$ je pozitivna (usmerena naviše) sve do $t = 40$s, a potom postaje negativna (usmerena na niže). Momenat $t = 40$s odgovara maksimalnoj visini $h_{max} = h(40) = 400 \cdot 40 - 5 \cdot 40^2 = 8.000m$. Uočimo da je $v(80) = -400$m/s, što znači da je brzina povratka po intenzitetu jednaka brzini lansiranja (što je posledica zakona o održanju energije). ▶

3.5.6 Razni zadaci sa primenom izvoda

3.125. Primer. *Od kartona pravougaonog oblika dužine* $21\,cm$ *i širine* $16\,cm$, *treba iseći jednake kvadrate oko svakog temena tako da se dobije otvorena kutija oblika kvadra sa najvećom zapreminom*

Rešenje. Ako označimo sa x stranicu kvadrata koji se iseca, tada su dimenzije kutije x, $16 - 2x$ i $21 - 2x$, pa je njegova zapremina

$$V(x) = x(16-2x)(21-2x) = 2(168x - 37x^2 + 2x^3), \quad x \in [0, 8].$$

Prvi izvod funkcije Vje $V'(x) = 2(168 - 74x + 6x^2) = 4(3x-28)(x-3)$. Nule ove funkcije su $x_1 = 28/3$ i $x_2 = 3$, pri čemu je $x_1 > 8$, pa nema smisla u našem slučaju. Drugi izvod funkcije je $V''(x) = 4(6x - 37)$, pa je $V''(3) < 0$. Prema tome, funkcija ima lokalni maksimum u tački $x = 3$. To je lokalni maksimum, pa je potrebno proveriti da li je to i globalni maksimum, što u ovom slučaju znači da treba ispitati još i vrednosti funkcije u krajnjim tačkama. Kako je $V = 0$ za $x = 0$ i $x = 8$, to se najveća zapremina $V = 450\,\text{cm}^3$ zaista dobija za $x = 3$, tj. kada se iz svakog ugla iseče kvadrat stranice 3 cm. ▶

3.126. Primer. *Odrediti dimenzije kontejnera oblika kružnog valjka date zapremine* $V = 24\pi\, m^3$ *tako da cena utrošenog materijala bude minimalna, ako je materijal koji se koristi za dno tri puta skuplji od materijala za omotač.*

Rešenje. Ako označimo sa r poluprečnik kruga koji se nalazi u osnovi valjka, sa H njegovu visinu, tada zbog $V = Hr^2\pi$ možemo pisati $H = 24/r^2$. Ako sa c dinara označimo cenu kvadratnog metra materijala koji se koristi za omotač valjka, tada omotač valjka staje $c(2\pi r H)$, a osnova staje $3c(\pi r^2)$. Ukupna cena materijala za ceo valjak je

$$C(r) = c(2\pi r H) + 3c(\pi r^2) = c\pi(3r^2 + 2rH) = c\pi\left(3r^2 + \tfrac{48}{r}\right).$$

Kako je $C'(r) = c\pi\left(6r - \frac{48}{r^2}\right) = 6c\pi\left(\frac{r^3-8}{r^2}\right)$, to je $C'(r) = 0$ za $r = 2$. Zbog $C''(r) = c\pi\left(6 + \frac{96}{r^3}\right)$ je $C''(2) > 0$, pa će se najjeftiniji valjak dobiti ako je poluprečnika 2 cm i visine 6 cm. ▶

3.127. Primer. *Odrediti valjak maksimalne zapremine koji se može upisati u kupu visine* $H = 12\,cm$ *i poluprečnika osnove* $R = 4\,cm$, *ako je osa simetrije kupe istovremeno i osa simetrije valjka*

Rešenje. Ako označimo sa r poluprečnik osnove valjka, a sa h visinu valjka, tada je zapremina valjka $V = \pi r^2 h$. Iz sličnosti trouglova ABC i AOS sledi proporcionalnost odgovarajućih stranica, pa je $\frac{h}{R-r} = \frac{H}{R}$ ili $\frac{h}{4-r} = \frac{12}{4} = 3$, odnosno $h = 3(4-r)$. Zato je $V(r) = \pi r^2 h = 3\pi(4r^2 - r^3)$ i $V'(r) = 3\pi r(8 - 3r)$. Kritične tačke za funkciju V su $r = 0$ i $r = 8/3$. Kako je $V''(r) = 3\pi(8 - 6r)$, $V''(0) > 0$, $V''(8/3) < 0$, to se za $r = 8/3$, $h = 4$ dobija valjak maksimalne zapremine $V = 256\pi/9\text{cm}^3$ upisan u datu kupu. ▶

3.128. Primer. *Neka se dva puta ukrštaju u tački P pod pravim uglom. Jedan automobil prođe tačku P u 10 sati ujutro putujući konstantnom brzinom od* $20\,km/h$ *u* *desno (prema istoku). U isto vreme drugi automobil je 2km udaljen od tačke P prema gore (prema severu) putujući prema dole (prema jugu) brzinom od 50km/h. Odrediti vreme kada će ta dva automobila biti najbliže jedan drugome*

Rešenje. Označimo pomenute puteve pomoću x i y ose, a sa t broj sati posle 10 časova ujutro. Tada će sporiji automobil preći $20t$ km i biti u tački A, a brži automobil preći $50t$ km i biti u tački B. Rastojanje između A i B dato je sa $d = \sqrt{(2-50t)^2+(20t)^2} = \sqrt{4-200t+2900t^2}$.

Potkorena veličina uvek pozitivna (dakle, nema problema sa definisanosti), i da nikada ne može biti jednaka nuli. Funkcija d je definisana na intervalu od $t=0$ do $t=\frac{2}{50}=\frac{1}{25}$, kada drugi automobil stigne u tačku P. Funkcija $\sqrt{x}$ je rastuća, tako da se ekstremne vrednosti funkcije $\sqrt{f(x)}$, $f(x)>0$ mogu odrediti pomoću ekstremnih vrednosti funkcije f, što je znatno jednostavnije. Ako označimo $f(t) = 4-200t+2900t^2$, tada je $f'(t) = -200+5800t$, pa je $f'(t)=0$ za $t=\frac{200}{5800}=\frac{1}{29}$. Zbog $f''(t)=5800>0$, funkcija f ima za $t=\frac{1}{29}$ lokalni minimum $f\left(\frac{1}{29}\right)\approx 0,55$. Funkcija f je definisana na intervalu $[0,1/25)$ i $f(0)=4>0,55$ pa je u $t=\frac{1}{29}$ apsolutni minimum za funkciju f.

Prema tome, automobili će biti najbliži jedan drugom posle $\frac{1}{29}$ sati od polaska, odnosno približno 2,07 minuta posle 10 sati. Najmanje rastojanje između njih biće $\sqrt{f\left(\frac{1}{29}\right)} \approx \sqrt{0,55} \approx 0,74$km. ▶

3.5.7 Grafici

3.129. Primer. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije* $f(x)=x^6-12x^4+48x^2-189$. *(Slika 3.18.).*

Rešenje. Domen date funkcije je $\mathbb{R}$. Funkcija je parna. Nule funkcije f se određuju iz $f(x)=0$, odnosno $(x-3)(x+3)(x^4-3x^2+21)=0$. Odatle dobijamo da su nule funkcije $x_1=-3$, $x_2=3$.

Prvi izvod funkcije f je $f'(x)=6x^5-48x^3+96x=6x(x^2-4)^2$, $x\in\mathbb{R}$. Nule prvog izvoda su $x_3=-2$, $x_4=2$ i $x_0=0$.

Kritične tačke funkcije f su $A(0,-189)$, $B(-2,-125)$, $C(2,-125)$.

Funkcija f raste kada je $f'(x)>0$, ustvari kada je $x>0$, tj. na $(0,+\infty)$, a opada $f'(x)<0$, tj. na intervalu na $(-\infty,0)$.

Drugi izvod funkcije f je $f''(x)=30x^4-144x^2+96$, odnosno $f''(x)=0$, za $x_3=-2$, $x_4=2$, $x_5=\frac{2}{5}\sqrt{5}$, $x_6=-\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

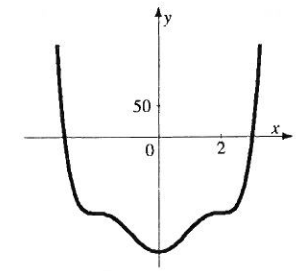
Kako je $f''(0)=96>0$, to je kritična tačka $A(0,189)$ minimum funkcije.

Primetimo da prvi izvod ne menja znak u tačkama $x_3=-2$, i $x_4=2$, iako je $f'(2)=0$, $f'(-2)=0$, što znači da funkcija nema ekstrema u tim tačkama.

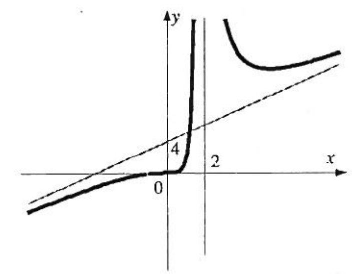
Funkcija f je konveksna ako je $f''(x)=6(5x^4-24x^2+16)>0$, tj. na $(-\infty,-2)$, na $\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5},\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$ i na $(2,\infty)$, a konkavna ako je $f''(x)=6(5x^4-24x^2+16)<0$, tj. na $\left(-2,-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$ i na $\left(\frac{2}{5}\sqrt{5},2\right)$.

Funkcija f ima četiri prevojne tačke $B(-2,125)$, $C(2,-125)$, $D(-\frac{2}{5}\sqrt{5},f(x_5))$, $E(\frac{2}{5}\sqrt{5},f(x_4))$, gde je $f\left(\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)=-\frac{19721}{125}=-157,768$

Data funkcija nema asimptota. ▶



Slika 3.18. $f(x)=x^6-12x^4+48x^2-189$



Slika 3.19. $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

3.130. Primer. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije* $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$. *(Slika 3.19.).*

Rešenje. Domen date funkcije je $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$. Nula funkcije f je $x_1=0$.

Prvi izvod funkcije f je $f'(x)=x^2\cdot\frac{x-6}{(x-2)^3}$. Nule prvog izvoda su $x_1=0$, $x_2=6$, tako da su kritične tačke funkcije f $A(0,0)$ i $B(6,27/2)$.

Funkcija f raste za $f'(x)>0$, odnosno za $(x-6)(x-2)>0$, tj. na $(-\infty,2)$ i na $(2,+\infty)$. Funkcija f opada na $(2,6)$.

Drugi izvod funkcije f je $f''(x)=\frac{24x}{(x-2)^4}$ i ima nulu za $x=0$. Znači, tačka $A(0,0)$ jeste prevojna tačka.

Iz $f''(6)>0$ sledi da je tačka $A(6,27/2)$ minimum funkcije.

Funkcija je konveksna ako je $f''(x)>0$, tj. na $(0,2)$ i na $(2,+\infty)$, a konkavna na $(-\infty,0)$.

Funkcija ima vertikalnu asimptotu $x=2$, jer je $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\infty$.

Funkcija nema horizontalnu asimptotu, jer je $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$.

Iz $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=4$, sledi da funkcija ima kosu asimptotu

$$y = x + 4. \blacktriangleright$$

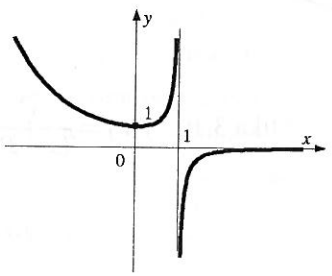
3.131. Primer. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije* $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$, *(Slika 3.20.)*

Rešenje. Domen je $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Funkcija nije ni parna ni neparna. Nema nula. Prvi izvod je $f'(x) = e^{-x}\frac{x}{(-1+x)^2}$. Tačka $A(0,1)$ je minimum funkcije. Funkcija raste na intervalu $(0,1)$ i $(1,\infty)$, a opada na intervalu $(-\infty,0)$.

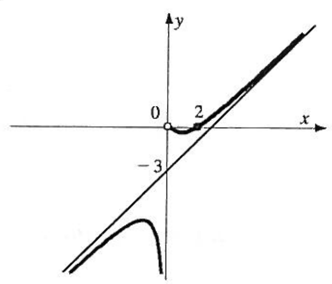
Drugi izvod je $f''(x) = -e^{-x}\frac{1+x^2}{(-1+x)^3}$.

Nema prevojnih tačaka, ali je funkcija konveksna na $(-\infty,1)$, a konkavna na $(1,\infty)$. Vertikalna asimptota je $x=1$, jer je $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{e^{-x}}{1-x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 1+}\frac{e^{-x}}{1-x} = -\infty$.

Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y=0$, kada $x\to+\infty$, jer je $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{1-x} = 0$, ali je $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{1-x} = \infty$. ▶



Slika 3.20. $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$



Slika 3.21. $f(x) = (x-2)e^{-1/x}$

3.132. Primer. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije* $f(x) = (x-2)e^{-1/x}$. *(Slika 3.21.).*

Rešenje. Data funkcija je definisana za $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Funkcija nije ni parna ni neparna. Nula je $x=2$.

Prvi izvod je $f'(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x^2}e^{-1/x}$. Kritične tačke su $A(-2,-4e^{1/2})$ i $B(1,-e^{-1})$. Funkcija f raste na $(-\infty,-2)$ i na $(1,+\infty)$, a opada na $(-2,0)$ i na $(0,1)$.

Drugi izvod je $f''(x) = \frac{5x-2}{x^4}e^{-1/x}$. Kako je $f''(-2)<0$ i $f''(1)>0$, to funkcija f ima maksimum u tački A i ima minimum u tački B.

Tačka prevoja je $C\left(2/5, -8e^{-5/2}/5\right)$.

Funkcija je konveksna na $(-\infty,-2/5)$, a konkavna na $(-2/5,0)$ i na $(0,+\infty)$.

Vertikalna asimptota je $x=0$, i važi

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(x-2)e^{-1/x} = 0, \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(x-2)e^{-1/x} = -\infty.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-2)e^{-1/x} = \pm\infty$, to funkcija nema horizontalnu asimptotu.

Kosa asimptota je $y = x-3$ kada $x\to\pm\infty$, jer je $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x}e^{-1/x} = 1$,

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left((x-2)e^{-1/x}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}(x(1-e^{-1/x})) - \lim_{x\to\pm\infty}2e^{-1/x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{1-e^{1/x}}{-\frac{1}{x}} - 2 = \lim_{t\to 0} -\frac{1-e^t}{t} - 2 = -3. \blacktriangleright$$

3.6 Približno rešavanje jednačina

U inženjerskoj matematici često treba naći rešenje jednačine oblika

$$f(x) = 0 \tag{3.25}$$

tj. treba naći broj c takav da je $f(c) = 0$, gde je f data funkcija. Na primer, jednačine $x^2-5x+6=0$; $x^3-x=0$; $\cos x = 0.4x$; $\operatorname{ctg} x = 2x$; $\operatorname{ch} 2x = \cos ecx$; možemo napisati u obliku (3.25). Neke od njih (prve dve) su algebarske, jer je odgovarajuća funkcija polinom, i tada se rešenja zovu koreni (nule) jednačine. Ostale su transcendentne jer u njima učestvuju transcendentne funkcije. Formule koje daju tačne numeričke vrednosti za rešenja postoje samo u jednostavnim slučajevima. U najviše slučajeva za rešavanje jednačine (3.25) koriste se približne metode. Među tim metodama su metoda **polovljenja,** metoda **iteracije tj. sukcesivnih aproksimacija,** metode **tangente** i **sečice** i **kombinovani** metod.

3.6.1 Metoda polovljenja

Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$, $f(a)\cdot f(b) < 0$ i neka f' ima stalan znak u (a,b). Ako je $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, onda je $c = \frac{a+b}{2}$ rešenje jednačine $f(x) = 0$. Ako je $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, izaberimo onaj zatvoreni interval među intervalima $[a,c]$, $[c,b]$ na čijim krajevima funkcija f postiže vrednosti suprotne po znaku. Novom deobom izabranog intervala na pola primenimo isto rasuđivanje. U nekom koraku ćemo dobiti ili tačno rešenje ili opadajući niz umetnutih zatvorenih intervala $[a_i,b_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$ takvih da je $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$ i $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Za približnu vrednost rešenja c možemo uzeti a_n ili b_n, i pri tom greška nije veća od $\frac{b-a}{2^n}$.

3.133. Primer *Metodom polovljenja naći približno rešenje jednačine* $x^3+x-1=0$.

Rešenje. Na intervalu $[0,1]$ funkcija $f(x)=x^3+x-1$ ispunjava uslove za primenu navedene metode. Pošto je $f(0)\cdot f(0.5)>0$ uzimamo interval $[0.5,1]$. Zatim je $f\left(\frac{0.5+1}{2}\right)=f(0.75)=0.17>0$. Dakle rešenje je u intervalu $[0.5,0.75]$. Uzmemo li da je njegova približna vrednost 0.5 ili 0.75 učinjena greška nije veća od 0,25. ▶

3.6.2 Metoda iteracije

Neka treba naći realno rešenje jednačine (3.25), gde je f neprekidna funkcija. Primetimo da je ona ekvivalentna sa jednačinom

$$x=\varphi(x). \tag{3.26}$$

(Možemo na primer uzeti $\varphi(x)=x+f(x)$). Uzmimo sada proizvoljno x_0 i zamenimo ga u desnu stranu jednačine (3.26). Dobijamo:

$$x_1=\varphi(x_0). \tag{3.27}$$

Ponavljanjem ovog postupka dolazimo do niza

$$x_2=\varphi(x_1),\quad \ldots,\quad x_n=\varphi(x_{n-1}). \tag{3.28}$$

Ako postoji $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=c$, onda se prelaskom u (3.28) na graničnu vrednost, zbog neprekidnosti funkcije φ, dobija

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\varphi\left(\lim_{n\to+\infty} x_{n-1}\right)$$

tj. $c=\varphi(c)$. Dakle, c je rešenje jednačine (3.26), a to znači i jednačine (3.25). Ono može biti izračunato po formuli (3.28) sa proizvoljnim stepenom tačnosti.

Navedena metoda je korisna ako niz (3.28) konvergira. Zato navodimo jedan uslov pod kojim je to tako.

Pretpostavimo da je c jedino rešenje jednačine (3.25) na intervalu (a,b), i da je funkcija φ koja preslikava (a,b) u (a,b) diferencijabilna, pri čemu važi

$$\left|\varphi'(x)\right|\le q<1,\ \text{za svako } x\in(a,b). \tag{3.29}$$

S obzirom da je, po pretpostavci, $c=\varphi(c)$, na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti dobijamo

$$x_n-c=\varphi(x_{n-1})-\varphi(c)=\varphi'(c_n)(x_{n-1}-c),$$

gde je c_n između x_{n-1} i c. Stoga je, na osnovu (3.29),

$$|x_n-c|=\left|\varphi'(c_n)\right||x_{n-1}-c|\le q\,|x_{n-1}-c|,$$

i ova nejednakost je tačna za svako $n=1,2,\ldots$

Imamo dakle

$$|x_n-c|\le q\,|x_{n-1}-c|\le q^2\,|x_{n-2}-c|\le\cdots\le q^n\,|x_0-c|,\ \text{tj.}$$

$$|x_n-c|\le q^n\,|x_0-c|\qquad (n=1,2,\ldots). \tag{3.30}$$

S obzirom da je $0<q<1$, iz (3.30) izlazi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=c$. Dakle, niz (x_n), definisan sa (3.28), konvergira ka rešenju c jednačine (3.25). Iz nejednakosti (3.30) dobijamo i procenu greške koja se čini kad se rešenje c jednačine (3.25) aproksimira sa x_n. Naime, kako je $|x_0-c|<b-a$, iz (3.30) izlazi $|x_n-c|\le q^n(b-a)$.
Izloženi metod za dobijanje približnog rešenja jednačine (3.25) naziva se i **metoda sukcesivnih aproksimacija.**

3.134. Primer *Naći približno rešenje jednačine* $x^3+x-1=0$ *metodom iteracije.*

Rešenje. Napišimo jednačinu u ekvivalentnom obliku $x=\frac{1}{1+x^2}=\varphi(x)$. Imamo da $\varphi:\mathbb{R}\to(0,1)\subset\mathbb{R}$. Zatim je $|\varphi'(x)|=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\le q<1$ za svako $x\in(0,1)$ tako da su ispunjeni uslovi za primenu metoda iteracije. Na osnovu toga niz $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n^2}$. konvergira ka jedinstvenom rešenju jednačine. Uzmimo na primer $x_0=1$. Onda izračunavamo: $x_1=0.500, x_2=0.800, x_3=0.610, x_4=0.729, x_5=0.653, x_6=0.701,\ldots$Svaki član niza se može uzeti za približno rešenje. ▶

3.6.3 Njutnova metoda tangente

Neka se rešenje c jednačine (3.25) nalazi u $[a,b]$, gde $f'(x)$ i $f''(x)$ imaju stalan znak, na primer pozitivan. Neka je i $f(b)>0$. Uzmimo tangentu u tački $B(b,f(b))$ (sl.3.22.). Njena jednačina glasi:

$$y-f(b)=f'(b)(x-b).$$

Tangenta seče x osu u tački $b_1=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$.

Ako sada uzmemo tangentu u tački $(b_1,f(b_1))$ onda ona seče x osu u tački $b_2=b_1-\dfrac{f(b_1)}{f'(b_1)}$, itd. Na ovaj način dobili smo niz b_n definisan sa

$$b_{n+1}=b_n-\frac{f(b_n)}{f'(b_n)}$$

čiji članovi aproksimiraju rešenje c. Formula za procenu greške aproksimacije je

$$|c-b_n| \leq \frac{|f(b_n)|}{m},$$

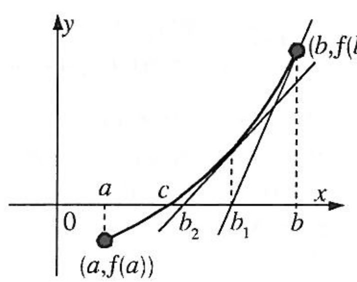
gde je m najmanja vrednost funkcije $f'(x)$ u $[a,b]$.

3.135. Primer. *Izračunavanje kvadratnog korena. Nađimo približnu vrednost kvadratnog korena broja k.*

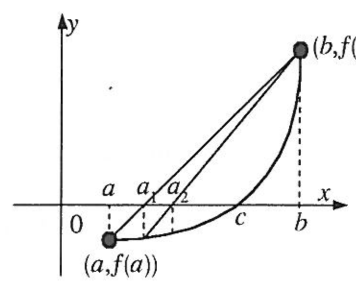
Rešenje. Iz uslova $x=\sqrt{k}$, sledi $x^2-k=0$. Zato uzmimo funkciju $f(x)=x^2-k$. Pošto je $f'(x)=2x$ to je za niz b_n približnih vrednosti broja $\sqrt{k}$, ispunjeno

$$b_{n+1}=b_n-\frac{b_n^2-k}{2b_n}=0.5\left(b_n+\frac{k}{b_n}\right).$$

Za $k=2$, $b_0=1$, dobijamo $b_1=1.500$, $b_2=1.416$, $b_3=1.414$, koji aproksimiraju $\sqrt{2}$. ▶



Slika 3.22.



Slika 3.23.

3.6.4 Metoda sečice

Neka se rešenje c jednačine (3.25) nalazi u $[a,b]$, gde $f'(x)$ i $f''(x)$ imaju stalan znak, na primer pozitivan. Neka je i $f(a)<0$. Uzmimo sečicu određenu tačkama $A(a,f(a))$ i $B(b,f(b))$ (sl.3.23.). Njena jednačina glasi:

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Sečica onda seče x osu u tački $a_1=a-\dfrac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$. Ako sada uzmemo sečicu

određenu tačkama $(a_1,f(a_1))$ i $(b,f(b))$ onda ona seče x osu u tački $a_2=a_1-\dfrac{(b-a_1)f(a_1)}{f(b)-f(a_1)}$, itd. Na ovaj način dobili smo niz a_n definisan sa

$$a_0=a, \qquad a_{n+1}=a_n-\frac{(b-a_n)f(a_n)}{f(b)-f(a_n)},$$

čiji članovi aproksimiraju rešenje c. Formula za grešku aproksimacije je

$|a_n-c|\leq\dfrac{f(a_n)}{m}$, gde je m najmanja vrednost funkcije f' na $[a,b]$.

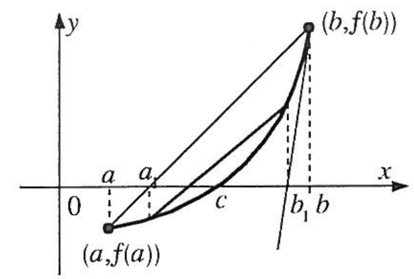
3.136. Primer *Izračunati rešenje c jednačine $x^2-1=0$ na zatvorenom intervalu* $[0,1]$.

Rešenje. Očigledno je $c=1$. Sada ćemo primeniti metode sečice. Funkcija f ispunjava uslove navedene u opisanom metodu; neprekidna je na $[0,2]$, izvodi $f'(x), f''(x)$ su pozitivni na $(0,2)$ i $f(0)\cdot f(2)<0$. Imamo da je $a=0$.

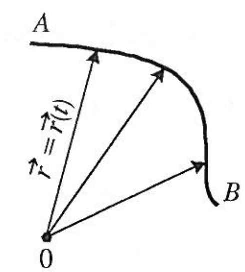
Za $n=1$ rekurentna formule za niz a_n daje: $a_1=0-\dfrac{(2-0)\cdot(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}$.

Za $n=2$ dobijamo $a_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{3-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\dfrac{4}{5}=1-\dfrac{1}{5}$, približno rešenje, gde učinjena greška po apsolutnoj vrednosti nije veća od 0.2. ▶

Metoda sečice se ređe koristi u praksi od Njutnove metode tangente, zato što je ovaj poslednji znatno efikasniji.



Slika 3.24.



Slika 3.25.

3.6.5 Kombinovana metoda.

Metod se sastoji u konstrukciji dva niza (a_n) i (b_n) koji sa gornje i donje strane aproksimiraju traženo rešenje c (sl.3.24.).

Niz (b_n) je isti kao kod tangentnog metoda, tj. definisan je sa

$$b_0 = b, \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)} \quad n = 0, 1, ...$$

Niz (a_n) definisan je pomoću jednakosti

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{(b_n - a_n) f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} \quad n = 0, 1, ...$$

Ovaj niz (a_n) razlikuje se od niza definisanog u metodu sečice po tome što je broj b zamenjen brojem b_n koji je sve bliži broju c što je n veće.

Za ovako definisane nizove važi $a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < c < \cdots b_n < \cdots < b_2 < b_1 < b$,

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = c.$$

Pored toga što kombinovani metod aproksimira rešenje c i sa gornje i sa donje strane, on je koristan i zbog toga što je izrazom $|b_n - a_n|$ direktno procenjena greška.

3.137. Primer. *Izračunati rešenje c jednačine* $x^2 - 1 = 0$ *na zatvorenom intervalu* $[0, 1]$.

Rešenje. Za $n = 1$ formule za nizove a_n i b_n daju $a_1 = 0 - \frac{(-1) \cdot 2}{4} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $b_1 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$. Za $n = 2$ dobijamo $a_2 = 1 - \frac{1}{14}$ i $b_2 = 1 + \frac{1}{40}$, koji aproksimiraju rešenje $c = 1$ sa apsolutnom greškom koja nije veća od 0.1, dakle sa većom preciznošću nego metodom sečice. ▶

3.7 Vektor-funkcija skalarnog argumenta

3.7.1 Hodograf vektor-funkcije

3.138. Definicija *Vektor* $\vec{r}$ *se zove* ***vektor-funkcija*** *skalarnog argumenta t ako svakom skalaru t intervala* (α, β) *odgovara vektor* $\vec{r}(t)$.

To se simbolično zapisuje kao $\vec{r} = \vec{r}(t)$.
Ako je $\vec{r}$ vektor- funkcija skalarnog argumenta t $\vec{r} = \vec{r}(t)$,
onda su koordinate x, y, z vektora $\vec{r}$ takođe funkcije argumenta t:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

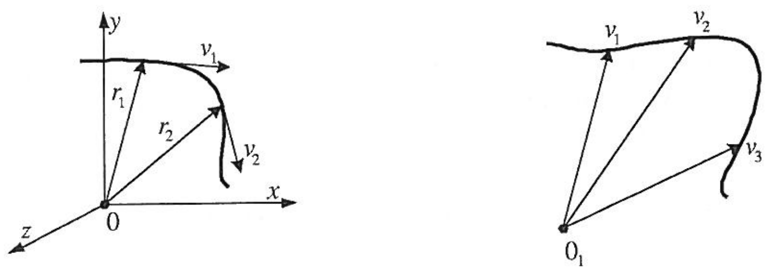
Obrnuto, ako su koordinate vektora $\vec{r}$ funkcije argumenta t, onda je $\vec{r}$ vektor funkcija:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} = (x(t), y(t), z(t)).$$

Znači, vektor-funkcija $\vec{r}(t)$ je data, ako i samo ako su date tri skalarne funkcije $x(t), y(t), z(t)$.

3.139. Definicija *Ako se za početak vektora* $\vec{r}(t)$ *uzme fiksirana tačka O prostora, onda se* ***hodografom*** *vektor-funkcije* $\vec{r}(t)$ *skalarnog argumenta zove geometrijsko mesto tačaka, koje opisuje kraj vektora* $\vec{r}(t)$ *pri promeni argumenta t (sl. 3.25.).*

Hodograf vektora $\vec{r} = \vec{r}(t)$ pokretne tačke je putanja (trajektorija) L kretanja te tačke. Hodograf brzine $\vec{v} = \vec{v}(t)$ te tačke je neka druga linija L_1 (sl.3.26.). Tako, ako se materijalna tačka kreće po kružnici konstantnom brzinom $|\vec{v}| = const$, to je njen hodograf brzine takođe kružnica sa centrom u tački O_1 i poluprečnikom, jednakim $|\vec{v}|$.



Slika 3.26.

3.140. Primer *Konstruisati hodograf vektor-funkcije:* $\vec{r}(t) = t \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j} + t^2 \cdot \vec{k} = (t, t, t^2)$.

Rešenje. I način: Konstrukcija se može izvesti iz tačaka, sastatavljajući tablicu:

t	0	1	2	3	4
$\vec{r}(t)$	(0,0,0)	(1,1,1)	(2,2,4)	(3,3,9)	(4,4,16)

II način: Možemo postupiti i ovako: Ako sa x, y, z označimo koordinate vektora $\vec{r}$, onda imamo $x = t$, $y = t$, $z = t^2$. Eliminacijom iz tih jednačina parametar t, dobijamo jednačine površi $y = x$, $z = x^2$, čiji je presek linija L, koja je po definiciji hodograf vektor-funkcije $\vec{r}(t)$. ▶

3.141. Primer *Šta je hodograf vektor-funkcije:* $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$?

Rešenje. Hodograf date vektor-funkcije predstavlja skup tačaka $M(x, y, z) = M(x, y, 0)$ za koji je $x^2 + y^2 = a^2$ i $z = 0$; odnosno, to je krug u ravni xOy, sa centrom u koordinatnom početku O i poluprečnikom $r = a$. Jednačina tog kruga može se napisati i u obliku $|\vec{r}(t)| = a$. ▶

3.7.2 Granična vrednost i neprekidnost vektor funkcije

Neka je vektor- funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$ definisana u nekoj okolini vrednosti t_0 argumenta t, izuzev možda ne u samoj tački t_0.

3.142. Definicija *Konstantni vektor* $\vec{a}$ *je granična vrednost vektor-funkcije* $\vec{r}(t)$ *kad* $t \to t_0$, *što se simbolično zapisuje kao* $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, *ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da je*

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon,$$

za sve $t \neq t_0$, *za koje je* $|t - t_0| < \delta$.

Geometrijski to znači, da vektor $\vec{r}(t)$ kad $t \to t_0$, teži vektoru $\vec{a}$ kako po dužini, tako i po smeru. Ako je pri tom $\vec{a} = \vec{0}$, onda se kaže da je vektor-funkcija $\vec{r}(t)$ beskonačno mala, kad $t \to t_0$.

3.143. Primer *Pokazati da je vektor-funkcija* $\vec{r}(t) = t\cdot\vec{i} + \sin t\cdot\vec{j} = (t, \sin t, 0)$ *beskonačno mala vektor-funkcija kad* $t \to 0$.

Rešenje. Imamo $\left|\vec{r}(t) - \vec{0}\right| = \left|t\cdot\vec{i} + \sin t\cdot\vec{j}\right| \leq |t| + |\sin t| \leq 2|t|$, odakle sledi, da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, tako da kad god je $t \neq 0$ i $|t| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ bude $|\vec{r}(t)| < \varepsilon$. Saglasno definiciji 1, to znači da je $\vec{r}(t)$ beskonačno mala vektor funkcija kad $t \to 0$. ▶

3.144. Definicija *Vektor-funkcija* $\vec{r} = \vec{r}(t)$, *definisana u nekoj okolini tačke* t_0, *naziva se neprekidnom u toj tački, ako je*

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Drugim rečima, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ je neprekidna u t_0, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako, da za sve t, za koje je $|t - t_0| < \delta$ bude $|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)| < \varepsilon$.
Za vektor-funkciju $\vec{r} = \vec{r}(t)$ se kaže da je neprekidna na nekom intervalu, ako je ona neprekidna u svakoj tački tog intervala.

3.7.3 Izvod vektor funkcije

Neka je vektor-funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$ definisana za sve t iz intervala (t_0, t_1). Uzmimo t iz intervala (t_0, t_1) i neka je Δt takvo da $t + \Delta t \in (t_0, t_1)$; nađimo zatim odgovarajući priraštaj $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ vektor-funkcije $\vec{r}(t)$ i razmotrimo količnik $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

3.145. Definicija *Ako kad* $\Delta t \to 0$, *količnik* $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ *ima graničnu vrednost, onda se ona zove izvod vektor-funkcije* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *u tački t i označava se sa* $\vec{r}'(t)$ *(a takođe i sa* $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ *ili* $\dot{\vec{r}}(t)$*).*

Dakle

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

U tom slučaju se vektor-funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$ naziva diferencijabilnom. Vidimo da je $\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ ako postoji, vektor. Vektor funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$ je diferencijabilna ako i samo ako su funkcije $x(t), y(t)$ i $z(t)$ diferencijabilne kao skalarne funkcije i pri tom je ispunjena jednakost:

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\cdot\vec{i} + y'(t)\cdot\vec{j} + z'(t)\cdot\vec{k} = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right).$$

Za izvod skalarnog i vektorskog proizvoda vektor-funkcija važe u potpunosti ista pravila kao za proizvod skalarnih funkcija. Zato navodimo:

3.146. Teorema *Ako su* $\vec{r_1} = \vec{r_1}(t)$ *i* $\vec{r_2} = \vec{r_2}(t)$ *diferencijabilne vektor- funkcije i ako je K konstanta (skalar), tada je:*

a) $(\vec{r_1}(t) + \vec{r_2}(t))' = \vec{r_1}'(t) + \vec{r_2}'(t)$;

b) $(K\cdot\vec{r_1}(t))' = K\cdot\vec{r_1}'(t)$;

c) $(\vec{r_1}(t)\cdot\vec{r_2}(t))' = \vec{r_1}'(t)\cdot\vec{r_2}(t) + \vec{r_1}(t)\cdot\vec{r_2}'(t)$;

d) $(\vec{r_1}(t)\times\vec{r_2}(t))' = \vec{r_1}'(t)\times\vec{r_2}(t) + \vec{r_1}(t)\times\vec{r_2}'(t)$.

3.147. Primer *Neka je* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *vektor-funkcija takva da je* $|\vec{r}(t)| = K > 0$. *Onda su vektori* $\vec{r}(t)$ *i* $\vec{r}'(t)$ *međusobno ortogonalni za svako t iz oblasti definisanosti vektor funkcije* $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Rešenje. Iz uslova $|\vec{r}(t)| = K > 0$ sledi da je $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t) = K^2$ i onda prema svojstvu **c)** Teoreme 3.146 diferenciranjem leve i desne strane, sledi $2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0$, tj $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$, što je i trebalo dokazati. ▶

3.7.4 Prirodni triedar

Neka je L hodograf vektor-funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Uočimo jednu tačku M hodografa koja odgovara vrednosti skalara t, tj. čiji je vektor položaja $\vec{r} = \vec{r}(t)$ u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$. Hodograf, ili kriva L vektor-funkcije

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$$

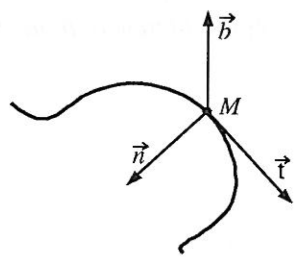
neka je orijentisan u smeru rastenja skalara t, i pretpostavimo da je vektor- funkcija $\vec{r}\,(t)$ bar tri puta diferencijabilna u tački t. Stavimo

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|}.$$

To je jedinični vektor čiji je nosač **tangenta** krive L u tački M. Vektor $\vec{\tau}$ se zove i jedinični vektor na L u tački M.
Na osnovu prethodnog primera prvi izvod $\vec{\tau}\,'$ vektora $\vec{\tau}$ ortogonalan je na $\vec{\tau}$ i zato isti pravac ili smer ima i vektor

$$\frac{\vec{\tau}\,'}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|} = K\vec{n},$$

gde je K njegov intenzitet, a $\vec{n}$ jedinični vektor. Nosač vektora $\vec{n}$ zove se **glavna normala** krive L u tački M. Vektor $\vec{n}$ se zove i jedinični vektor glavne normale u tački M. Vektorski proizvod $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$, jediničnih vektora $\vec{\tau}$ i $\vec{n}$ takođe je jedinični vektor. Njegov nosač zove se **binormala** krive L u tački M. Vektor $\vec{b}$ se zove i jedinični vektor binormale u tački M.
Uvedeni **ortogonalni triedar** jediničnih vektora $\vec{\tau}, \vec{n}$ i $\vec{b}$ određuje i ove tri ravni:



Slika 3.27.

oskulatornu ravan koja sadrži vektore $\vec{\tau}$ i $\vec{n}$ i leži normalno na binormali,
normalnu ravan koja sadrži vektore $\vec{b}$ i $\vec{n}$ i leži normalno na tangenti, i
rektifikacionu ravan koja sadrži vektore $\vec{b}$ i $\vec{\tau}$ i leži normalno na glavnoj normali.
Svi navedeni elementi vezani za tačku M hodografa ili krive L, čine **prirodni triedar** (ili **fundamentalni**, osnovni triedar) krive L koji odgovara tački M (sl.3.27.).

Ako vektor $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ ima neprekidan izvod $\vec{r}\,'(t)$ u okolini tačke t_0 i, ako je pored toga drugi izvod $\vec{r}\,''(t)$ takav, da je $\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \neq \vec{0}$, onda u tački $t = t_0$ postoji **oskulatorna ravan** na krivu $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$, čija je vektorska jednačina

$$\left(\vec{\rho} - \vec{r}\,(t_0)\right)\cdot\left(\vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0)\right) = 0, \tag{3.31}$$

gde je $\vec{\rho} = \vec{\rho}\,(t)$ — radijus vektor tekuće tačke ravni.

3.148. Primer. *Napisati jednačinu oskulatorne ravni u tački $t = 0$ zavojne krive*

$$\vec{r} = a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j} + ht\,\vec{k}.$$

Rešenje. Nalazimo vrednosti datog vektora $\vec{r}$ i njegovih izvoda $\vec{r}\,'$ i $\vec{r}\,''$ u tački $t = 0$:

$$\vec{r}\,(0) = a\cdot\vec{i},\ \vec{r}\,'(0) = a\cdot\vec{j} + h\cdot\vec{k},\ \vec{r}\,''(0) = -a\cdot\vec{i}.$$

Onda je

$$\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0) = -ah\cdot\vec{j} + a^2\cdot\vec{k}.$$

Vektorska jednačina oskulatorne ravni sada glasi

$$\left(\vec{\rho} - \vec{r}\,(0)\right)\cdot\left(\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0)\right) = 0 \quad \text{ili} \quad \left(\vec{\rho} - \vec{r}\,(0)\right)\cdot\left(-ah\cdot\vec{j} + a^2\cdot\vec{k}\right) = 0.$$

Pošto je radijus vektor tekuće tačke oskulatorne ravni dat sa $\rho = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$, to se prelaskom na koordinatni zapis dobija jednačina tražene ravni u obliku: $hy - az = 0$. ▶

3.7.5 Krivine linije

Kriva u prostoru vrši dvojaka odstupanja: od pravolinijskog oblika (izvijanje u odnosu na tangentu) i od ravnog oblika (izvijanje u odnosu na oskulatornu ravan). Ta odstupanja mogućno je meriti. Zato imamo:

Prvo odstupanje zove se **prva krivina (fleksija)**. Izvešćemo formulu za izračunavanje prve krivine. U stvari odstupanje krive od tangente dato je promenom jediničnog vektora $\vec{\tau}$ tangente kada se tačka M kreće po krivoj L. Tu i leži opravdanje ove definicije: prva krivina ili fleksija krive L u tački M jeste intenzitet vektora $\frac{\vec{\tau}\,'}{\left|\vec{r}\,'\right|}$, tj. to je broj K definisan vektorskom jednakošću

$$\frac{\vec{\tau}\,'}{\left|\vec{r}\,'\right|} = K\vec{n},$$

gde se vektor $K\vec{n}$ zove još i vektor prve krivine. Kako je $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$, mora biti

$$K\vec{b} = \vec{\tau} \times \frac{\vec{\tau}\,'}{\left|\vec{r}\,'\right|} = m\left(\vec{\tau} \times \vec{\tau}\,'\right), \qquad m = \frac{1}{\left|\vec{r}\,'\right|}.$$

S obzirom na jednakosti: $\frac{\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}\,'\right|} = \vec{\tau}$ i $\vec{\tau}\,' = m'\vec{r}\,' + m\vec{r}\,''$ imamo

$$K\vec{b} = m^2\left(\vec{r}\,' \times \left(m'\vec{r}\,' + m\vec{r}\,''\right)\right) = m^3\left(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\right), \text{ te je}$$

$$K = m^3\left|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\right| = \frac{\left|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\right|}{\left|\vec{r}\,'\right|^3}. \tag{3.32}$$

Poslednja formula omogućava izračunavanje prve krivine krive (hodografa) vektor-funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ u svakoj njenoj tački t.

3.149. Primer. *Izračunati prvu krivinu zavojne krive:* $\vec{r} = a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j} + ht\,\vec{k}$.

Rešenje. Pošto je $\vec{r}'(t) = -a\sin t \cdot \vec{i} + a\cos t \cdot \vec{j} + h\vec{k}$, $\vec{r}''(t) = -a\cos t \cdot \vec{i} - a\sin t \cdot \vec{j}$, to je

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = ah\sin t \cdot \vec{i} - ah\cos t \cdot \vec{j} + a^2 \cdot \vec{k}.$$

Dakle,

$$\left|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\right| = a\sqrt{a^2+h^2}, \quad \left|\vec{r}'(t)\right| = \sqrt{a^2+h^2}.$$

Sada je prema formuli (1)

$$K = \frac{1}{R} = \frac{a}{a^2+h^2} \quad \text{ili} \quad R = \frac{a^2+h^2}{a} = const.$$

Znači, zavojna kriva ima konstantan poluprečnik prve krivine. ▶

Ako kriva L pripada ravni Oxy i predstavlja grafik funkcije $y = y(x), x \in [a,b]$ (jedna njena parametrizacija je $x = t, y = y(t), t \in [a,b]$), onda formula (3.32) postaje:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.33}$$

Tada se krug

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = R^2$$

zove **krug prve krivine** krive L u tački $M(x,y)$ sa poluprečnikom krivine R. Koordinate centra ξ i η tog kruga se određuju po formulama

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Geometrijsko mesto centara (ξ,η) krugova krivine krive L zove se **evoluta** krive L. Ako evolutu označimo sa E, onda su njene tangente upravo normale krive L. Tada se kriva L zove **evolventa** krive E.

3.150. Primer. *Naći krivinu i poluprečnik krivine krive* $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *u njenoj proizvoljnoj tački.*

Rešenje. Najpre nalazimo prvi i drugi izvod: $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $y'' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Onda formula (3.33) daje

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\left(1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1}{y^2}. \quad \text{Znači} \quad K = \frac{1}{y^2}, R = y^2. ▶$$

3.151. Primer *Odrediti evolutu parabole* $y = x^2$.

Rešenje. Najpre je $y' = 2x$ i $y'' = 2$. Onda iz formula

$$\xi = x - \frac{2x(1+4x^2)}{2} = -4x^3, \quad \eta = x^2 + \frac{1+4x^2}{2} = \frac{6x^2+1}{2},$$

za nalaženje koordinata centra kruga krivine, eliminacijom parametra x dobijamo

$$\left(\frac{\xi}{4}\right)^2 = \left(\frac{2\eta-1}{6}\right)^3, \quad \text{ili} \quad \xi = \pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\eta - \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

što predstavlja evolutu parabole $y = x^2$. ▶

Druga krivina (torzija) krive L u tački M predstavlja odstupanje od ravnog oblika, tj. od oskulatorne ravni. Kako je $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$, prirodno je da se torzija iskazuje promenom jediničnog vektora $\vec{b}$ binormale kada se tačka M kreće po krivoj L. Uzimanjem prvog izvoda navedene jednakosti, dobijamo

$$\vec{b}' = \vec{\tau}' \times \vec{n} + \vec{\tau} \times \vec{n}' \quad \text{ili} \quad \vec{b}' = \vec{\tau} \times \vec{n}',$$

jer je vektor $\vec{\tau}'$ kolinearan sa $\vec{n}$. Deljenjem dobijene relacije sa $\left|\vec{r}'\right|$ imamo

$$m\vec{b}' = m(\vec{\tau} \times \vec{n}'),$$

gde smo kao i kod nalaženja formule za prvu krivinu, skraćenja radi stavili $m = \frac{1}{|\vec{r}'|}$. Pošto su parovi vektora $\vec{n}$ i $\vec{n}'$ i $\vec{n}$ i $\vec{\tau}$ uzajamno ortogonalni, to znači da je vektor $\vec{\tau} \times \vec{n}'$ kolinearan sa $\vec{n}$. Zato imamo

$$m\vec{b}' = \varkappa\vec{n}.$$

Realan broj $\varkappa$ zove se **druga krivina (torzija)** krive L u tački M (vektor $\varkappa\vec{n}$ se zove vektor druge krivine). Pošto je dalje $\vec{n} = \frac{m}{K}\vec{\tau}'$ (K je prva krivina), to je

$$\vec{n}' = \left(\frac{m}{K}\right)'\vec{\tau}' + \frac{m}{K}\vec{\tau}''.$$

Zato je

$$\varkappa\vec{n} = m\left(\vec{\tau}\times\vec{n}'\right) = m\left(\vec{\tau}\times\left(\left(\frac{m}{K}\right)'\vec{\tau}' + \frac{m}{K}\vec{\tau}''\right)\right).$$

Skalarnim množenjem leve i desne strane poslednje jednakosti sa $\vec{n} = \frac{m}{K}\vec{\tau}'$, dobijamo

$$\varkappa = m\frac{m}{K}\vec{\tau}'\left(\vec{\tau}\times\left(\left(\frac{m}{K}\right)'\vec{\tau}' + \frac{m}{K}\vec{\tau}''\right)\right) = \frac{m^3}{K^2}\vec{\tau}'\left(\vec{\tau}\times\vec{\tau}''\right) = -\frac{m^3}{K^2}\vec{\tau}\left(\vec{\tau}'\times\vec{\tau}''\right),$$

tj. $\dfrac{1}{T} = \varkappa = -\dfrac{m^3}{K^2}\vec{\tau}\left(\vec{\tau}'\times\vec{\tau}''\right)$.

Izražavajući sada veličine $\vec{\tau}, \vec{\tau}', \vec{\tau}''$ i K preko $\vec{r}$ dobijamo formulu za izračunavanje torzije

$$\frac{1}{T} = \varkappa = -\frac{\vec{r}'\cdot\left(\vec{r}''\times\vec{r}'''\right)}{\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|^2}.$$

Recipročna vrednost torzije zove se poluprečnik torzije i označava se sa T.

3.152. Primer. *Naći torziju zavojne krive* $\vec{r} = a\cos t\cdot\vec{i} + a\sin t\cdot\vec{j} + ht\vec{k}$.

Rešenje. Najpre nalazimo izvode datog vektora $\vec{r}' = -a\sin t\cdot\vec{i} + a\cos t\cdot\vec{j} + h\vec{k}$, $\vec{r}'' = -a\,\mathrm{ctg}\,t\cdot\vec{i} - a\sin t\cdot\vec{j}$ $\vec{r}''' = a\sin t\cdot\vec{i} - a\cos t\cdot\vec{j}$. Sada za mešoviti proizvod tih vektora dobijamo

$$\vec{r}'\cdot\left(\vec{r}''\times\vec{r}'''\right) = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2h.$$

S obzirom da je $\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|^2 = a^2\left(a^2+h^2\right)$ to je $\dfrac{1}{T} = \varkappa = -\dfrac{a^2h}{a^2\left(a^2+h^2\right)} = -\dfrac{h}{a^2+h^2}$, znači torzija zavojne krive je ista u svim tačkama. ▶

Glava 4

Neodređeni integral

4.1 Osnovni pojmovi i metodi

4.1. Definicija. *Funkcija F je* **primitivna funkcija** *za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na intervalu (a,b) ako važi*

$$(\forall x\in(a,b)) \qquad F'(x) = f(x). \tag{4.1}$$

4.2. Definicija. **Neodređeni integral** *funkcije f na intervalu $[a,b]$, je skup svih primitivnih funkcija za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Neodređeni integral funkcije f označavamo sa $\int f(x)\,dx$. Izraz „dx" označava diferencijal promenljive x. Fundamentalna je činjenica da svaka neprekidna funkcija na intervalu ima primitivnu funkciju na tom intervalu. Iz Lagranžove teoreme sledi da se bilo koje dve primitivne funkcije koje odgovaraju jednoj neprekidnoj funkciji razlikuju najviše za konstantu. Zbog toga, ako važi jednakost (4.1), pisaćemo u nastavku

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{4.2}$$

gde je C proizvoljna konstanta.

(Uopšte, u celoj ovoj glavi C označava proizvoljnu konstantu.)

Tablica osnovnih neodređenih integrala se može dobiti iz odgovarajuće tablice prvih izvoda i primenom osnovnih pravila za izvod funkcije nad njihovim prirodnim definicionim skupovima. Ostavljamo čitaocu da odredi *najveće* skupove u $\mathbb{R}$ na kojima ove jednakosti važe.

Tablica osnovnih neodređenih integrala

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1;$
- $\int x^{-1} dx = \ln|x| + C;$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
- $\int \cos x dx = \sin x + C;$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C;$
- $\int e^x dx = e^x + C;$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0, \ a \neq 1;$
- $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0;$
- $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \ a > 0;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \ a > 0;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ a > 0.$

Pokazaćemo samo drugu jednakost. Naime, za $x > 0$ je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, a takođe za $x < 0$ važi $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$. Zato za $x \neq 0$ važi $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

4.2 Osnovne osobine neodređenog integrala

Na osnovu osobina prvog izvoda lako se pokazuje da je integral linearna operacija, tj. da važe sledeće dve jednakosti:

- $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx;$ pod uslovom da je konstanta C različita od nule.
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

4.3. Primer. *Korišćenjem linearnosti i tablice osnovnih neodređenih integrala izračunati:*

a) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{3} z - 3\sqrt{z} \right) dz;$ b) $\int (1+x) \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} \right) dx;$

c) $\int \frac{x^4 - 3x^3 + 2x + 1}{x^3} dx;$ d) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx.$

Rešenja.

a) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{3} z - 3\sqrt{z} \right) dz = \int \left(z^{-1/2} + z/3 - 3z^{1/2} \right) dz = \frac{z^{1/2}}{1/2} + \frac{z^2}{6} - 3\frac{z^{3/2}}{3/2} + C$

$$= 2z^{1/2} + \frac{z^2}{6} - 2z^{3/2} + C.$$

b) $\int (1+x) \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} \right) dx = \int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + x^{3/2} - x^{5/3} \right) dx$

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/3}}{5/3} + \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^{8/3}}{8/3} + C = \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{3x^{5/3}}{5} + \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{3x^{8/3}}{8} + C.$$

c) $\int \frac{x^4 - 3x^3 + 2x + 1}{x^3} dx = \int (x - 3 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.$

d) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^{1/2}} dx = \int (x^{3/2} - 2x^{1/2} + x^{-1/2}) dx$

$$= \frac{2x^{5/2}}{5} - 4\frac{x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + C. \ \blacktriangleright$$

4.3 Smena u neodređenom integralu

Oblik podintegralne funkcije i pravilo za izvod složene funkcije često dozvoljava svođenje datog integrala na jednostavniji integral. Na primer, ako je funkcija ϕ diferencijabilna i monotona na posmatranom intervalu, tada integral

$$\int f(\phi(x))\phi'(x) dx \quad \text{smenom} \quad t = \phi(x), \quad dt = \phi'(x) dx$$

postaje $\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int f(t) dt.$

4.4. Primer. *Izračunati:*

a) $\int (x^3 + 3)^2 3x^2 dx;$ b) $\int x^2 \sqrt[3]{x^3 + 3} dx;$ c) $\int \sqrt{x^2 - 3x^4} dx;$ d) $\int \frac{(2 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx.$

Rešenja. Integrali **a)** i **b)** rešavaju se smenom $t = x^3 + 3$, $dt = 3x^2 dx$.

a) $\int (x^3 + 3)^2 3x^2 dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x^3 + 3)^3}{3} + C.$

b) $\int x^2 \sqrt[3]{x^3 + 3} dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 3)^{1/3} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \int t^{1/3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{4/3}}{4/3} + C = \frac{(x^3 + 3)^{4/3}}{4} + C.$

c) Smenom $t = 1 - 3x^2$, $dt = -6x dx$, dobija se

$\int \sqrt{x^2 - 3x^4} dx = \int x\sqrt{1 - 3x^2} dx = \frac{-1}{6} \int t^{1/2} dt = \frac{-1}{9} t^{3/2} + C = \frac{-1}{9} (1 - 3x^2)^{3/2} + C.$

d) Smenom $t = 2 + \sqrt{x}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, dobija se $\int \frac{(2 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx = 2 \int t^3 dt = 2\frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{x})^4 + C.$ $\blacktriangleright$

4.5. Primer. *Izračunati:*

a) $\int (e^{-x}+1)\,dx$; b) $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$; c) $\int \frac{dx}{e^x+1}$; d) $\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$.

Rešenja.

a) Koristeći smenu $t=-x$, $dt=-dx$, dobija se $\int (e^{-x}+1)\,dx = -\int e^{-x}(-dx)+x = -e^{-x}+x+C$.

b) Smenom $t=-1/x$, $dt=dx/x^2$, dobija se $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx = \int e^t\,dt = e^t+C = e^{-1/x}+C$.

c) Ako brojilac i imenilac podintegralne funkcije pomnožimo sa e^{-x} dobija se

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{-e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x})+C.$$

(Korišćena je smena $t=1+e^{-x}$, $dt=-e^{-x}\,dx$ i činjenica da je $1+e^{-x}>0$ za svako x.)

d) Smenom $t=e^x+1$, $dt=e^x\,dx$, dobija se

$$\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx = \int t^{1/2}\,dt = \frac{t^{3/2}}{3/2}+C = 2\frac{(e^x+1)^{3/2}}{3}+C. \ \blacktriangleright$$

4.6. Primer. *Izračunati:*

a) $\int (\sin 2x+\cos 3x)\,dx$; b) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$; c) $\int \operatorname{tg} x\,dx$; d) $\int e^{2\sin 3x}\cos 3x\,dx$;

e) $\int e^x\cos e^x\,dx$; f) $\int x^2\operatorname{ctg} x^3\,dx$; g) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x}\,dx$; h) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

Rešenja.

a) $\int (\sin 2x+\cos 3x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,d(2x)+\frac{1}{3}\int \cos(3x)\,d(3x) = -\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+C$.

b) Smenom $t=\sin x$, $dt=\cos x dx$, dobija se $\int \sin^3 x\cos x\,dx = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4}+C = \frac{\sin^4 x}{4}+C$.

c) Smenom $t=\cos x$, $dt=-\sin x dx$, dobija se

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t|+C = -\ln|\cos x|+C.$$

d) $\int e^{2\sin 3x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{6}\int e^{2\sin 3x}6\cos 3x\,dx = \frac{1}{6}e^{2\sin 3x}+C$. (Koristili smo smenu $t=2\sin 3x$, $dt=6\cos 3x dx$.)

e) $\int e^x\cos e^x\,dx = \int \cos e^x\,d(e^x) = \sin e^x+C$.

f) Prvo se koristi smena $t=x^3$, $dt=3x^2$, i dobija $\int x^2\operatorname{ctg} x^3\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\cos t\,dt}{\sin t}$.

Dalje smena $u=\sin t$, $du=\cos t$, daje

$$\int x^2\operatorname{ctg} x^3 x\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u|+C = \frac{1}{3}\ln|\sin(x^3)|+C.$$

g) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x}\,dx = \int \left(1+\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx = x+\ln|\sin x|+C$.

h) $\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x-\frac{1}{\sin x}+C. \ \blacktriangleright$

4.7. Primer. *Izračunati:*

a) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{4+9x^2}\right)dx$; b) $\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$; c) $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$;

d) $\int \frac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+1}\,dx$; e) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; f) $\int \frac{(2-x)\,dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

Rešenja.

a) $$\int \left(\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{4+9x^2}\right)dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}$$
$$= \arcsin\frac{x}{3}+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{2}\right)+C.$$

U prvom integralu koristili smo smenu $t=x/3$, $dt=dx/3$, a u drugom $s=3x/2$, $ds=3dx/2$.

b) Smenom $t=x^3$, $dt=3x^2\,dx$, dobija se $\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t+C = \arcsin x^3+C$.

c) Smenom $t=x^2$, $dt=2x\,dx$, dobija se $\int \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$.

d) $$\int \frac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2x(x^2+1)-3(x^2+1)-2x+3+2x}{x^2+1}\,dx$$
$$= \int (2x-3+\frac{3}{x^2+1})\,dx = x^2-3x+3\operatorname{arctg} x+C.$$

e) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \operatorname{arctg} e^x+C$.

f) Koristi se smena $t=4x-x^2$, $dt=(4-2x)\,dx=2(2-x)\,dx$, i dobija se

$$\int \frac{(2-x)\,dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{4x-x^2}+C. \ \blacktriangleright$$

4.8. Primer. *Izračunati:*

a) $\int \frac{dx}{x^2+10x+31}$; b) $\int \frac{dx}{25-8x+x^2}$; c) $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$;

d) $\int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2+6x+13}$; e) $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{27+6x-x^2}}$; f) $\int \frac{(x-4)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

Rešenja. U ovim zadacima ćemo kvadratni trinom iz imenioca ax^2+bx+c svesti na oblik Au^2+B, gde su $A\neq 0$ i B konstante.

a) $$\int\frac{dx}{x^2+10x+31}=\int\frac{dx}{(x^2+10x+25)+6}=\int\frac{dx}{(x^2+10x+5^2)+6}$$
$$=\int\frac{dx}{(x+5)^2+6}=\int\frac{dx}{((x+5)^2+(\sqrt{6})^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{\sqrt{6}}+C.$$ (Smena $t=x+5$, $dt=dx$.)

b) $$\int\frac{dx}{25-8x+x^2}=\int\frac{dx}{9+(16-8x+x^2)}=\int\frac{dx}{9+(4-x)^2}=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{4-x}{3}+C$$
$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C.$$ (Smena $t=4-x$, $dt=-dx$.)

c) $$\int\frac{dx}{2x^2-2x+5}=\int\frac{2dx}{4x^2-4x+10}=\int\frac{2dx}{(2x-1)^2+9}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{3}+C.$$
(Smena $t=2x-1$, $dt=2dx$.)

d) $$\int\frac{(2x-2)\,dx}{x^2+6x+13}=\int\frac{(2x+6)\,dx}{x^2+6x+13}-\int\frac{8\,dx}{(x+3)^2+4}=\ln(x^2+6x+13)-4\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$$

U prvom integralu koristili smo smenu $t=x^2+6x+13$, $dt=(2x+6)\,dx$. Kako je za svako x, takvo da je $x^2+6x+13>0$, to se apsolutna vrednost kod logaritma mogla izostaviti. U drugom integralu smo koristili smenu $t=x+3$, $dt=dx$.

e) $$\int\frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{27+6x-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{(-2x+6)\,dx}{\sqrt{27+6x-x^2}}+\int\frac{6dx}{\sqrt{36-(x-3)^2}}$$
$$=-\sqrt{27+6x-x^2}+6\arcsin\left(\frac{x-3}{6}\right)+C.$$

f) $$\int\frac{(x-4)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}=\frac{-1}{2}\int\frac{(-2x-4)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}-\int\frac{6dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$$
$$=-\sqrt{5-4x-x^2}-6\arcsin\frac{x+2}{3}+C. \blacktriangleright$$

4.9. Primer. *Izračunati:*

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+31}}$; b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-8x-9}}$; c) $\displaystyle\int\frac{(2x-2)\,dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$; d) $\displaystyle\int\frac{(x+5)\,dx}{\sqrt{x^2-27+6x}}$.

Rešenja.

a) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+31}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+10x+25)+6}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+5)^2+6}}$$
$$=\ln\left|x+5+\sqrt{(x+5)^2+6}\right|+C.$$ Smena $t=x+5$.

b) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-8x-9}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(16-8x+x^2)-25}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-4)^2-25}}$$
$$=\ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x-9}\right|+C.$$

c) $$\int\frac{(2x-2)\,dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}=\int\frac{(2x+6)\,dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}-\int\frac{8\,dx}{\sqrt{(x+3)^2+4}}$$
$$=2\sqrt{(x+3)^2+4}-8\ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2+4}\right|+C.$$

d) $$\int\frac{(x+5)\,dx}{\sqrt{x^2-27+6x}}=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+6)\,dx}{\sqrt{x^2-27+6x}}+\int\frac{2dx}{\sqrt{(x+3)^2-36}}$$
$$=\sqrt{x^2+6x-27}+2\ln|x+3+\sqrt{(x+3)^2-36}|+C. \blacktriangleright$$

4.4 Parcijalno integraljenje

Ako su u i v diferencijabilne funkcije po promenljivoj x, tada važi
$$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$
Integraleći ovu jednakost dobijamo *formulu parcijalnog integraljenja*
$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{4.3}$$

4.10. Primer. *Primenom parcijalnog integraljenja izračunati sledeće integrale*

a) $\int xe^x\,dx$; **b)** $\int x^3e^{2x}\,dx$; **c)** $\int x\sin x\,dx$; **d)** $\int \arcsin x\,dx$; **e)** $\int x\operatorname{arctg}x\,dx$;

Rešenja.

a) Ako je $u=x$, $dv=e^x\,dx$, tada je $du=dx$, $v=e^x$, pa je na osnovu (4.3)
$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C.$$

b) Ako je $u=x^3$, $dv=e^{2x}dx$, tada je $du=3x^2\,dx$, $v=\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}$, pa je
$$\int x^3e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{2}\int x^2e^{2x}\,dx.$$

Poslednji integral se dalje rešava primenom parcijalnog integraljenja. Naime, za $u_1=x^2$ i $dv_1=e^{2x}dx$ je $du_1=2x\,dx$ i $v_1=\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}$, pa je
$$\int x^2e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{2}{2}\int xe^{2x}\,dx.$$

Primenjujući parcijalno integraljenje na integral $\int xe^{2x}\,dx$, dobijamo za $u_2=x$ i

$dv_2 = e^{2x}\,dx$ da je $du_2 = dx$ i $v_2 = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$, pa je

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}\,dx + C.$$

Prema tome posle tri puta primenjene parcijalnog integraljenja, dobija se

$$\int x^3e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\left(x^3e^{2x} - \frac{3}{2}x^2e^{2x} + \frac{3}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}\right) + C.$$

Drugi način da se reši ovaj integral jeste da se pretpostavi oblik rešenja, tj. da je

$$\int x^3e^{2x}\,dx = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^{2x} + C$$

za neke konstante a, b i c, koje treba odrediti. Diferenciranjem se dobija

$$x^3e^{2x} = \left(3ax^2 + 2bx + c\right)e^{2x} + 2\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^{2x}, \text{ odnosno}$$

$$x^3e^{2x} = \left(2ax^3 + (3a+2b)x^2 + (2b+2c)x + (c+2d)\right)e^{2x}.$$

Iz sistema jednačina $2a = 1,\ 3a+2b = 0,\ 2b+2c = 0,\ c+2d = 0,$ dobija se $a = 1/2$, $b = -3/4$, $c = 3/4$, $d = -3/8$, što ponovo daje isto rešenje.

c) Ako je $u = x$, $dv = \sin x\,dx$, tada je $du = dx$, $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$, pa je

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Ako bi uzeli $u = \sin x$ i $dv = x\,dx$, tj. $du = \cos x\,dx$ i $v = x^2/2$, dobili bi

$$\int x\sin x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx,$$

dakle još komplikovaniji integral, te ovo parcijalno integraljenje ne bi dovelo do rešenja. (Primetimo, da kada je za neko $k \in \mathbb{N}$ podintegralna funkcija proizvod oblika $x^k\sin x$ ili $x^k\cos x$, tada prilikom parcijalnog integraljenja treba uzeti $u = x^k$.

d) Ako je $u = \arcsin x$, $dv = dx$, tada je $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $v = x$, pa je

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

U poslednjem integralu smo koristili smenu $t = 1 - x^2$, tj. $dt = -2x\,dx$.

e) Ako je $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x\,dx$, tada je $du = \frac{1}{1+x^2}dx$, $v = x^2/2$, pa je

$$\begin{aligned}\int x\operatorname{arctg} x\,dx &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C. \quad \blacktriangleright\end{aligned}$$

4.11. Primer. *Primenom parcijalnog integraljenja izračunati integrale:*

a) $\int \ln x\,dx$; **b)** $\int \ln(x^2+1)\,dx$; **c)** $\int e^x\sin x\,dx$; **d)** $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$.

U d) pretpostavljamo da je $a^2 + b^2 > 0$, tj. da je bar jedan od parametara a ili b različit od nule.

Rešenja.

a) Ako stavimo $u = \ln x$, $dv = dx$, tada je $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$, pa je

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{x}{x}\,dx = x\ln x - x + C.$$

b) Ako je $u = \ln(x^2+1)$, $dv = dx$, tada je $du = \frac{2x\,dx}{x^2+1}$, $v = x$, pa je

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2+1)\,dx &= x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx \\ &= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C.\end{aligned}$$

c) Ako je $u = \sin x$, $dv = e^x dx$, tada je $du = \cos x\,dx$, $v = e^x$, pa je

$$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx.$$

Primenom parcijalnog integraljenja na drugi integral

$u_1 = \cos x$, $dv_1 = e^x\,dx$, $\Rightarrow$ $du_1 = -\sin x\,dx$, $v_1 = e^x$, dobija se

$$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx.$$

Na osnovu poslednje relacije sledi

$$2\left(\int e^x\sin x\,dx\right) = e^x\sin x - e^x\cos x, \quad \text{tj.} \quad \int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x\sin x - e^x\cos x}{2} + C.$$

Ako se i u drugom parcijalnom integraljenju koristi $u = e^x$, $dv = \cos x\,dx$, dobija se trivijalni identitet. Zbog toga, ako se u prvom parcijalnom integraljenju uzme $dv = e^x\,dx$ tada se *mora* uzeti isto i u drugom parcijalnom integraljenju. Sa druge strane, moglo se u oba parcijalna integraljenja uzeti $u = e^x$.

d) Ako je jedan od brojeva a i b jednak nuli, integral se lako rešava linearnom smenom. Zato ćemo pretpostaviti da važi $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Tada se dvostrukom primenom parcijalnog integraljenja dobija

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx &= \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx \\ &= \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\left(\frac{-1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx\right).\end{aligned}$$

Posle rešavanja po $\int e^{ax}\cos(bx)$ dobija se

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx + \frac{a}{b^2}\cos bx\right), \text{ ili}$$

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C.$$

Zadatak pod e) je specijalni slučaj ovog zadatka $(a=2,\ b=1)$. ▶

4.5 Razni tipovi neodređenih integrala

4.5.1 Integrali racionalnih funkcija

4.12. Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

a) $\displaystyle\int\frac{(x^3-2x-35)\,dx}{x^2-2x-15}$; b) $\displaystyle\int\frac{(x+1)\,dx}{x^3-2x^2+x-2}$; c) $\displaystyle\int\frac{(x+3)\,dx}{x^4-5x^2+4}$;

d) $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x-1)^3}$; e) $\displaystyle\int\frac{(2x^2-4x+3)\,dx}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}$; f) $\displaystyle\int\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\,dx$.

Rešenje.

a) Na osnovu $\displaystyle\frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}=x+2+\frac{17x-5}{x^2-2x-15}=x+2+\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3}$,

dobija se sistem jednačina $A+B=17,\ 3A-5B=-5$, tj. $A=10,\ B=7$, pa je

$$\frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}=x+2+\frac{10}{x-5}+\frac{7}{x+3}.$$

Prema tome je

$$\int\frac{(x^3-2x-35)\,dx}{x^2-2x-15}=\int(x+2)\,dx+\int\frac{10\,dx}{x-5}+\int\frac{7\,dx}{x+3}=\frac{x^2}{2}+2x$$
$$+10\ln|x-5|+7\ln|x+3|+C=\frac{x^2}{2}+2x+\ln\left|(x-5)^{10}\cdot(x+3)^7\right|+C.$$

b) Kako je $\displaystyle\frac{x+1}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+D}{x^2+1}=\frac{(A+B)x^2+(D-2B)x+A-2D}{x^3-2x^2+x-2}$,

tj. $A+B=0,\ D-2B=1$ i $A-2D=1$, odakle je $A=3/5,\ B=-3/5,\ D=-1/5$, to je

$$\int\frac{(x+1)dx}{x^3-2x^2+x-2}=\int\frac{3\,dx}{5(x-2)}-\int\frac{(3x+1)dx}{5(x^2+1)}=\frac{1}{5}\left(3\ln|x-2|-\frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1}\right)$$
$$=\frac{1}{5}\left(3\ln|x-2|-\frac{3}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+C\right).$$

c) Data racionalna funkcija može se transformisati kao

$$\frac{x+3}{x^4-5x^2+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{x+2},$$

gde su $A=-2/3,\ B=1/3,\ D=5/12$ i $E=-1/12$. Prema tome je

$$\begin{aligned}\int\frac{(x+3)\,dx}{x^4-5x^2+4} &= -\int\frac{2\,dx}{3(x-1)}+\int\frac{dx}{3(x+1)}+\int\frac{5\,dx}{12(x-2)}-\int\frac{dx}{12(x+2)}\\ &= \frac{-2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{5}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{12}\ln|x+2|+C\\ &= \frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x+1)^4(x-2)^5}{x-1)^8(x+2)}\right|+C.\end{aligned}$$

d) Data podintegralna funkcija se može pisati kao $\displaystyle\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx-B+D}{(x-1)^3}$,

odakle se posle sređivanja dobija sistem jednačina

$$A=1,\quad -2A+B=0,\quad A-B+D=1,$$

čija su rešenja $A=1,\ B=2$ i $D=2$, tako da je

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.\ \text{Prema tome je}$$

$$\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x-1)^3}=\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{2\,dx}{(x-1)^2}+\int\frac{2\,dx}{(x-1)^3}=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C.$$

e) U ovom slučaju za podintegralnu funkciju važi

$$\frac{2x^2-4x+3}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{-2}{x-2}+\frac{3}{(x-2)^2}.$$

$$\int\frac{(2x^2-4x+3)\,dx}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}=\int\frac{2\,dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{-2\,dx}{x-2}+\int\frac{3\,dx}{(x-2)^2}$$
$$=2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-2\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+C=2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{4x-5}{x^2-3x+2}+C.$$

f) Iz jednakosti

$$\begin{aligned}\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4} &= \frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{D}{2x-1}=\frac{(Ax+B)(2x-1)+D(x^2+4)}{2x^3-x^2+8x-4}\\ &= \frac{(2A+D)x^2+(-A+2B)x-B+4D}{2x^3-x^2+8x-4}\end{aligned}$$

dobija se sistem jednačina $2A+D=1,\ \ -A+2B=-1,\ \ -B+4D=-21$, odakle je $A=3,\ B=1$ i $D=-5$. Prema tome važi

$$\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}=\frac{3x+1}{x^2+4}+\frac{5}{2x-1},\ \text{pa je}$$

$$\int\frac{(x^2-x-21)\,dx}{2x^3-x^2+8x-4}=\int\frac{(3x+1)\,dx}{x^2+4}+\int\frac{5\,dx}{2x-1}=\frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}$$
$$+\int\frac{dx}{x^2+4}+\int\frac{5\,dx}{2x-1}=\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{5}{2}\ln|2x-1|+C.\ ▶$$

4.5.2 Integrali trigonometrijskih funkcija

4.13. Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

a) $\int \sin^4 2x\,dx$; b) $\int \cos^5 x\,dx$; c) $\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx$; d) $\int \sin 3x \sin 2x\,dx$;

Rešenja.

a) Polazeći od jednakosti $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$, imamo

$$\int \sin^4 2x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 4x+\cos^2 4x)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\sin 4x+\int \frac{1}{2}(1+\cos 8x)\,dx\right) = \frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\sin 8x\right)+C$$
$$= \frac{3}{8}x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C.$$

b) U ovom slučaju je $\int \cos^5 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx$. Smenom $t=\sin x$, $dt=\cos x\,dx$, dobijamo

$$\int \cos^5 x\,dx = \int (1-t^2)^2\,dt = \int (1-2t^2+t^4)\,dt$$
$$= t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C = \sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

c) Smenom $t=\cos x$, $dt=-\sin x\,dx$, dobijamo

$$\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx = \int \cos^2 x(1-\cos^2 x)\sin x\,dx = -\int t^2(1-t^2)\,dt$$
$$= -\int (t^2-t^4)\,dt = -\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C = -\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+C.$$

d) $$\int \sin 3x \sin 2x\,dx = \int \frac{1}{2}(\cos(3x-2x)-\cos(3x+2x))\,dx$$
$$= \int \frac{1}{2}(\cos x-\cos 5x)\,dx = \frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{10}\sin 5x+C. \blacktriangleright$$

4.5.3 Integrali racionalne funkcije po $\sin x$ i $\cos x$

Integral $\int R(\sin x,\cos x)dx$, gde je R racionalna funkcija (od dve promenljive) $\sin x$ i $\cos x$, se smenom $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, tj. $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, svodi na integral racionalne funkcije, jer je

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

4.14. Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

a) $\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$; b) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$; c) $\int \frac{\sin x\,dx}{4\sin x+3\cos x}$.

Rešenja.

a) $$\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t-1+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t(t+1)}$$
$$= \int \left(\frac{dt}{t}-\frac{dt}{1+t}\right) = \ln|t|-\ln|1+t|+C = \ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}(x/2)}\right|+C.$$

b) $$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2+2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{(t+1/2)^2+3/4}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2}+C = 2\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}}+C.$$

c) $$\int \frac{\sin x\,dx}{4\sin x-3\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}-3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3t^2+8t-3} = \frac{1}{5}\int \left(\frac{3}{3t-1}-\frac{1}{t+3}\right)dt$$
$$= \frac{1}{5}(\ln|3t-1|-\ln|t+3|)+C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{3t-1}{t+3}\right|+C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}(x/2)-1}{\operatorname{tg}(x/2)+3}\right|+C. \blacktriangleright$$

4.5.4 Integrali iracionalnih funkcija

4.15. Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$; b) $\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+x}$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}+1}$; d) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Rešenja.

a) Smenom $t=\sqrt{x+1}$, tj. $t^2=x+1$, $2t\,dt=dx$, dobija se

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} = \int \frac{2t\,dt}{t+1} = 2t-2\ln|t+1|+C = 2\sqrt{x+1}-2\ln|\sqrt{x+1}+1|+C.$$

b) Posle sređivanja i smene $t=\sqrt{x}$, tj. $t^2=x$, $2t\,dt=dx$, dobija se

$$\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+x} = \int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t^3}{1+t}\,dt.$$

Posle smene $u=t+1$, $du=dt$, dobija se

$$\int \frac{2t^3\,dt}{1+t} = 2\int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,du = 2\left(\frac{u^3}{3}-3\frac{u^2}{2}+3u-\ln|u|\right)+C$$

$$= 2\left(\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{3}-3\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2}+3(\sqrt{x}+1)-\ln(\sqrt{x}+1)\right)+C.$$

c) Smenom $t=\sqrt[3]{2x+3}$, tj. $t^3=2x+3$, $3t^2\,dt=2\,dx$, dobija se

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}+1} = \frac{3}{2}\int\frac{t^2\,dt}{t+1}=\frac{3}{2}\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{(\sqrt[3]{2x+3})^2}{2}-\sqrt[3]{2x+3}+\ln|1+\sqrt[3]{2x+3}|\right)+C.$$

d) Smenom $t=\sqrt[6]{x}$, tj. $t^6=x$, $6t^5\,dt=dx$, dobija se

$$\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1} = \int\frac{6t^8}{t^2-1}\,dt=\int\left(6t^6+6t^4+6t^2+6+\frac{6}{t^2-1}\right)dt$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C$$

$$= 6\left(\frac{(\sqrt[6]{x})^7}{7}+\frac{(\sqrt[6]{x})^5}{5}+\frac{(\sqrt[6]{x})^3}{3}+\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|\right)+C. \quad ▸$$

4.5.5 Metod Ostrogradskog

Integrali oblika

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

gde su $a\neq 0$, b i c dati brojevi, a $P_n(x)$ polinom stepena n, se rešava pomoću sledeće jednakosti (koja se dobija primenom parcijalnog integraljenja):

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{4.4}$$

gde je $Q_{n-1}(x)$ polinom stepena $n-1$ sa neodređenim koeficijentima, a λ konstanta. Koeficijenti polinoma $Q_{n-1}(x)$ i konstanta λ se određuju diferenciranjem jednakosti (4.4).

4.16. Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

a) $\displaystyle\int\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx$; **c)** $\displaystyle\int\frac{x^3+3x}{\sqrt{5-x^4-2x^2}}\,dx$; **d)** $\displaystyle\int\frac{e^{3x}+e^{2x}+e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$.

Rešenja.

a) U ovom slučaju je

$$\int\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=(Ax+B)\sqrt{x^2+x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Diferenciranjem prethodnog izraza dobija se

$$\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}=A\sqrt{x^2+x+1}+(Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Množenjem leve i desne strane sa $2\sqrt{x^2+x+1}$ dobija se

$$2(x^2+x+2)=2A(x^2+x+1)+(Ax+B)(2x+1)+2\lambda,$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata dobija sistem jednačina

$2=4A,\ \ 2=3A+2B,\ \ 4=2A+B+2\lambda$, čije je rešenje $A=1/2$, $B=1/4$ i $\lambda=11/8$. Prema tome je

$$\int\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{11}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Poslednji integral se napiše kao $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$, što posle smene $t=x+1/2$, $dt=dx$, postaje

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right|+C=\ln\left|(2x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$

Na kraju je

$$\int\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{11}{8}\ln|(2x+1+\sqrt{x^2+x+1}|+C.$$

b) Pre svega je $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=(Ax+B)\sqrt{x^2+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

Diferenciranjem poslednje jednakosti dobija se

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=A\sqrt{x^2+1}+(Ax+B)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Množenjem leve i desne strane sa $\sqrt{x^2+1}$ dobija se

$$x^2+1=A(x^2+1)+(Ax+B)x+\lambda,$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata dobija sistem jednačina

$1=2A,\ \ 0=B,\ \ 1=A+\lambda$, pa je $A=1/2$, $B=0$ i $\lambda=1/2$. Prema tome je

$$\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Poslednji integral je tablični, pa je

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$$

c) Smenom $t=x^2$, $dt=2x\,dx$, dobija se $\displaystyle\int \frac{x^3+3x}{\sqrt{5-x^4-2x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}}\,dt.$

Stavimo sada $\displaystyle\int \frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}}\,dt = \left(A\sqrt{5-t^2-2t}+\lambda\int \frac{dt}{\sqrt{5-t^2-2t}}\right).$

Posle diferenciranja poslednje jednakosti po t dobija se

$$\frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}} = A\frac{-2t-2}{2\sqrt{5-t^2-2t}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{5-t^2-2t}}.$$

Posle sređivanja imamo $t+3=-A(t+1)+\lambda$, odakle je $A=-1$, $\lambda=2$. Dakle

$$\int \frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}}\,dt = -\sqrt{5-t^2-2t}+2\int \frac{dt}{\sqrt{5-t^2-2t}}.$$

Zadnji integral se rešava tako što se imenilac napiše kao $\sqrt{5-t^2-2t}=\sqrt{6-(t+1)^2}$, pa je

$$\int \frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}}\,dt = -\sqrt{5-t^2-2t}+2\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{6}}.$$

Konačno je $\displaystyle\int \frac{x^3+3x}{\sqrt{5-x^4-2x^2}}\,dx = -\sqrt{5-x^4-2x^2}+2\arcsin\frac{x^2+1}{\sqrt{6}}+C.$

d) Smenom $t=e^x$, $dt=e^x dx$, dobija se

$$\int \frac{e^{3x}+e^{2x}+e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \int \frac{e^{2x}+e^x+1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,e^x\,dx = \int \frac{t^2+t+1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt.$$

Dakle možemo pisati $\displaystyle\int \frac{t^2+t+1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = (At+B)\sqrt{t^2-1}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$. Posle diferenciranja zadnje nejednakosti dobija se

$$\frac{t^2+t+1}{\sqrt{t^2-1}} = A\sqrt{t^2-1}+(At+B)\frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Sređivanjem se dobija $A=1/2$, $B=1$ i $\lambda=3/2$, pa je

$$\int \frac{e^{3x}+e^{2x}+e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \left(\frac{e^x}{2}+1\right)\sqrt{(e^x)^2-1}+\frac{3}{2}\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+C. \blacktriangleright$$

4.5.6 Integral binomnog diferencijala

Integrali oblika $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ mogu se rešiti (tj. mogu se svesti na integral racionalne funkcije) samo u sledeća tri slučaja:

ako je p ceo broj;

ako je p racionalan broj i $\dfrac{m+1}{n}$ ceo broj, tada se uvodi smena $t^s=a+bx^n$, gde je s imenilac razlomka p;

ako je p racionalan i $\dfrac{m+1}{n}+p$ ceo broj, tada se uvodi smena $t^s=ax^{-n}+b$, gde je s

imenilac razlomka p.

4.17. Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+\sqrt{x})^2}$; **b)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$; **c)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}$.

Rešenja.

a) U ovom slučaju je $p=-2$, tj. p je ceo broj, pa se integral rešava smenom $t^2=x$, $2t\,dt=dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+\sqrt{x})^2} &= 2\int \frac{t^2\,dt}{(1+t)^2} = 2\left(t+1-2\ln|t+1|-\frac{1}{t+1}\right)+C\\ &= 2\left(\sqrt{x}+1-2\ln|\sqrt{x}+1|-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)+C.\end{aligned}$$

b) U ovom slučaju je $m=1$, $n=2/3$ i $p=-1/2$, tj. p je razlomak, ali je broj $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{1+1}{2/3}=3$ ceo. Ako uvedemo smenu $t^2=1+\sqrt[3]{x^2}$, tj. $x=\sqrt{(t^2-1)^3}$, ili $x^{1/3}=\sqrt{t^2-1}$, tada dobijamo $2t\,dt=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,dx$, $dx=3\sqrt{t^2-1}\,t\,dt$, tada dobijamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} &= 3\int \frac{(t^2-1)^2t\,dt}{t} = 3\int (t^2-1)^2\,dt\\ &= \frac{3}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)^5-2\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)^3+3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}+C.\end{aligned}$$

c) U ovom slučaju je $m=-6$, $n=2$, $p=-1/2$, pa je $\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{-5}{2}+\dfrac{-1}{2}$ ceo broj. Prema tome, može se uvesti smena $t^2=1-x^{-2}$, $t\,dt=\dfrac{dx}{x^3}$, $x^{-2}=1-t^2$, pa je

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{dx}{x^3x^4\sqrt{1-x^{-2}}} = \int (t^2-1)^2\,dt = \frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t+C\\ &= \frac{(\sqrt{1-x^{-2}})^5}{5}-2\frac{(\sqrt{1-x^{-2}})^3}{3}+\sqrt{1-x^{-2}}+C. \blacktriangleright\end{aligned}$$

4.5.7 Razni integrali

U sledećim integralima koristiti neki od dole navedenih smena. Pretpostavljamo da su parametri a i b pozitivni.

Za $\sqrt{a^2-b^2x^2}$, smena $x=\dfrac{a}{b}\sin t$ dovodi do $a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cdot\cos t$.

Za $\sqrt{a^2+b^2x^2}$, smena $x=\dfrac{a}{b}\operatorname{tg} t$ dovodi do $a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}=\dfrac{a}{\cos t}$.

Za $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ smena $x=\dfrac{a}{b\cos t}$ dovodi do $a\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}-1}=a\cdot\operatorname{tg} t$.

4.18. Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

a) $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$; b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$; c) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$;

Rešenja.

a) Ako stavimo $x=4\sin t$, tada je $\sqrt{16-x^2}=4\cos t$ i $dx=4\cos t\,dt$, pa se dobija

$$\begin{aligned}\int\sqrt{16-x^2}\,dx &= \int 16\cos^2 t\,dt = 8\int(1+\cos 2t)\,dt = 8t+4\sin 2t+C\\ &= 8t+8\sin t\cos t+C = 8\arcsin(x/4)+\frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2}+C.\end{aligned}$$

b) Posle smene $x=3\,\mathrm{tg}\,t$, $dx=\frac{3\,dt}{\cos^2 t}$ i $\sqrt{9+x^2}=\frac{1}{\cos t}$, dobijamo

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}=\int\frac{3\frac{dt}{\cos^2 t}}{27\,\mathrm{tg}^2 t\frac{1}{\cos t}}=\frac{1}{9}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}.$$

Dalje se koristi smena $u=\sin t$, $du=\cos t\,dt$ i sledi

$$\frac{1}{9}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{9}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{9\sin t}+C=-\frac{1}{\frac{3}{\cos t}\cdot 3\,\mathrm{tg}\,t}+C=-\frac{1}{3x\sqrt{x^2+9}}+C.$$

c) Posle smene $x=\frac{2}{\cos t}$, $dx=\frac{2\sin t\,dt}{\cos^2 t}$, koristeći relaciju $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\mathrm{tg}\,t$, dobijamo

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx = \int\frac{4\,\mathrm{tg}\,t\cos^2 t\sin t}{4\cos^2 t}\,dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt=\int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^2 t}\,dt.$$

Dalje se uvodi smena $u=\sin t$, $du=\cos t\,dt$, i dobija se

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^2 t}\,dt &= \int\frac{u^2}{1-u^2}\,du=-u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=-\sin t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+C\\ &= -\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}\right|+C=-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x-\sqrt{x^2-4}}\right|+C.\ \blacktriangleright\end{aligned}$$

Glava 5

Određeni integral

5.1 Površina krivolinijskog trapeza

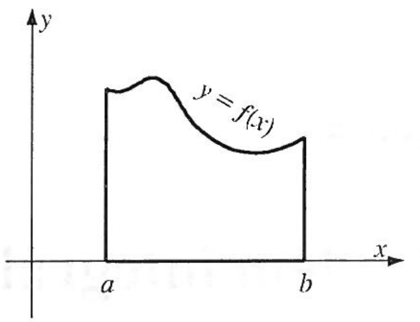
Jedan od prvih problema koje je praksa nametnula matematici bio je određivanje površine ravne figure. Davno je bilo poznato da je površina pravougaonika jednaka proizvodu njegove dužine i širine; na osnovu toga, mogle su se odrediti površine nekih mnogouglova, npr. trougla i trapeza. Budući da se površina proizvoljne ravne figure može dobiti kao konačan zbir površina krivolinijskih trapeza, slika 5.1. još su starogrčki matematičari znali da je zapravo dovoljno rešiti problem površine *krivolinijskog trapeza,* slika 5.2. Iako oni nisu dali opšti metod za određivanje njegove površine, oni su ovaj problem rešili približno, koristeći površine upisanih i opisanih pravougaonika. Ta je metoda u suštini i dovela do definicije određenog integrala, čija je vrednost (uz uslove koje ćemo kasnije precizirati) upravo površina krivolinijskog trapeza. Krajem XVII veka I. Njutn i V. Lajbnic su dokazali osnovnu formulu integralnog računa (koja se obično i zove po njima), čime su problem površine ravne figure sveli na izračunavanje neodređenog integrala funkcije f sa slike 5.3. Neka je data neprekidna funkcija f na $[a,b]$. Izvršimo podelu intervala $[a,b]$ na n podintervala

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ [x_2,x_3],\ \ldots,\ [x_{n-1},x_n], \tag{5.1}$$

tako da važi $a=x_0<x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

Neka za funkciju f i podintervale iz (5.1) važe sledeće tri osobine:

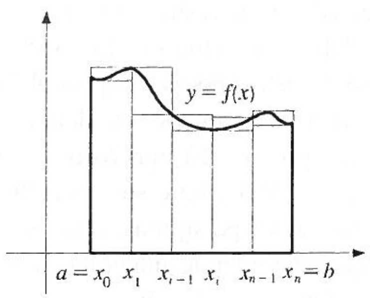
1. funkcija f je nenegativna na $[a,b]$;
2. funkcija f je neprekidna na $[a,b]$;
3. intervali $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,n$, su iste dužine, tj. $\Delta x=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$.

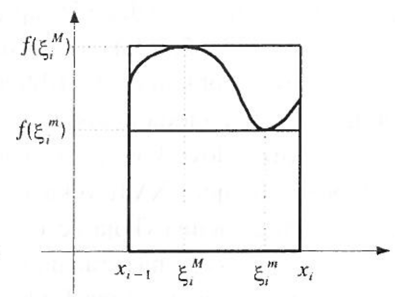


Slika 5.1. Slika 5.2.

Osobina 1, tj. nenegativnost funkcije f na $[a,b]$, znači da se njen grafik nalazi iznad x–ose. Tada se ravna figura ograničena intervalom $[a,b]$ na x–osi, ordinatama u tačkama a i b i grafikom date funkcijom f nad $[a,b]$, naziva *krivolinijski trapez* nad $[a,b]$.

Osobina 2, tj. neprekidnost funkcije f na $[a,b]$, povlači da postoje tačke ξ_i^m i ξ_i^M iz odgovarajućeg podintervala $[x_{i-1},x_i]$, u kojima funkcija f dostiže najmanju odnosno najveću vrednost (slika 5.4.). Naš zadatak je da izračunamo površinu





Slika 5.3. Slika 5.4.

krivolinijskog trapeza sa slike 5.2. U tom cilju, za svaki krivolinijski trapez T_i nad podintervalom $[x_{i-1},x_i]$, posmatraćemo upisani pravougaonik $\mathcal{A}_i^u$ (odnosno opisani pravougaonik $\mathcal{A}_i^o$) sa slike 5.3., čija je jedna stranica podinterval $[x_{i-1},x_i]$, a druga jednaka minimumu $f(\xi_i^m)$ (odnosno maksimumu $f(\xi_i^M)$) funkcije f na datom podintervalu. Jasno je da možemo pisati

$$\mathcal{A}_i^u \subseteq T_i \subseteq \mathcal{A}_i^o.$$

Površinu ravnog lika možemo posmatrati kao funkciju koja skupovima tačaka datog lika dodeljuje nenegativan broj, tako da većem skupu mora pripadati i veća površina. Označimo sa P_i^u, P_i^T i P_i^o površine upisanog pravougaonika, krivolinijskog trapeza

i opisanog pravougaonika, respektivno, za svaki od podintervala $[x_{i-1},x_i]$, slika 5.4. Dakle važi

$$P_i^u \leq P_i^T \leq P_i^o. \tag{5.2}$$

Kako je $\mathcal{A}^u = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i^u$, $T = \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$, $\mathcal{A}^o = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i^o$, sledi da je

$$\mathcal{A}^u \subseteq T \subseteq \mathcal{A}^o, \tag{5.3}$$

odakle je $P(\mathcal{A}^u) \leq P(T) \leq P(\mathcal{A}^o)$, gde je $P(\mathcal{A}^u) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i^m)\Delta x$ i $P(\mathcal{A}^o) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i^M)\Delta x$, a $P(T)$ površina krivolinijskog trapeza T. Povećanjem broja podintervala n, dužina podintervala se smanjuje, tako da kada $n \to \infty$, tada $\Delta x \to 0$.

Ako sledeće dve granične vrednosti: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i^m)\Delta x$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i^M)\Delta x$, postoje i međusobno su jednake, tada se površina krivolinijskog trapeza koji određuje funkcija f na intervalu $[a,b]$ definiše kao

$$P = P(T) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^m)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^M)\Delta x. \tag{5.4}$$

5.1. Primer. *Odrediti površinu krivolinijskog trapeza nad intervalom* $[0,3]$ *ispod parabole* $f(x) = 9 - x^2$ *(sl. 5.5.).*

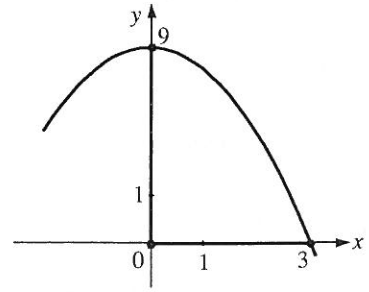
Rešenje. Data funkcija f je neprekidna i nenegativna na intervalu $[0,3]$. Izvršimo podelu na podintervale $[x_{i-1},x_i]$ tako da je

$$x_0 = 0,\ x_1 = \Delta x,\ x_2 = 2\Delta x,\ \ldots,\ x_n = n\Delta x = 3,\ \text{ ili }\ \Delta x = \frac{3}{n},\qquad x_i = i\cdot\frac{3}{n} = \frac{3i}{n},$$

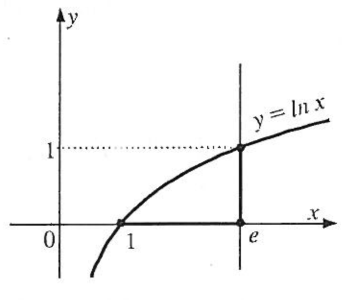
$i = 0,1,\ldots,n$. Data funkcija je opadajuća na $[0,3]$, pa na svakom od posmatranih podintervala $[x_{i-1},x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$, dostiže maksimum u tački $\xi_i^M = x_{i-1}$, a minimum u tački $\xi_i^m = x_i$. Prema tome je zbir površina upisanih pravougaonika

$$\begin{aligned} P^u &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^m)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(9 - \frac{9(i-1)^2}{n^2}\right)\cdot\frac{3}{n} = \frac{27}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{(i-1)^2}{n^2}\right) i^2 + \\ &= \frac{27}{n}\cdot\left(n - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2}\right) = 27 - 9\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)\cdot \end{aligned}$$

Zbir površina opisanih pravougaonika je



Slika 5.5.



Slika 5.6.

$$\begin{aligned} P^o &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^M)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(9-\frac{9i^2}{n^2}\right)\cdot\frac{3}{n} = \frac{27}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{i^2}{n^2}\right)\\ &= \frac{27}{n}\cdot\left(n-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right) \doteq 27-9\cdot\left(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right). \end{aligned}$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^m)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left(27-\frac{9}{2n^3}(2n^3-3n^2+n)\right) = 27-9 = 18,$$

i takođe

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^M)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left(27-\frac{9}{2n^3}(2n^3+3n^2+n)\right) = 27-9 = 18,$$

to je tražena površina krivolinijskog trapeza $P = 18$. ▶

5.2 Definicija određenog integrala

U ovom odeljku uopštićemo malo uslove za funkciju f i podelu intervala na sledeći način.

1. Funkcija f može biti i negativna na $[a,b]$;
2. funkcija f može imati i konačno mnogo prekida na $[a,b]$;
3. dužine podintervala $[x_{i-1},x_i]$ mogu biti i različite;
4. tačke ξ_i mogu biti proizvoljne tačke podintervala $[x_{i-1},x_i]$.

Podela $\mathcal{P}$ intervala $[a,b]\subset\mathbb{R}$ je skup tačaka

$$\mathcal{P} = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}, \quad \text{ako važi} \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b. \tag{5.5}$$

Označimo dužinu i–tog intervala sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Tada je *parametar podele* $\mathcal{P}$ broj

$$\lambda(\mathcal{P}) = \max_{1\le j\le n}\Delta x_i. \tag{5.6}$$

5.2. Definicija. *Neka je funkcija f definisana na $[a,b]$, neka je $\mathcal{P}$ neka podela intervala $[a,b]$ i neka su ξ_i neke tačke iz odgovarajućeg podintervala $[x_{i-1},x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$. Tada se zbir*

$$R(\mathcal{P},\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

naziva integralna suma *funkcije f za podelu $\mathcal{P}$.*

Sume koje se javljaju u relaciji (5.3) su takođe integralne sume, za specijalno izabrane ξ_i (tačke u kojima funkcija f dostiže minimum odnosno maksimum) i za jednake dužine intervala $\Delta x = \Delta x_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Primetimo da ako je funkcija f negativna na $[a,b]$, tada je bilo koja integralna suma takođe negativna.

Sada možemo dati sledeću definiciju.

5.3. Definicija. *Neka je data funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Ako za svaku podelu $\mathcal{P}$ intervala $[a,b]$ i svaki izbor od n tačaka ξ_1, ξ_2, …, ξ_n, sa osobinom $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$, postoji uvek ista granična vrednost*

$$I := \lim_{\lambda(\mathcal{P})\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

tada se za funkciju f kaže da je Riman–integrabilna (kraće: integrabilna*) na intervalu $[a,b]$, a broj I se zove* **određeni integral** *funkcije f na $[a,b]$, i označavamo ga sa*

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.7}$$

U ovom slučaju granična vrednost $I := \lim_{\lambda(\mathcal{P})\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, sa osobinom da za proizvoljnu podelu $\mathcal{P}$ sa osobinom $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ i bilo koji izbor od n tačaka $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ važi

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Brojevi a i b, $a < b$, su *donja i gornja granica*, a funkcija f je *podintegralna funkcija* određenog integrala (5.7).

Ako je f integrabilna funkcija na intervalu $[a,b]$ i

1. ako je $a > b$, tada je $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;

2. ako je $a = b$, tada važi $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Postoje i funkcije koje nisu integrabilne. Tako, na primer, ako je funkcija f definisana na $[a,b]$ i važi $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, tada u prvom podintervalu $[x_0,x_1]$ bilo koje podele $\mathcal{P}$, za svako $M > 0$ postoji ξ_1, takvo da važi

$$f(\xi_1)\Delta x_1 > M,$$

pa ne postoji $\lim\limits_{\lambda(\mathcal{P})\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. To znači da funkcija f nije integrabilna. U stvari, važi sledeća teorema.

5.4. Teorema. a) *Integrabilna funkcija na $[a,b]$ je ograničena na $[a,b]$.*

b) *Ograničena funkcija na $[a,b]$ sa konačnim brojem prekida je i integrabilna na $[a,b]$.*

Važan je poseban slučaj ove teoreme pod b).

5.5. Teorema. *Svaka neprekidna funkcija na $[a,b]$ je i integrabilna na $[a,b]$.*

5.3 Osobine određenog integrala

U ovom delu iznećemo osnovne osobine određenog integrala.

5.6. Teorema. *Ako je funkcija f konstanta, tj. $f(x) = k$, $x \in [a,b]$, tada je*

$$\int_a^b f(x)dx = k(b-a).$$

Dokaz. Zaista iz $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n k\Delta x_i = k\sum_{i=1}^n \Delta x_i = k(b-a)$, sledi

$$\lim_{\lambda(\mathcal{P})\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda(\mathcal{P})\to 0}\sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i = k(b-a). \quad \blacktriangleright$$

5.7. Teorema. *Ako je f integrabilna funkcija na $[a,b]$, i k neki realan broj, tada je i funkcija kf integrabilna na $[a,b]$ i važi*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Dokaz. Ako je $k = 0$, tada je prema Teoremi 5.6 $\int_a^b kf(x)dx = 0$. Ako je $k \neq 0$, tada postoji $\int_a^b kf(x)dx = I$, jer je funkcija f integrabilna. Ako je $\mathcal{P}$ proizvoljna podela zatvorenog intervala $[a,b]$, tada za svako $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da za $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ i bilo koji izbor tačaka $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$ važi

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{k},$$

za $\xi \in [x_{i-1},x_i]$. Prema tome je $|\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i - kI| < k\varepsilon_1 = \varepsilon$. ▶

5.8. Teorema. *Ako su dve funkcije f i g integrabilne na $[a,b]$, tada su i njihov zbir, razlika i proizvod takođe integrabilne funkcije na $[a,b]$. Ako je, još, i funkcija $\frac{1}{g}$ ograničena na $[a,b]$, tada je količnik $\frac{f}{g}$ takođe integrabilna funkcija na $[a,b]$.*

5.9. Teorema. *Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a,b]$, tada važi*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)\,dx \tag{5.8}$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Pošto su funkcije f i g integrabilne na $[a,b]$, to postoje realni brojevi I_1 i I_2 takvi da važi

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_1, \qquad \int_a^b g(x)\,dx = I_2$$

u smislu definicije 5.3. To znači da za $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ postoje brojevi $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ sa osobinom da je za proizvoljnu podelu $\mathcal{P}$ intervala $[a,b]$ za koju je $\lambda(\mathcal{P}) < \min\{\delta_1,\delta_2\}$ zadovoljeno

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I_1\right| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I_2\right| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2},$$

za bilo koji izbor tačaka $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Integralna suma $R(\mathcal{P},\xi_1,\ldots,\xi_n)$ za funkciju $f+g$ se može pisati kao

$$R(\mathcal{P},\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)+g(\xi_i))\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i,$$

gde su ξ_i proizvoljne tačke iz $[x_{i-1},x_i]$ određenog podelom $\mathcal{P}$.

Prema tome je za $\lambda(\mathcal{P}) < \min\{\delta_1,\delta_2\}$

$$\begin{aligned}|R_p-(I_1+I_2)| &= \left|\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I_1\right)+\left(\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - I_2\right)\right| \\ &\le \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I_1\right|+\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - I_2\right| < \varepsilon'+\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \ \blacktriangleright\end{aligned}$$

Geometrijski je očigledno da za nenegativnu i neprekidnu funkciju f na $[a,b]$ takvu da je $f(x)\ge 0$, $x\in[a,b]$, važi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad a<c<b.$$

To znači da je površina krivolinijskog trapeza koji je određen funkcijom f nad intervalom $[a,b]$ jednaka zbiru površina krivolinijskih trapeza funkcije f nad $[a,c]$, i $[c,b]$. Uopšte važi

5.10. Teorema. *Ako je funkcija f integrabilna na $[a,c]$ i $[c,b]$ takvim da je $a<c<b$, tada je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ i važi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

5.11. Teorema. *Neka je funkcija f integrabilna na $[a,b]$.*

(i) *Tada je funkcija $|f|$ je takođe integrabilna na $[a,b]$ i važi*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_b^a |f(x)|\,dx.$$

(ii) *Ako je funkcija f integrabilna i pozitivna (resp. negativna) na $[a,b]$, tada je*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0 \quad \left(resp.\ \int_a^b f(x)\,dx < 0\right).$$

(iii) *Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a,b]$, i $f(x)\le g(x)$, $x\in[a,b]$, tada je*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

5.4 Teoreme srednje vrednosti za određeni integral

5.12. Prva teorema srednje vrednosti za integral.
Ako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$, tada postoji tačka $\xi\in(a,b)$ takva da važi

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Dokaz. Ako je funkcija f konstantna funkcija, dokaz je trivijalan i sledi iz Teoreme 5.6. Ako, međutim, vrednost funkcije f nije konstantna na $[a,b]$ tada funkcija f zbog neprekidnosti dostiže na $[a,b]$ minimum m i maksimum M, tj., postoje tačke u i v takve da važi $f(u)=m$ i $f(v)=M$, što znači da je tada $m\le f(x)\le M$. Na osnovu teoreme 5.11 pod (iii) važi

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx,$$

odakle je $m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$, odnosno $f(u)\le \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\le f(v)$.

Kako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$, ona prima sve vrednosti na tom intervalu između $f(u)$ i $f(v)$. To znači da postoji $\xi\in[u,v]$ takvo da je

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx. \ \blacktriangleright$$

Broj ξ i u ovom slučaju nije jednoznačno određen, kao što nije bio ni kod Rolove ili Lagranžove teoreme.

Ako je $f(x)\ge 0$ na $[a,b]$, tada teorema 5.12 ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju. Naime, u tom slučaju površina pravougaonika čija je jedna stranica jednaka $b-a$ (dužina intervala $[a,b]$), a druga stranica jednaka $f(\xi)$ jednaka je površini krivolinijskog trapeza funkcije f nad $[a,b]$.
Teorema 5.12 je, u stvari, specijalan slučaj sledeće teoreme.

5.13. Druga teorema srednje vrednosti za integral.
Neka je funkcija f neprekidna na $[a,b]$, neka je funkcija g integrabilna i stalnog znaka na $[a,b]$. Tada postoji tačka $\xi\in[a,b]$, sa osobinom

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,dx.$$

5.5 Osnovna teorema integralnog računa

Važna posledica teorema srednje vrednosti za integral jeste

5.14. Teorema. *Ako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$, tada je funkcija, G definisana sa*

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b], \tag{5.9}$$

primitivna funkcija za funkciju f, tj. za svako $x\in(a,b)$ važi $G'(x)=f(x)$.

Dokaz. Neka su x i $x+h$ iz (a,b). Po definiciji prvog izvoda je

$$G'(x)=\lim_{h\to0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)\,dt}{h}.$$

Na osnovu teoreme srednje vrednosti integrala 5.12, postoji tačka ξ iz intervala $[x,x+h]$ takva da važi

$$\int_x^{x+h}f(t)\,dt=h\cdot f(\xi),$$

Prelaskom na graničnu vrednost dobijamo

$$G'(x)=\lim_{h\to0}\frac{hf(\xi)}{h}=f(x).$$

(Koristili smo neprekidnost funkcije f u tački x.)) ▶

Na osnovu prethodne teoreme možemo dati vezu između određenog i neodređenog integrala.

5.15. Njutn–Lajbnicova formula *Neka je f neprekidna funkcija na $[a,b]$, a F jedna njena primitivna funkcija na $[a,b]$, tj.*

$$F'(x)=f(x),\quad x\in(a,b).$$

Tada važi:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b:=F(b)-F(a). \tag{5.10}$$

Dokaz. Neka je F proizvoljna primitivna funkcija funkcije f i neka je G funkcija data relacijom (5.9), tj.,

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b].$$

Pokazano je da se dve primitivne funkcije za istu funkciju mogu najviše razlikovati za konstantu, što znači

$$G(x)-F(x)=C,\quad \text{odnosno}\quad \int_a^x f(t)\,dt=F(x)+C,$$

za svako $x\in[a,b]$. Na osnovu relacije (5.9) je

$$G(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0=F(a)+C,\quad \textit{odnosno}\quad F(a)=-C.$$

Na osnovu prethodnog sledi

$$G(b)=\int_a^b f(t)\,dt=F(b)+C=F(b)-F(a).$$

Uobičajeno je da se pri izračunavanju određenog integrala piše

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(x)|_a^b=F(b)-F(a).\ ▶$$

5.16. Primer. *Primenom osnovne teoreme integralnog računa odrediti sledeće određene integrale:*

a) $\int_{-1}^4(8x^3+3x^2+1)\,dx$; b) $\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+\sqrt{-x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$;

c) $\int_{\sqrt3}^3\left(2e^{3x}+\frac{3}{x^2+9}+1\right)dx$; d) $\int_0^{\pi/3}\left(\sin x+\operatorname{tg}x+2\cos\frac{x}{2}\right)dx$.

Rešenja.

a) $\int_{-1}^4(8x^3+3x^2+1)\,dx=\left(8\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^4=2\cdot4^4+4^3+4-(2\cdot(-1)^4+(-1)^3+(-1))=580.$

b) $\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+\sqrt{-x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=\left(-\frac{1}{2x^2}+\ln|x|-\frac{2(-x)^{3/2}}{3}-3\sqrt[3]{x}\right)\Big|_{-3}^{-1}$

$$=-\frac{1}{2(-1)^2}+\ln|-1|-\frac{2(1)^{3/2}}{3}-3\sqrt[3]{(-1)}-\left(-\frac{1}{2(-3)^2}+\ln|-3|-\frac{2(3)^{3/2}}{3}-3\sqrt[3]{(-3)}\right)$$

$$=\frac{17}{9}-\ln3-3\sqrt[3]{3}+2\sqrt3.$$

c) $\int_{\sqrt3}^3\left(2e^{3x}+\frac{3}{x^2+9}+1\right)dx=\left(\frac23e^{3x}+\operatorname{arctg}(\frac{x}{3})+x\right)\Big|_{\sqrt3}^3$

$$=\frac23e^{3\cdot3}+\operatorname{arctg}(3/3)+3-\frac23e^{3\cdot\sqrt3}-\operatorname{arctg}(\sqrt3/3)-\sqrt3=\frac23\left(e^9-e^{3\sqrt3}\right)+\frac{\pi}{12}+3-\sqrt3.$$

d) $\int_0^{\pi/3}\left(\sin x+\operatorname{tg}x+2\cos\frac{x}{2}\right)dx=\left(-\cos x-\ln|\cos x|+4\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/3}$

$$=-\cos(\pi/3)-\ln|\cos(\pi/3)|+4\sin\frac{\pi/3}{2}+\cos0+\ln|\cos0|+4\sin\frac02=\frac52+\ln2.$$

5.17. Primer. *Odrediti broj* $\xi \in [a,b]$ *koji zadovoljava uslove teoreme 5.12, tj. teoreme prve srednje vrednosti integrala, za sledeće integrale:*

a) $\displaystyle\int_0^3 \left(4-\frac{x^2}{4}\right) dx;$ **b)** $\displaystyle\int_1^3 \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) dx.$

Rešenja.

a) Na osnovu teoreme 5.15 je $\displaystyle\int_0^3 \left(4-\frac{x^2}{4}\right) dx = \left(4x-\frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^3 = \frac{39}{4}$. Na osnovu teoreme 5.12 postoji tačka ξ takva da važi

$$\int_0^3 \left(4-\frac{x^2}{4}\right) dx = \left(4-\frac{\xi^2}{4}\right)(3-0), \quad \text{ili} \quad \frac{39}{4} = \frac{16-\xi^2}{4}\cdot 3.$$

Odavde sledi da je $\xi^2 = 3$, pa je tražena vrednost $\xi = \sqrt{3} \in [0,3]$.

b) Iz $\displaystyle\int_1^3 \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^3 = \frac{28}{3}$, i $\displaystyle\left(\xi^2+\frac{1}{\xi^2}\right)\cdot(3-1) = \frac{28}{3}$, sledi $\xi \approx 2,1075$. ▶

5.6 Smena promenljivih kod određenog integrala

Kod izračunavanja određenog integrala koristi se neodređeni integral tako da se i smena kao i parcijalno integraljenje mogu primeniti na neodređeni integral pa se posle mogu samo zameniti granice.

Međutim možemo vršiti smenu i kod određenog integrala na sledeći način. Ako je funkcija ϕ bijekcija intervala $[c,d]$ na interval $[a,b]$ i ima neprekidan prvi izvod na (c,d), tada posle smene $x = \phi(t)$, $dx = \phi'(t)\,dt$, važi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\,dt,$$

gde je $a = \phi(c)$, $b = \phi(d)$.

Može se pokazati da je uz prethodne uslove funkcija ϕ monotona na $[c,d]$.

5.18. Primer. *Izračunati sledeće integrale:* **a)** $\displaystyle\int_3^6 \sqrt{x-3}\,dx;$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2\,dx}{x-2};$

c) $\displaystyle\int_0^e \frac{\cos(\ln x)\,dx}{x};$ **d)** $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\cdot \mathrm{ctg}^2 x\,dx;$ **e)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{4+e^{2x}};$ **f)** $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}}.$

Rešenja.

a) Ako stavimo smenu $x = \phi(t) = t+3$, dakle $\phi'(t)\,dt = dt$, tada granice integraljenja postaju $t = 3-3 = 0$ i $t = 6-3 = 3$. Tako dobijamo

$$\int_3^6 \sqrt{x-3}\,dx = \int_0^3 t^{1/2}\,dt = \frac{2t^{3/2}}{3}\Big|_0^3 = \frac{2\sqrt{27}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

b) Ako koristimo smenu $t = x+2$, dakle $dt = dx$, tada posle promene granica dobijamo

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x+2}\,dx = \int_1^3 \frac{(t-2)^2\,dt}{t} = \left(\frac{t^2}{2}-4t+4\ln t\right)\Big|_1^3 = \frac{9}{2}-12+4\ln 3-\frac{1}{2}+4 = 4\ln 3-4.$$

c) Ako stavimo $t = \ln x$, tada se diferenciranjem leve i desne strane ove jednakosti dobija $dt = \dfrac{dx}{x}$, pa sledi $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx = \int_0^1 \cos t\,dt = \sin t\Big|_0^1 = \sin 1.$

d) Posle smene $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$, nove granice integraljenja postaju $t = 1/2$ i $t = 1$, pa se dobija

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\cdot \mathrm{ctg}^2 x\,dx = \int_{1/2}^1 \frac{1-t^2}{t^2}\,dt = \left(-\frac{1}{t}-t\right)\Big|_{1/2}^1 = -1-1+2+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

e) Smenom $t = e^x$, dakle $dt = e^x\,dx$, dobija se

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{arctg}\,x\Big|_1^e = \mathrm{arctg}\,e-\mathrm{arctg}\,1 = \mathrm{arctg}\,e-\frac{\pi}{4}.$$

f) Smenom $x^2 = t$, $2x\,dx = dt$, dobijamo $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}} = \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-9}}$. Dalje se novom smenom $t^2-9 = r^2$, $2t\,dt = 2r\,dr$, dobija

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{dr}{r^2+9} = \frac{1}{6}\mathrm{arctg}\frac{r}{3}\Big|_0^4 = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{4}{3}. \quad ▶$$

5.19. Teorema. *Neka je* f *integrabilna funkcija na intervalu* $[-a,a]$.

a) *Ako je* f *parna funkcija, tada je* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

b) *Ako je* f *neparna funkcija, tada je* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$

Dokaz. **a)** Ako je f parna funkcija, tada za sve $x \in [-a,a]$ važi $f(x) = f(-x)$, pa se primenom teoreme 5.32 dobija

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

Ako u prvom integralu uvedemo smenu $t = -x$, dakle $dt = -dx$, pri čemu je za $x = -a$, $t = a$, a za $x = 0$ je $t = 0$, pa dobijamo

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)\,dx &= -\int_a^0 f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx\\ &= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.\end{aligned}$$

b) Ako je f neparna funkcija, tada za sve $x \in [-a,a]$ važi $f(-x) = -f(x)$, pa se dobija

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Ako u prvom integralu uvedemo smenu $t=-x$, tada je $dt=-dx$ i za $x=-a$, je $t=a$, a za $x=0$ je $t=0$, pa dobijamo

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0. \qquad \blacktriangleright$$

5.7 Parcijalno integraljenje

Ako su u i v neprekidno–diferencijabilne funkcije na $[a,b]$, tada važi **formula parcijalnog integraljenja:**

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b} u(x)v'(x)\,dx &= u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u'(x)v(x)\,dx \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_{a}^{b} u'(x)v(x)\,dx.\end{aligned} \tag{5.11}$$

5.20. Primer. *Izračunati sledeće određene integrale:*

a) $\displaystyle\int_{2}^{7} xe^{-5x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x^2\sin(3x)\,dx$; c) $\displaystyle\int_{1}^{2} x\ln x\,dx$.

Rešenja.

a) Ako stavimo $u=x$ i $dv=e^{-5x}dx$ tada je $du=dx$ i $v=\int e^{-5x}dx=-\frac{1}{5}e^{-5x}$. U zadnjem integralu korišćena je smena $t=-5x$. Na osnovu formule (5.11) važi:

$$\begin{aligned}\int_{2}^{7} xe^{-5x}\,dx &= -\frac{x}{5}e^{-5x}\Big|_{2}^{7} - \left(-\frac{1}{5}\int_{2}^{7} e^{-5x}dx\right) = -\frac{7}{5}e^{-35} + \frac{2}{5}e^{-10} - \frac{1}{25}e^{-5x}\Big|_{2}^{7} \\ &= -\frac{7}{5}e^{-35} + \frac{2}{5}e^{-10} - \frac{1}{25}\left(e^{-35}-e^{-10}\right) = -\frac{36}{25}e^{-35} + \frac{11}{25}e^{-10}.\end{aligned}$$

b) U ovom slučaju stavićemo $u=x^2$ i $dv=\sin(3x)dx$, $du=2xdx$ i $v=\int\sin(3x)\,dx=-\frac{1}{3}\cos(3x)$. Iz (5.11) tada sledi:

$$\int_{0}^{\pi/2} x^2\sin(3x)\,dx = -\frac{1}{3}x^2\cos(3x)\Big|_{0}^{\pi/2} - \left(-\frac{2}{3}\int_{0}^{\pi/2} x\cos(3x)\,dx\right) = \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi/2} x\cos(3x)\,dx$$

Poslednji integral ćemo takođe rešiti parcijalnim integraljenjem, tako što ćemo staviti $u_1=x$ i $dv_1=\cos(3x)\,dx$, odnosno $du_1=dx$ i $v_1=\frac{1}{3}\sin(3x)$. Tako dobijamo

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi/2} x\cos(3x)\,dx &= \frac{x}{3}\sin(3x)\Big|_{0}^{\pi/2} - \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi/2}\sin(3x)\,dx \\ &= \frac{\pi}{6}\sin(3\pi/2) - \frac{0}{3}\sin(3\cdot 0) - \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\Big|_{0}^{\pi/2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Konačno je $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x^2\sin(3x)\,dx = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{9}\right) = -\frac{\pi}{9} - \frac{2}{27}$.

c) Dati integral se rešava primenom parcijalnog integraljenja: $u=\ln x$, $dv=x\,dx$, tj. $du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{x^2}{2}$. Tako se dobija

$$\int_{1}^{2} x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{1}^{2} - \frac{1}{2}\int_{1}^{2} x\,dx = 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Big|_{1}^{2} = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - 3/4. \qquad \blacktriangleright$$

5.21. Primer. *Izračunati sledeće određene integrale za $n\in\mathbf{N}_0$:*

$$I_n = \int_{0}^{\pi/2}\cos^n x\,dx; \qquad J_n = \int_{0}^{\pi/2}\sin^n x\,dx.$$

Rešenje. Pokažimo prvo da je za sve $n\in\mathbf{N}_0$ $I_n=J_n$. Zaista, smenom $t=\frac{\pi}{2}-x$, $dt=-dx$ dobijamo

$$I_n = \int_{0}^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \int_{0}^{\pi/2}\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = -\int_{\pi/2}^{0}\cos^n t\,dt = \int_{0}^{\pi/2}\cos^n x\,dx = J_n.$$

Dakle, dovoljno je izračunati integrale I_n, $n\in\mathbf{N}_0$. Za $n=0$ je

$$I_0 = \int_{0}^{\pi/2}\sin^0 x\,dx = \int_{0}^{\pi/2}dx = x\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}, \tag{5.12}$$

a za $n=1$ je

$$I_1 = \int_{0}^{\pi/2}\sin^1 x\,dx = \int_{0}^{\pi/2}\sin x\,dx = -\cos x\Big|_{0}^{\pi/2} = 1. \tag{5.13}$$

Neka je sada $n\geq 2$. Ako primenimo parcijalno integraljenje:

$u=\cos^{n-1}x$, $dv=\cos x\,dx$, $du=-(n-1)\cos^{n-2}x\sin x\,dx$, $v=\sin x$, dobijamo

$$I_n = \cos^{n-1}x\sin x\Big|_{0}^{\pi/2} + (n-1)\int_{0}^{\pi/2}\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx = (n-1)\int_{0}^{\pi/2}\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,dx.$$

Na osnovu toga je $I_n=(n-1)\left(I_{n-2}-I_n\right)$, odnosno

$$I_n = \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}, \quad n\geq 2. \tag{5.14}$$

Ako je $n=2p$, $p\in\mathbb{N}$, tada iz (5.14) i (5.12) dobijamo

$$\begin{aligned}I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p}\cdot I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{2p-3}{2p-2}\cdot I_{2p-4} \\ &= \cdots = \frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{2p-3}{2p-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot I_0 = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Ako je $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$, tada iz (5.14) i (5.13) sledi

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1}\cdot I_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1}\cdot\frac{2p-2}{2p-1}\cdot I_{2p-3} \\ &= \cdots = \frac{2p}{2p+1}\cdot\frac{2p-2}{2p-1}\cdots\frac{1}{3}\cdot I_1 = \frac{(2p)(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3}\cdot 1. \end{aligned}$$ ▶

5.8 Primene određenog integrala

5.8.1 Površina ravnih likova

Neka je data neprekidna funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ koja je nenegativna nad $[a,b]$.

Na osnovu definicije (5.3) i relacije (5.4) možemo reći da je površina P krivolinijskog trapeza funkcije f nad $[a,b]$ (tj. površina figure ograničena sa grafikom funkcije f, ordinatama $x=a$ i $x=b$, kao i intervalom $[a,b]$ na x–osi), jednaka (sl. 5.2.).

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

5.22. Primer. *Odrediti površinu ograničenu krivom $y=\ln x$, x–osom i pravom $x=e$ (sl. 5.6.).*

Rešenje. Na $[a,b]$ funkcija je nenegativna, tako da je tražena površina

$$P = \int_1^e \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e = e\ln e - e - 1\cdot\ln 1 + 1 = 1.$$

(Integral $\int \ln x\,dx$ rešavali smo parcijalnim integraljenjem.) ▶

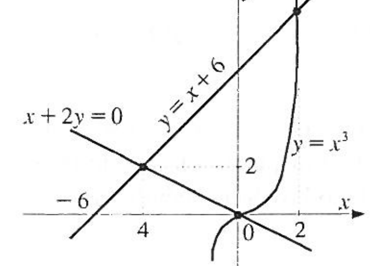
U slučaju kada je funkcija f negativna na $[a,b]$, tada se površina krivolinijskog trapeza funkcije f nad $[a,b]$ određuje kao

$$P = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|, \quad \text{ili} \quad \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

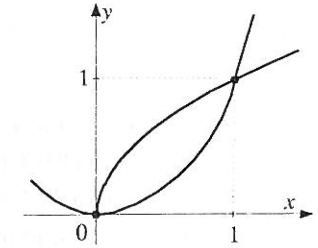
5.23. Primer. *Odrediti površinu ograničenu krivom $y=x^2-4$ i x–osom.*

Rešenje. Funkcija $f(x)=x^2-4$ ima nule za $x_1=-2$ i $x_2=2$. Na $(-2,2)$ data funkcija je negativna, tražena površina jednaka

$$P = \left|\int_{-2}^2 (x^2-4)\,dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_{-2}^2\right| = \left|\frac{2^3}{3}-4\cdot 2-\left(\frac{(-2)^3}{3}-4\cdot(-2)\right)\right| = \frac{32}{3}.$$ ▶



Slika 5.7.



Slika 5.8.

5.24. Primer. *Odrediti površinu ograničenu sinusoidom $y=\sin x$ i intervalom $[0,2\pi]$ na x–osi.*

Rešenje. Na $(0,\pi)$ funkcija $f(x)=\sin x$ je pozitivna, dok je na $(\pi,2\pi)$ ona negativna. Tako je tražena površina jednaka

$$P = \int_0^\pi \sin x\,dx + \left|\int_\pi^{2\pi}\sin x\,dx\right| = (-\cos x)\Big|_0^\pi + \left|(-\cos x)\Big|_\pi^{2\pi}\right| = 2+|-2| = 4.$$

Naravno, traženu površinu mogli smo tražiti i kao $P = 2\int_0^\pi \sin x\,dx = 2\cdot 2 = 4$.

Primetimo da je $\int_0^{2\pi}\sin x\,dx = 0$, a, kako smo videli, da je površina slike ograničene krivom $y=\sin x$ i intervalom $[0,2\pi]$ na x–osi jednaka 4. ▶

5.8.2 Površina između krivih

Ako su f i g neprekidne funkcije na $[a,b]$ i važi $f(x)\ge g(x)$, za sve $x\in[a,b]$, tada je površina ograničena krivama f i g i ordinatama u tačkama a i b jednaka

$$P = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$

5.25. Primer. *Odrediti površinu ograničenu krivim linijama $y=x^2$ i $y=\sqrt{x}$ (sl. 5.8.).*

Rešenje. Tačke u kojima se date krive seku određuju se rešavanjem sistema jednačina

$$y=x^2,\quad y=\sqrt{x},$$

odakle se dobija jednačina $x^2=\sqrt{x}$, čija su rešenja $x_1=0$, i $x_2=1$. Znači, date krive se seku u tačkama $O(0,0)$ i $A(1,1)$ (videti sl. 5.8.). Tražena površina P se dobija kao razlika $P=P_1-P_2$, gde je

$$P_1 = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2x^{3/2}}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3},\qquad P_2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Prema tome je $P = 2/3 - 1/3 = 1/3$. ▶

5.26. Primer. *Odrediti površinu ograničenu sa krivom* $y = x^3$ *i pravama* $y = 6 + x$ *i* $2y + x = 0$ *(sl. 5.7).*

Rešenje. Presek pravih $y = 6 + x$ i $2y + x = 0$ je tačka $A(-4,2)$, a presek krive $y = x^3$ sa pravom $2y + x = 0$ je tačka $O(0,0)$ (koordinatni početak), dok je presek krive $y = x^3$ sa pravom $y = 6 + x$ tačka $B(2,8)$. Svaka od ovih presečnih tačaka dobija se rešavanjem odgovarajućih sistema jednačina:

tačka A: $y = 6 + x,\ 2y + x = 0$;
tačka O: $y = x^3,\ 2y + x = 0$; tačka B: $y = 6 + x,\ y = x^3$.

Tražena površina se dobija kao zbir $P = P_1 + P_2$, gde je

$$P_1 = \int_{-4}^{0}\left(6 + x - \left(-\frac{x}{2}\right)\right)dx = \int_{-4}^{0}\left(6 + \frac{3x}{2}\right)dx = \left(6x + \frac{3x^2}{4}\right)\Bigg|_{-4}^{0} = 24 - 12 = 12,$$

$$P_2 = \int_{0}^{2}(6 + x - x^3)\,dx = \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2} = 12 + 2 - 4 = 10.$$

Prema tome je $P = P_1 + P_2 = 12 + 10 = 22$. ▶

5.27. Primer. *Odrediti površinu ograničenu parabolama* $y = x^2 - 2x$, $y = 6x - x^2$. *(sl. 5.9.).*

Rešenje. Rešavanjem gornjeg sistema jednačina dobijamo da se date parabole seku u tačkama $O(0,0)$ i $A(4,8)$. Parabola $y = x^2 - 2x$ ima nule u tačkama $x = 0$ i $x = 2$, i negativna je na intervalu $(0,2)$, dok parabola $y = 6x - x^2$ ima nule u tačkama $x = 0$ i $x = 6$. Zbog toga se tražena površina određuje kao $P = P_1 + P_2 - P_3$, gde su

$$P_1 = \int_0^4 (6x - x^2)\,dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = 48 - \frac{64}{3} = \frac{80}{3};$$

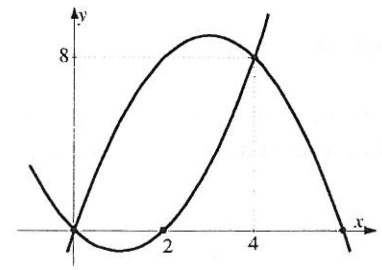
$$P_2 = \left|\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_0^2\right| = \left|\frac{8}{3} - 4\right| = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$P_3 = \int_2^4 (x^2 - 2x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_2^4 = \frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}.$$

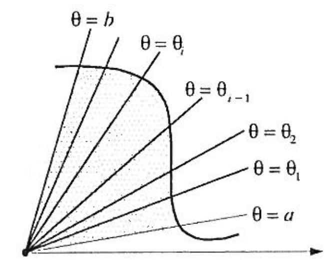
Prema tome je $P = 80/3 + 4/3 - 20/3 = 64/3$. ▶

5.8.3 Kriva u polarnim koordinatama

Neka je u $r\theta$–ravni data kriva u polarnim koordinatama $r = f(\theta)$, gde je f neprekidna funkcija promenljive θ (sl. 5.10.). (Podsetimo se da je tačka A u ravni



Slika 5.9.



Slika 5.10.

određena uređenim parom (r,θ) gde je r odstojanje tačke A od koordinatnog početka O, dok je θ ugao između OA i pozitivnog smera x–ose.)

Odredićemo površinu "krivolinijskog isečka", naime površinu ograničenu pravim linijama $\theta = a$, $\theta = b$, gde je $0 \le a < b \le 2\pi$ i grafikom funkcije $r = f(\theta)$.

Izvršimo podelu $\mathcal{P}$ ugla $[a,b]$ pomoću polupravih koje sa pozitivnim smerom x–ose zaklapaju uglove $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ na sledeći način $a = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n = b$. i neka je $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ za $i = 1,2,\ldots,n$. Time smo dati "krivolinijski isečak" podelili na "male" krivolinijske isečke ΔA_i (sl. 5.10). Neka su $f(u_i)$ i $f(v_i)$ minimalna i maksimalna vrednost funkcije f na uglu $[\theta_{i-1},\theta_i]$, tada važi

$$\frac{1}{2}(f(u_i))^2\Delta\theta_i \le \Delta A_i \le \frac{1}{2}(f(v_i))^2\Delta\theta_i,$$

što povlači

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(f(u_i))^2\Delta\theta_i \le \sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(f(v_i))^2\Delta\theta_i.$$

Ako sa povećanjem broja n tj. kada $n \to \infty$, parametar podele teži nuli: $\lambda(\mathcal{P}) = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta\theta_i \to 0$, tada svaki ugao $\Delta\theta_i \to 0$, $i = 1,2,\ldots n$, pa je površina posmatranog krivolinijskog isečka data sa

$$P = \lim_{\lambda(\mathcal{P})\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(f(u_i))^2\Delta\theta_i = \lim_{\lambda(\mathcal{P})\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(f(v_i))^2\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2 d\theta,$$

ako prethodne granične vrednosti postoje.

5.28. Primer. *Izračunati površinu Bernulijeve lemniskate date u polarnim koordinatama* $\rho^2 = a^2\cos(2\phi)$ *(sl. 1.39.).*

Rešenje. Ako su x i y date u polarnim koordinatama, tj. $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, tada se površina ograničena sa krivom $\rho = f(\phi)$ i polupravama $\phi = \phi_1$ i $\phi = \phi_2$

izračunava po formuli

$$P = \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} (f(\phi))^2\, d\phi.$$

Da bi u našem slučaju odredili granice integracije, tj. ϕ_1 i ϕ_2, rešićemo jednačinu $\rho = a\sqrt{\cos(2\phi)} = 0$ uz uslov $|2\phi| \leq \pi/2$. Takva rešenja su $\phi_1 = -\pi/4$ i $\phi_2 = \pi/4$, pa je tražena površina

$$P = 2\left(\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos(2\phi)\, d\phi\right) = a^2\frac{\sin(2\phi)}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}(1-(-1)) = a^2. \ \blacktriangleright$$

5.29. Primer. *Izračunati površinu kardioide date u polarnim koordinatama sa* $\rho = a(1+\cos\phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, *ako je a pozitivan parametar (sl. 1.38.).*

Rešenje. $P = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\phi)^2\, d\phi = \frac{a^2}{2}\left(\phi + 2\sin\phi + \frac{\phi}{2} + \frac{\sin(2\phi)}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}a^2.$ ▶

5.8.4 Parametarski zadata kriva

Neka je kriva C u ravni data u parametarskom obliku tj. $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ i $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Tada se površina krivolinijskog trapeza određenog krivom C nad $[a,b]$ određuje kao

$$P = \int_a^b y\, dx = \int_\alpha^\beta h(t)\, g'(t)\, dt. \tag{5.15}$$

5.30. Primer. *Izračunati površinu ograničenu jednim lukom cikloide* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $(a > 0)$, *i* x*–osom (sl. 1.34.).*

Rešenje. Primetimo da je za $t = 0$, $x = 0$ i $y = 0$, a da je za $t = \pi$, $x = a$ i $y = 0$. To znači da je grafik date funkcije iznad x–ose nad $[0, a]$, odnosno za $t \in [0, 2\pi]$. Dakle, tražena površina je $P = \int_0^a y\, dx$. Kako je $dx = a(1-\cos t)\, dt$, to se može pisati

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)\, dt = a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt \\ &= a^2\left(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

5.31. Primer. *Izračunati površinu ograničenu astroidom* $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$.

Rešenje. Lako je videti (sl. 1.35.) da kada t prođe interval $[0, 2\pi]$, tada se u ravni dobija zatvorena kriva koja se sastoji od četiri podudarna dela. Zato je tražena

površina

$$\begin{aligned} P &= 4\int_{\pi/2}^{0} y(t)\, dx(t) = 4\int_{\pi/2}^{0} y(t)\, x'(t)\, dt = 4\int_{\pi/2}^{0} (-3a^2)\sin^4 t\cos^2 t\, dt \\ &= 12a^2\int_0^{\pi/2} \frac{(1-\cos 2t)^2}{4}\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{12a^2}{8}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t)\, dt \\ &= \frac{3a^2}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 4t}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin 2t - \frac{\sin^3 2t}{3}\right)\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{8}. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

5.8.5 Zapremina obrtnih tela

Neka telo nastaje obrtanjem neprekidne krive $y = f(x)$ oko x–ose nad $[a,b]$. U cilju određivanja zapremine tako nastalog tela, izvršićemo podelu zatvorenog intervala $[a,b]$ na podintervale $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, i označiti sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (sl. 5.11.).

Na svakom od podintervala posmatramo pravougaonik čija je jedna stranica podinterval $[x_{i-1} - x_i]$ dužine Δx_i, a druga stranica jednaka vrednosti funkcije f u proizvoljnoj tački podintervala Δx_i, tj. jednaka $f(\omega_i)$, $\omega_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Svaki od tih pravougaonika obrtanjem oko x–ose obrazuje valjak visine Δx_i, sa poluprečnicima osnove jednak $f(\omega_i)$.

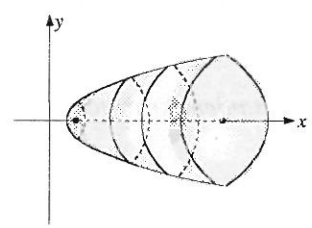
U ovom slučaju svakako smo pretpostavili da je funkcija f nenegativna na $[a,b]$, (tj. $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$.)

Kako je zapremina svakog valjka $\pi(f(\omega_i))^2\Delta x_i$ $i = 1, 2, \ldots n$, to možemo pisati

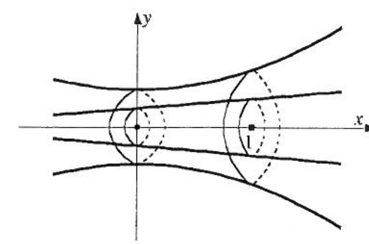
$$V = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(f(\omega_i))^2\Delta x_i = \pi\int_a^b (f(x))^2\, dx.$$

Ako telo nastaje obrtanjem krive $x = g(y)$ oko y–ose nad $[c,d]$, tada je njegova zapremina

$$V = \pi\int_c^d (g(y))^2\, dy.$$



Slika 5.11.



Slika 5.12.

5.32. Primer. *Odrediti zapreminu tela koje nastaje obrtanjem parabole $y = x^2 + 1$ nad $[-1,1]$ oko x–ose.*

Rešenje. $V = \pi\int_{-1}^{1}(x^2+1)^2\,dx = \pi\int_{-1}^{1}(x^4+2x^2+1)\,dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}+2\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{56\pi}{15}$. ▶

5.33. Primer. *Odrediti zapreminu tela koje nastaje obrtanjem kubne parabole $y = x^3$ nad $[1,8]$ oko y–ose.*

Rešenje. Iz $x = \sqrt[3]{y}$, sledi $V = \pi\int_{1}^{8}(y^{1/3})^2\,dy = \pi\int_{1}^{8} y^{2/3}\,dy = \pi\left(\frac{3y^{5/3}}{5}\right)\Big|_{1}^{8} = \frac{93\pi}{5}$. ▶

5.34. Primer. *Odrediti zapreminu tela koje nastaje obrtanjem površine ograničene parabolom $y = x^2+2$ i $y = \frac{x}{2}+1$ nad $[0,1]$ oko x–ose (sl. 5.12.).*

Rešenje.

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1\left((x^2+2)^2-\left(\frac{x}{2}+1\right)^2\right)dx = \pi\int_0^1\left(x^4+\frac{15}{4}x^2-x+3\right)dx \\ &= \pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{5x^3}{4}-\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_0^1 = \frac{79\pi}{20}. \end{aligned}$$ ▶

5.35. Primer. *Odrediti zapreminu tela koje nastaje obrtanjem površine ograničene krivom $y = \frac{1}{8}x^3$ i pravom $y = 2x$ oko y–ose.*

Rešenje. Presečne tačke datih krivih su $O(0,0)$, $A(4,8)$ i $B(-4,-8)$. Kako se date krive mogu zapisati u obliku $x = 2\sqrt[3]{y}$, odnosno $x = \frac{y}{2}$, to je zbog njihove neparnosti:

$$V = 2\pi\int_0^8\left(4y^{2/3}-\frac{1}{4}y^2\right)dy = 2\pi\left(\frac{12y^{5/3}}{5}-\frac{y^3}{12}\right)\Big|_0^8 = \frac{1024\pi}{15}.$$ ▶

5.36. Primer. *Odrediti zapreminu torusa koji se dobija obrtanjem kružnice $x^2+(y-a)^2 = r^2$, oko x–ose, ako je $0 < r < a$.*

Rešenje. Označimo sa f_1 i f_2 redom funkcije date sa

$$f_1(x) = a+\sqrt{r^2-x^2} \quad \text{i} \quad f_2(x) = a-\sqrt{r^2-x^2}, \quad |x| \le r.$$

Tada je tražena zapremina $V = V_1 - V_2$, gde je $V_1 = \pi\int_{-r}^{r} f_1^2(x)\,dx$ i $V_2 = \pi\int_{-r}^{r} f_2^2(x)\,dx$. Prema tome je

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-r}^{r}\left((a+\sqrt{r^2-x^2})^2-(a-\sqrt{r^2-x^2})^2\right)dx \\ &= \pi\int_{-r}^{r}\left(a^2+2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2-a^2+2a\sqrt{r^2-x^2}-r^2+x^2\right)dx \\ &= 4a\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2} = 8a\pi\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Poslednji integral se rešava smenom $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\,dt$, pa je

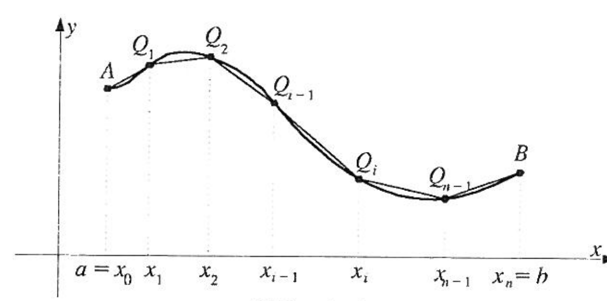
$$V = 8a\pi r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 8\pi r^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 8a\pi r^2\cdot\frac{\pi}{4} = 2ar^2\pi^2.$$ ▶

5.8.6 Dužina luka krive

Neka funkcija f ima neprekidan prvi izvod na $[a,b]$. Dužina luka ℓ date krive od tačke $A(a,f(a))$ do tačke $B(b,f(b))$ određuje se pomoću određenog integrala na sledeći način (sl.5.13.).

Neka je $\mathcal{P}$ podela intervala $[a,b]$, tj. neka je $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ i neka je $\lambda(\mathcal{P})$ parametar podele $\mathcal{P}$. Kao i ranije, stavimo Δx_i za dužinu i– tog intervala $[x_{i-1},x_i]$. Odredimo u deonim tačkama x_i ordinate $f(x_i)$, koje na krivoj određuju tačke Q_i, $i = 0,1,\ldots,n$. Posmatraćemo izlomljenu liniju $Q_0Q_1Q_2\ldots Q_n$, sa delovima $Q_{i-1}Q_i$, čije su dužine s_i. Tada je dužina luka krive od tačke A do B približno jednaka dužini izlomljene linije $Q_0Q_1Q_2\ldots Q_n$. Zbog toga se za dužinu luka nad intervalom uzima granična vrednost

$$\ell = \lim_{\lambda(\mathcal{P})\to 0}\sum_{i=0}^{n} s_i,$$



Slika 5.13.

ako ta granica postoji. Kako je

$$s_i = \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + \Delta x_i^2}, \tag{5.16}$$

to na osnovu Lagranžove teoreme srednje vrednosti postoji tačka $\omega_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takva da važi

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\omega_i) \cdot \Delta x_i.$$

Tako relacija (5.16) postaje $s_i = \sqrt{(f'(\omega_i))^2 + 1} \cdot \Delta x_i$. Odatle je

$$\ell = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \to 0} \sum_{i=0}^{n} s_i = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \to 0} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(f'^2(\omega_i) + 1} \cdot \Delta x_i.$$

Prema tome se dužina luka krive određuje po formuli

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{5.17}$$

5.37. Primer. *Odrediti dužinu luka krive* $f(x) = 3x^{2/3} - 10$ *od tačke* $A(8,2)$ *do tačke* $B(27,17)$.

Rešenje. Kako je $f'(x) = 2x^{-1/3}$, to je tražena dužina luka

$$\ell = \int_8^{27} \sqrt{1 + (2x^{-1/3})^2}\, dx = \int_8^{27} \sqrt{1 + \frac{4}{x^{2/3}}}\, dx = \int_8^{27} \frac{\sqrt{4 + x^{2/3}}}{x^{1/3}}\, dx.$$

Poslednji integral se rešava smenom $t = x^{2/3} + 4$, $dt = \frac{2}{3} x^{-1/3} dx$, pri čemu je za $x = 8$, $t = 8$, a za $x = 27$, $t = 13$. Tako se dobija

$$\ell = \frac{3}{2} \int_8^{13} \sqrt{t}\, dt = t^{3/2} \Big|_8^{13} = \sqrt{13^3} - \sqrt{8^3} \approx 24,245. \ \blacktriangleright$$

5.38. Primer. *Odrediti dužinu luka krive* $f(x) = \ln x$ *od tačke* $A(1,0)$ *do tačke* $B\left(\sqrt{3}, \frac{\ln 3}{2}\right)$.

Rešenje. Kako je $f'(x) = 1/x$, to je $\ell = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx$. Smenom $x = \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, pri čemu je $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}$, a nove granice integracije postaju $\pi/4$ i $\pi/3$. Tako dobijamo

$$\ell = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t \cos^2 t} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t}\, dt = \left(\frac{1}{\cos t} + \ln|\operatorname{tg}(t/2)| \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln 3 - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}. \ \blacktriangleright$$

Neka je kriva data u parametarskom obliku $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, gde su

funkcije g i h neprekidno diferencijabilne nad $[\alpha, \beta]$ i važi $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Tada se dužina luka te krive nad intervalom izračunava kao $[\alpha, \beta]$ izračunava kao

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}\, dt. \tag{5.18}$$

5.39. Primer. *Odrediti dužinu luka astroide* $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, *ako je a pozitivan parametar (sl. 1.35.).*

Rešenje. Kako je $x_t' = 3a \sin^2 t \cos t$ i $y_t' = -3a \cos^2 t \sin t$, to je

$$\begin{aligned}
\ell &= 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y_x')^2}\, dx = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt \\
&= = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 (\sin^4 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^4 t)}\, dt = 12a \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\, dt = 12a \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} \\
&= 6a. \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

5.8.7 Površina obrtnih tela

Neka telo nastaje obrtanjem nenegativne krive $y = f(x)$ oko x–ose nad $[a,b]$, nad kojim funkcija f ima neprekidan prvi izvod. Podelimo $[a,b]$ na podintervale $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, i, kao i ranije, označimo sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Na svakom od podintervala posmatrajmo trapez ograničen sa intervalom $[x_{i-1}, x_i]$ na x–osi, ordinatama dužine $f(x_{i-1})$ i $f(x_i)$, i duž s_i koja spaja tačke na krivoj određene ordinatama u tačkama x_i i x_{i-1}. Svaki od tih trapeza pri rotaciji oko x–ose obrazuje zarubljenu kupu čiji su poluprečnici osnova $f(x_i)$ i $f(x_{i-1})$, a izvodnica s_i. Površina omotača takve zarubljene kupe je $P_{o_i} = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \cdot s_i$. Prema tome, ako je $\lambda(\mathcal{P})$ parametar podele, tada je površina omotača M posmatranog obrtnog tela jednaka

$$M = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1} + f(x_i)) \cdot s_i = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

5.40. Primer. *Odrediti površinu omotača tela koje nastaje obrtanjem oko x–ose krive* $y^2 = 12x$ *od tačke* $x = 0$ *do tačke* $x = 3$.

Rešenje. Kako je $2yy' = 12$, tj. $y' = 6/y$, to je tražena površina jednaka

$$\begin{aligned}
M &= 2\pi \int_0^3 y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi \int_0^3 y \frac{\sqrt{36 + y^2}}{y}\, dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{36 + 12x}\, dx \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot \frac{(36 + 12x)^{3/2}}{3} \Big|_0^3 = 24(2\sqrt{2} - 1)\pi. \ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

5.41. Primer. *Proveriti da je površina lopte poluprečnika a jednaka $M = 4\pi a^2$.*

Rešenje. Posmatraćemo samo gornji deo kružnice date u parametarskom obliku $x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad 0 \le t \le \pi$, koja se obrće oko x-ose. Tako dobijamo loptu čija je površina

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\pi} 2\pi a \sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,dt = 2\pi a^2\int_0^{\pi}\sin t\,dt \\ &= -2\pi a^2\cos t\Big|_0^{\pi} = -2\pi a^2(-1-1) = 4\pi a^2. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

5.42. Primer. *Odrediti površinu omotača tela koje nastaje rotacijom oko y−ose krive $x = y^3$ od tačke $x = 0$ do tačke $x = 8$.*

Rešenje. Odgovarajuće vrednosti za $x = 0$ i $x = 8$ su redom $y = 0$ i $y = 2$, pa je tražena površina jednaka:

$$M = 2\pi\int_0^8 x\sqrt{1+(x_y')^2}\,dy = 2\pi\int_0^2 y^3\sqrt{1+9y^4}\,dy = \frac{2\pi}{36}\int_1^{145}\sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{27}\left(\sqrt{145^3}-1\right). \blacktriangleright$$

5.9 Numeričko integraljenje

U radu sa **inženjerskim** problemima često treba izračunati određeni integral neke neprekidne funkcije čiju primitivnu funkciju nije lako naći, ili pak određeni integral neke funkcije date tabličnim vrednostima dobijenim izvođenjem nekog eksperimenta. Na primer, integrali

$$\int_0^1 e^{x^2}dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x} \qquad \text{i} \qquad \int_1^2\frac{e^x}{x}dx$$

se ne mogu dobiti primenom Njutn-Lajbnicove formule. Da bismo izračunali takve integrale mi primenjujemo numeričke metode, tj. nalazimo njihovu približnu vrednost. Navešćemo **tri** najčešće korišćena pravila za približno izračunavanje određenog integrala i daćemo za sva tri formule za procenu greške-odstupanja približne vrednosti od tačne vrednosti integrala.

5.9.1 Pravilo pravougaonika

Neka je f neprekidna funkcija na $[a,b]$. Da bismo približno izračunali integral $\int_a^b f(x)\,dx$ podelimo interval $[a,b]$ tačkama $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ na n jednakih delova (njihova dužina je $h = \dfrac{b-a}{n}$) i u svakom podintervalu uzmimo

tačku: $c_k = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{2}$, $k = 1,2,\ldots,n$. Onda imamo približnu formulu

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$

koja se zove pravilo **pravougaonika**. Imamo i odgovarajuće formule ako tačke c_k biramo na neki drugi način.

Zna se da ako funkcija f ima neprekidan prvi izvod $f'(x)$ na $[a,b]$ apsolutna greška aproksimacije nije veća od $\dfrac{(b-a)^2}{2n}\cdot M$, gde je $M = \max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$.

5.43. ***Primer.*** *Izračunati pravilom pravougaonika integral $\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ uzimajući $n = 4$.*

Rešenje. Pravilo pravougaonika daje

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{8}}+\frac{1}{1+\frac{3}{8}}+\frac{1}{1+\frac{5}{8}}+\frac{1}{1+\frac{7}{8}}\right) = 2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right) = 0.6912.$$

Procenimo sada grešku aproksimacije. Pošto je $f(x) = \frac{1}{x+1}$ onda je $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$. Na $[0,1]$ je $M = \max\limits_{0\le x\le 1}|f'(x)| = 1$; odakle sledi da učinjena greška nije veća od

$$\frac{(b-a)^2}{2n}\cdot M = \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

Njutn-Lajbnicova formula daje tačnu vrednost integrala:

$$\int_0^1\frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)|_0^1 = \ln 2 \approx 0.69315.$$

Apsolutna greška pravilom pravougaonika je manja od 0.001. što je u saglasnosti sa procenom koju daje teorija. ▶

5.9.2 Pravilo trapeza

Želimo da izračunamo integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gde je f neprekidna funkcija na $[a,b]$. Jednostavnosti radi, uzmimo da je $f(x)\ge 0$. Podelimo interval $[a,b]$ tačkama $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ na n podintervala jednake dužine. Nacrtajmo zatim n vertikalnih pravih linija $x = x_k$, $k = 0,1,2,\ldots,n$ i konstruišimo n trapeza (sl.5.14.). Ukupna površina tih n trapeza je približno jednaka površini krivolinijske figure $aABb$ tako da je

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_0)+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1)+\cdots$$

$$+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}(x_n-x_{n-1})$$
$$=\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right],$$

gde su $f(x_{k-1})$ i $f(x_k)$ osnovice trapeza a $x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$ su njihove visine. Tako dolazimo do formule

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]$$

koja se zove pravilo **trapeza**. Napomenimo da je tačnost približnog izračunavanja veća što je prirodan broj n veći. Zna se da ako data funkcija f ima neprekidan drugi izvod $f''(x)$ na $[a,b]$, onda apsolutna greška aproksimacije nije veća od $\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M$, gde je $M=\max a\leq x\leq b\,|f''(x)|$.

5.44. Primer *Izračunati pravilom trapeza integral* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ *uzimajući* $n=10$.

Rešenje. Podelimo interval $[0,1]$ tačkama $x_0=0, x_1=0.1, x_2=0.2, \ldots, x_9=0.9, x_{10}=1$, na 10 jednakih delova. Izračunajmo vrednosti funkcije $f(x)=\frac{1}{x+1}$ u tim tačkama. Imamo

$$\begin{array}{lllllllll}
f(0) & = & 1.0000, & f(0.1) & = & 0.9091, & f(0.2) & = & 0.8333,\\
f(0.3) & = & 0.7692, & f(0.4) & = & 0.7143, & f(0.5) & = & 0.6667,\\
f(0.6) & = & 0.6250, & f(0.7) & = & 0.5882, & f(0.8) & = & 0.5556,\\
f(0.9) & = & 0.5263, & f(1) & = & 0.5000. & & &
\end{array}$$

Onda primenom formule za pravilo trapeza, dobijamo

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1.0000+0.5000}{2}+0.9091+0.8333+0.7692+0.7143\right.$$
$$\left.+0.6667+0.6250+0.5882+0.5556+0.5263\right)=0.69377\approx 0.6938.$$

Procenimo sada grešku aproksimacije. Pošto je

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \text{ onda je } f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2} \text{ i } f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}.$$

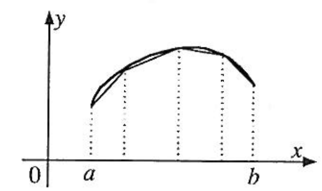
Očigledno je $M=\max\limits_{0\leq x\leq 1}|f''(x)|=2$, odakle sledi da učinjena greška nije veća od

$$\frac{(b-a)^2}{12n^2}\cdot M=\frac{2}{12\cdot 10^2}=\frac{1}{600}<0.0017.$$

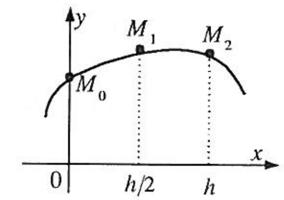
Njutn-Lajbnicova formula daje tačnu vrednost integrala:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1}=\ln(x+1)|_0^1=\ln 2\approx 0.69315.$$

Apsolutna greška pravilom trapeza je manja od 0.0007; znači oba rezultata su saglasna sa procenom koju daje teorija. ▶



Slika 5.14.



Slika 5.15.

5.9.3 Pravilo parabole

Najpre počinjemo sa izračunavanjem površine Q ravne figure ograničene lukom $\widehat{AB}$ parabole $y=ax^2+bx+c$ koja prolazi kroz tačke $M_0(0,y_0), M_1\left(\frac{h}{2},y_1\right)$ i $M_2(h,y_2)$, vertikalnim pravama $x=0$ i $x=h$ i $x-$osom (sl.5.15). Ta površina je data sa

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^h (ax^2+bx+c)\,dx = a\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h+b\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^h+c\,x|_0^h\\
&= a\frac{h^3}{3}+b\frac{h^2}{3}+ch=\frac{h}{6}\left(2ah^2+3bh+6c\right).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Sada ćemo izraziti površinu Q preko ordinata tačaka M_0, M_1 i M_2. Zamenjivanjem koordinata tih tačaka u jednačinu date parabole, dobijamo

$$y_0=c, \qquad y_1=a\frac{h^2}{4}+b\frac{h}{2}, \qquad y_2=ah^2+bh+c.$$

Odatle je

$$2ah^2+3bh+6c=y_0+4y_1+y_2 \quad \text{tj.} \quad Q=\tfrac{h}{6}(y_0+4y_1+y_2).$$

Posmatrajmo sada određeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gde je f neprekidna nenegativna funkcija definisana na $[a,b]$. Podelimo interval $[a,b]$ na $2n$ jednakih delova tačkama $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{2n-2}<x_{2n-1}<x_{2n}=b$ i napišimo navedeni integral u obliku

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx+\cdots+\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}=b} f(x)\,dx. \tag{5.20}$$

Sa $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_{2n-2}, M_{2n-1}, M_{2n} = B$ ćemo označiti tačke preseka vertikalnih linija $x = x_k, k = 0,1,2,...,2n$, sa grafikom funkcije $y = f(x)$; neka su $y_0, y_1, ..., y_{2n-1}, y_{2n}$ respektivno ordinate tako dobijenih presečnih tačaka (sl.5.15.). Ako sada nacrtamo parabolu sa vertikalnom osom simetrije koja prolazi kroz svake tri tačke $M_{2k-2}, M_{2k-1}, M_{2k}$ $(k = 1,2,...,n)$ dobijamo n krivolinijskih ravnih figura ograničene odozgo parabolama. Pošto je površina ravne krivolinijske figure koja odgovara podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ dužine $h = \frac{b-a}{n}$ približno jednaka površini "paraboličkog" trapeza, iz formule (5.19) onda sledi

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}\right),$$

gde je $y_k = f(x_k)$, $k = 1,2,...,n$. Sada formula (5.20) postaje

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + y_{2n} + 2\sum_{k=1}^{n-1} y_{2k} + 4\sum_{k=1}^{n} y_{2k-1}\right).$$

Poslednja formula je pravilo **parabole** ili poznato u literaturi kao **Simpsonova formula**.

Treba znati da ako f ima neprekidan četvrti izvod $f^{(4)}(x)$ na $[a,b]$ greška koja se pravi primenom Simpsonove formule nije veća od $\frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot M$, gde je $M = \max\limits_{a \le x \le b} \left|f^{(4)}(x)\right|$. Greška koja se dobija primenom Simpsonove formule opada brže kad n raste, nego greška u pravilu trapeza.

5.45. Primer *Izračunati integral* $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ *primenom Simpsonove formule, uzimajući da je* $2n = 4$.

Rešenje. Podelimo $[0,1]$ tačkama $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.50, x_3 = 0.75, x_4 = 1$, na jednake delove. Vrednosti funkcije $y = \frac{1}{x+1}$ u tim tačkama su $y_0 = 1.0000, y_1 = 0.8000, y_2 = 0.6662, y_3 = 0.5714, y_4 = 0.5000$. Onda Simpsonova formula daje

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{1-0}{3 \cdot 4}\left[y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)\right] \approx 0.69325.$$

Procenimo grešku ovako dobijenog rezultata: podintegralna funkcija $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ima za četvrti izvod $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$, tako da je $M = \max\limits_{0 \le x \le 1} \left|f^{(4)}(x)\right| = \max\limits_{0 \le x \le 1} \left|\frac{24}{(x+1)^5}\right| = 24$. Dakle, greška je najviše $\frac{24}{2880 \cdot 2^4} < 0.0005$. Upoređujući ovako dobijenu približnu vrednost integrala sa njegovom tačnom vrednošću, zaključujemo da je apsolutna greška primenom Simpsonove formule manja od 0.0001 kako je napred naznačeno. ▶

Izračunavanja pravilom trapeza i Simpsonovim pravilom integrala $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ pokazuju da se ovim drugim dobija veća tačnost nego prvim.

5.10 Nesvojstveni integrali

5.10.1 Nesvojstveni integrali prve vrste

5.46. Definicija. *Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[a,+\infty)$, tada je* **nesvojstveni integral prve vrste** *funkcije f na intervalu $[a,+\infty)$ granična vrednost*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{T \to +\infty} \int_a^T f(x)\,dx. \tag{5.21}$$

Ako granica u (5.21) postoji, kaže se da nesvojstveni integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{5.22}$$

konvergira, a ako ne postoji, da taj integral **divergira**.

Ako je, dodatno, neprekidna funkcija f i nenegativna na intervalu $[a,+\infty)$, tada je za fiksirano $T > a$ integral $\int_a^T f(x)\,dx$ površina između krive i intervala $[a,T]$ na $x-$osi, ograničena ordinatama u tačkama a i T. Prelaskom na graničnu vrednost kada $T \to +\infty$, nesvojstveni integral prve vrste iz (5.22) predstavlja površinu dela ravni ograničene sa intervalom $[a,+\infty)$ na $x-$osi, ordinatom u tački a i grafikom funkcije $y = f(x)$ nad $[a,+\infty)$.

Analogno se za neprekidnu funkciju na $(-\infty,b]$ uvodi **nesvojstveni integral prve vrste** na tom intervalu:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{T_1 \to -\infty} \int_{T_1}^b f(x)\,dx.$$

Konačno, po definiciji je za neprekidnu funkciju f na $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

(Može se pokazati da ova definicija ne zavisi od broja $a \in \mathbb{R}$.) Nesvojstveni integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira po definiciji ako oba nesvojstvena integrala na desnoj strani konvergiraju.

5.47. Primer. *Odrediti da li dati nesvojstveni integrali konvergiraju:*

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^2}$; b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}$;

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$; e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^{3x}\,dx$; f) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-ax}\,dx$, $a\in\mathbb{R}$.

Rešenja. Konvergenciju datih integrala proverićemo direktnim izračunavanjem.

a) Po definiciji 5.46 je

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^2}=\lim_{T\to+\infty}\int_2^T\frac{dx}{(x-1)^2}=\lim_{T\to+\infty}\frac{-1}{x-1}\Big|_2^T=-\lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T-1}-\frac{1}{2-1}\right)=1.$$

Dakle, dati integral konvergira.

b) Dati integral divergira, jer je $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{T\to+\infty}\int_1^T\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{T\to+\infty}2\sqrt{x}\Big|_1^T=+\infty.$

c) Dati integral konvergira, jer važi

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}=\lim_{T\to+\infty}\int_0^T\frac{dx}{4+x^2}=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^T=\frac{1}{2}\lim_{T\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{T}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

d) Neka je prvo $\alpha=1$. Tada dati integral divergira, jer je

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{T\to+\infty}\int_1^T\frac{dx}{x}=\lim_{T\to+\infty}\ln x\Big|_1^T=\lim_{T\to+\infty}(\ln T-\ln 1)=+\infty.$$

Za $\alpha\neq1$ je $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{T\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^T=\lim_{T\to+\infty}\left(\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right).$

Zadnja granična vrednost postoji za $1-\alpha<0$, tj. za $\alpha>1$, i jednaka je $\dfrac{1}{\alpha-1}$, dok za $\alpha<1$ ne postoji. Dakle nesvojstveni integral

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\tag{5.23}$$

konvergira za $\alpha>1$, a divergira za $\alpha\le1$.

e) Dati integral konvergira, jer je $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{3x}\,dx=\lim_{T\to-\infty}\int_T^0 e^{3x}\,dx=\lim_{T\to-\infty}\frac{e^{3x}}{3}\Big|_T^0=\frac{1}{3}.$

f) Očevidno je da dati integral divergira za $a=0$.

Neka je sada $a\neq0$. Tada je

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\,dx=\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-ax}\,dx=-\frac{1}{a}\cdot\lim_{T\to+\infty}\left(e^{-ax}\right)\Big|_0^T=-\frac{1}{a}\cdot\lim_{T\to+\infty}\left(e^{-aT}-1\right).$$

Ako je $a>0$, tada zadnja granična vrednost postoji i jednaka je $\dfrac{1}{a}$, tj. tada dati integral konvergira, dok za $a<0$ on divergira. ▶

5.10.2 Nesvojstveni integrali druge vrste

5.48. Definicija. *Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[a,b)$, i važi bar jedna od sledećih jednakosti:*

$$\lim_{x\to b-}f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to b-}f(x)=-\infty,$$

(tj. ako je f neograničena u svakoj okolini tačke b), tada je **nesvojstveni integral druge vrste** *funkcije f na intervalu $[a,b]$ po definiciji jednak*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx.\tag{5.24}$$

Kao i u slučaju nesvojstvenih integrala prve vrste, integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira (resp. divergira), ako granična vrednost u (5.24) postoji (resp. ne postoji).

Ako je neprekidna funkcija i nenegativna na intervalu $[a,b)$, tada nesvojstveni integral druge vrste predstavlja površinu određenu sa intervalom $[a,b)$ na x–osi, ordinatom u tački a (tj. delom prave $x=a$) i grafikom krive nad tim intervalom.

Analogno se uvodi sledeći nesvojstveni integral druge vrste:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx,$$

pri čemu je funkcija f neprekidna na intervalu $(a,b]$ i nije ograničena u bilo kojoj okolini tačke a.

Konačno, ako je f neprekidna na skupu $[a,c)\bigcup(c,b]$, ali nije ograničena ni u jednoj okolini tačke c, tada je po definiciji

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon_1\to0+}\int_a^{c-\varepsilon_1}f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon_2\to0+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b}f(x)\,dx.$$

5.49. Primer. *Ispitati konvergenciju sledećih nesvojstvenih integrala:*

a) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; b) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{2-x}$; c) $\displaystyle\int_0^3\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; d) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Rešenja.

a) Po definiciji 5.48 je

$$\begin{aligned}\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}&=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{2-\varepsilon}\\&=\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2}-\arcsin 0\right)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Dakle, dati integral konvergira.

b) Dati integral ne konvergira, jer važi

$$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}(-\ln(2-x))\Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln 2-\ln\varepsilon) = +\infty.$$

c) Dati integral je jednak

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} + \lim_{\delta\to 0+}\int_{1+\delta}^3\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{3}{2}(1-x)^{2/3}\Big|_0^{1-\varepsilon} - \lim_{\delta\to 0+}\frac{3}{2}(1-x)^{2/3}\Big|_{1+\delta}^3\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{3}{2}(\varepsilon^{2/3}-1)\right) - \lim_{\delta\to 0+}\frac{3}{2}\left((-2)^{2/3}-(-\delta)^{2/3}\right) = \frac{3}{2}(1-\sqrt[3]{4}).\end{aligned}$$

d) Za $\alpha\neq 1$ je $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right)$.
Dakle, dati integral konvergira za $1-\alpha>0$, tj. za $\alpha<1$, a divergira za $\alpha>1$. Ostavljamo čitaocu da pokaže da je integral $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x}$ takođe divergentan.

Na osnovu primera 5.47 d) i 5.49 d) sledi da je nesvojstveni integral $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ divergentan za *svaki* realan broj α. ▶

Dva kriterijuma za konvergenciju nesvojstvenih integrala

Neka je funkcija f neprekidna na $[a,b)$ i neka je neograničena u svakoj okolini tačke b.

a) Pretpostavimo, dodatno, da postoji neprekidna funkcija F sa osobinom

$$|f(x)|\le F(x),\quad x\in[a,b).$$

Tada važi: ako integral $\displaystyle\int_a^b F(x)\,dx$ konvergira, onda konvergira i integral $\displaystyle\int_a^b f(x),\,dx$ kao i integral $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$;

ako integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ divergira, onda divergira i integral $\displaystyle\int_a^b F(x)\,dx$.

b) Pretpostavimo, dodatno, da postoji neprekidna i pozitivna funkcija g nad $[a,b)$ sa osobinom da za neko $K\neq 0$ važi

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Tada pišemo $f(x)\sim K\cdot g(x)$, $x\to b-$, i kažemo da se f *ponaša kao* g *kada* $x\to b-$. Tada važi:

ako integral $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konvergira, onda konvergira i integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$;

ako integral $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ divergira, onda divergira i integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Razumljivo, postoje i analogni kriterijumi za konvergenciju nesvojstvenih integrala prve vrste iz (5.22), samo što se u slučaju 2. koristi ponašanje funkcije kada $x\to+\infty$. Preporučujemo čitaocu da ih sam formuliše.

5.50. Primer. *Ispitati konvergenciju sledećih nesvojstvenih integrala:*

$$\text{a)}\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}+1};\qquad \text{b)}\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}};\qquad \text{c)}\ \int_0^{+\infty}e^{-3x}\cos(x^2)\,dx.$$

Rešenja.

a) Podintegralna funkcija se ponaša kao funkcija $\frac{1}{x^{3/2}}$ kada $x\to+\infty$, u oznaci

$$\frac{1}{x^{3/2}+1}\sim\frac{1}{x^{3/2}},\quad x\to+\infty,\quad \text{što znači da je}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{3/2}+1}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = 1.$$

Prema primeru 5.47 d), nesvojstveni integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ konvergira, jer je $\alpha:=3/2>1$. Na osnovu kriterijuma analognog slučaju 2., sledi da i nesvojstveni integral prve vrste $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}+1}$ konvergira.

Konvergencija ovog integrala se može pokazati i na osnovu toga što za $x>1$ važi: $\frac{1}{x^{3/2}+1}<\frac{1}{x^{3/2}}$, pa se može primeniti slučaj 1.

b) Pre svega je

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}. \tag{5.25}$$

Prvi nesvojstveni integral je druge vrste i konvergira na osnovu ponašanja $\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{1/2}}$, $x\to 0+$, jer je $\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}}{\frac{1}{x^{1/2}}}=1$, i primera 5.49 d) $(1/2<1)$. Drugi nesvojstveni integral u 5.25 je prve vrste i konvergira zbog ponašanja $\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\sim\frac{1}{x^{3/2}}$ $x\to+\infty$, jer je $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}}{\frac{1}{x^{3/2}}}=1$, i primera 5.47 d) $(3/2>1)$. Znači, dati nesvojstveni integral konvergira.

c) Kako je $|e^{-3x}\cos(x^2)|\le e^{-3x}$, $x\in[0,+\infty)$, a integral $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-3x}\,dx$ konvergira jer je

$a := 3 > 0$, (videti primer 5.47 f)), to i dati nesvojstveni integral takođe konvergira. ▶

5.51. Primer. *Ispitati za koje vrednosti realnih parametara p i $q > 0$ konvergiraju sledeći integrali:*

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p \operatorname{arctg} x}{1+x^q}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$;

Rešenja.

a) Dati integral se može zapisati kao zbir:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p \operatorname{arctg} x}{1+x^q}\,dx = \int_0^1 \frac{x^p \operatorname{arctg} x}{1+x^q}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^p \operatorname{arctg} x}{1+x^q}\,dx = I_1 + I_2,$$

pa ćemo odrediti p i $q > 0$ tako da svaki od integrala I_1 i I_2 konvergira. Na osnovu $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$, pa važi $\operatorname{arctg} x \sim x$, $x \to 0+$ za $q > 0$: sledi $\displaystyle\frac{x^p \operatorname{arctg} x}{1+x^q} \sim x^{p+1}$, $x \to 0+$.

Pošto integral $\displaystyle\int_0^1 x^{p+1}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{-p-1}}$, konvergira za $-p-1 < 1$, tj. za $p > -2$, to sledi konvergencija integrala I_1 za $p > -2$ i $q > 0$.

Na osnovu jednakosti $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi/4} = 1$, važi $\operatorname{arctg} x \sim \pi/4$, $x \to +\infty$, što povlači

$$\frac{x^p \operatorname{arctg} x}{1+x^q} \sim \frac{\pi}{4} x^{p-q}, \quad x \to +\infty,$$

sledi da integral I_2 konvergira ako i samo ako konvergira integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{p-q} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{-p+q}}$.

Na osnovu primera 5.21 d), zadnji integral konvergira za $-p+q > 1$, pa i I_2 konvergira za $-p+q > 1$.

Skup u pq ravni, uz dodatni uslov $q > 0$, na kome dati integral konvergira je presek skupova na kojima konvergiraju I_1 i I_2. Znači, dati integral konvergira ako istovremeno važe nejednakosti $p > q-2$, $-p+q > 1$ i $q > 0$.

b) Dati integral možemo napisati kao

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = I_1 + I_2.$$

Prvi integral I_1 konvergira za $p < 1$, jer je $\displaystyle\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{x^p}$, $x \to 0+$, a integral $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{x^p}$ konvergira za $p < 1$. Na osnovu ponašanja

$$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{\cos^q x} = \frac{1}{\sin^q(\pi/2 - x)} \sim \frac{1}{(\pi/2 - x)^q}, \quad x \to \pi/2-,$$

sledi da drugi integral konvergira za $q < 1$.

Znači dati integral konvergira za $p < 1$, $q < 1$. ▶

Glava 6

Funkcije više promenljivih

6.1 Osnovni pojmovi

Neka je $X \subset \mathbb{R}^2$ skup uređenih parova realnih brojeva. Pridruživanje koje svakom elementu skupa X dodeljuje samo jedan element skupa $Y \subset \mathbb{R}$ naziva se **realna funkcija dve realne promenljive.**

Uopšte, ako su $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$ (X i Y su skupovi uređenih n−torki, respektivno m−torki), tada se pridruživanje koje svakom elementu skupa $X \subset \mathbb{R}^n$ dodeljuje samo jedan element skupa $Y \subset \mathbb{R}^m$ naziva **funkcija više realnih promenljivih.**

Domen funkcije f se, isto kao i kod funkcije jedne promenljive, naziva i definicioni skup funkcije f.

6.1. Primer. *Odrediti definicione skupove sledećih realnih funkcija f, tj. najšire skupove u $\mathbb{R}^2$ odnosno $\mathbb{R}^3$ na kojima dati analitički izrazi određuju realan broj:*

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy\cos x}$; **b)** $f(x,y) = \dfrac{3x^3 - y - 6\cos y}{x^2+y^2}$;

c) $f(x,y) = \dfrac{x+y-\sin^2 x}{x^2+y^2+1}$; **d)** $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$;

e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-9}$; **f)** $f(x,y) = \ln^2(x+y^2)$;

g) $f(x,y,z) = x\ln(xyz)$; **h)** $f(x,y) = \arccos\dfrac{x}{3} + \sqrt[4]{xy}$.

Rešenja.

a) Imenilac mora biti različit od nule, odnosno mora biti $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $\cos x \neq 0$, tj. $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Prema tome, definicioni skup funkcije f je

$D_f = \{(x,y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0, x \neq (2k+1)\pi/2, y \neq 0, k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Funkcija nije definisana samo u tački $O(0,0)$, te je $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

c) Funkcija je definisana na celom skupu $\mathbb{R}^2$.

d) Funkcija je definisana za $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, odnosno u unutrašnjosti centralnog kruga poluprečnika 3, tj. za $x^2 + y^2 < 9$, kao i na samoj kružnici $x^2 + y^2 = 9$.

e) Funkcija je definisana za $x^2 + y^2 + z^2 - 9 \geq 0$, odnosno izvan centralne sfere poluprečnika 3, tj. za $x^2 + y^2 + z^2 > 9$, kao i na samoj sferi čija je jednačina $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

g) Funkcija je definisana za $x + y^2 > 0$, tj. $D_f = \{(x,y) | \, (x,y) \in \mathbb{R}^2, x > -y^2\}$.

f) Funkcija je definisana za $xyz > 0$, tj. u I, III, VI, VIII oktantu.

h) Funkcija je definisana za $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$, tj. za $-3 \leq x \leq 3$ (zbog funkcije arccos) i, dodatno, kada je $xy \geq 0$, što znači kada su x i y istog znaka (I i III kvadrant). ▶

Grafik funkcije $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se definiše na sledeći način:

$$G_f = \{(x, y, f(x,y)) | \, (x,y) \in X\}.$$

Geometrijski, grafik funkcije dve promenljive $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je **površ** u $\mathbb{R}^3$.

U opštem slučaju, ako je $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tada je $G_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$. Kako je $x \in \mathbb{R}^n$ i $f(x) \in \mathbb{R}^m$ sledi da je $G_f \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Površ S u prostoru $\mathbb{R}^3$ može biti zadata i **parametarski** pomoću sledeće tri jednakosti, gde su u i v parametri, $(u,v) \in A \subset \mathbb{R}^2$:

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v), \qquad z = z(u,v). \tag{6.1}$$

Svakom paru (u,v) iz oblasti definisanosti A funkcija $x(u,v)$, $y(u,v)$ i $z(u,v)$ odgovara tačka $(x,y,z) \in S$, gde su x, y i z određeni u (6.1).

Na primer, površ koja je grafik funkcije $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, $(x^2 + y^2 \leq r^2)$, se može zadati i na sledeći način:

$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\phi, \qquad z = \sqrt{r^2 - \rho^2},$$

gde je $0 \leq \rho \leq r$ i $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

6.1.1 Rastojanje u $\mathbb{R}^n$

Rastojanje od tačke x do tačke y, u skupu realnih brojeva dato je sa

$$d(x,y) = |x - y|. \tag{6.2}$$

Rastojanje u prostoru $\mathbb{R}^n$ uvodimo na sledeći način:

Neka je A neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$. Funkcija $d : A^2 \to \mathbb{R}$ je **rastojanje** u A ako ima sledeće osobine:

i) $d(x,y) \geq 0$, za sve $x, y \in A$, i $d(x,y) = 0$, ako i samo ako je $x = y$,

ii) $d(x,y) = d(y,x)$, za sve $x, y \in A$,

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, za sve $x, y, z \in A$.

Ako su $x, y \in A$, tada ćemo $d(x,y)$ zvati **rastojanje** od tačke x do tačke y.

Ako je $A = \mathbb{R}$, tada rastojanje dato sa (6.2) ima osobine i), ii) i iii).

U skupu $A = \mathbb{R}^2$ rastojanje od tačke $M(x_1, x_2)$ do tačke $N(y_1, y_2)$ određujemo sa

$$d(M,N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

a u skupu $A = \mathbb{R}^n$, $n > 2$, rastojanje od tačke $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ do tačke $N(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ određujemo sa

$$d(M,N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

U skupu $\mathbb{R}$ interval $(a - r, a + r)$ se može odrediti pomoću rastojanja na sledeći način: $\{x | \, x \in \mathbb{R}, \, d(a,x) < r\}$.

U skupu $\mathbb{R}^n$ uvodimo pojam **lopte** pomoću rastojanja d. **Lopta sa centrom u tački** a **i poluprečnikom** r, u oznaci $L(a,r)$, je skup

$$L(a,r) = \{x | \, x \in \mathbb{R}^n, \, d(a,x) < r\}, \quad a \in \mathbb{R}^n, \, r > 0.$$

U skupu $\mathbb{R}$ lopta $L(a,r)$ je interval $(a - r, a + r)$, a u skupu $\mathbb{R}^2$ lopta $L(a,r)$, gde je $a = (a_1, a_2)$, je skup $\{(x,y) | \, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \, (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2\}$. U ovom slučaju je $L(a,r)$ krug sa centrom u tački a i poluprečnikom r bez kružnice.

Okolina tačke $a \in \mathbb{R}^n$, u oznaci $U(a)$, je podskup od $\mathbb{R}^n$ koji sadrži loptu $L(a,r)$, za neko $r > 0$. Na primer, u skupu $\mathbb{R}$ okolina tačke $a \in \mathbb{R}$ je svaki skup $U(a)$ koji sadrži neku ε okolinu tačke a, odnosno interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. U skupu $\mathbb{R}^2$ okolina tačke $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ je svaki skup $U(a)$ koji sadrži skup

$\{(x,y) | \, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \, (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2\}$, za neko $r > 0$.

Skup $O \subset \mathbb{R}^n$ je **otvoren** ako je okolina svake svoje tačke. Na primer, otvoren interval (a,b) je otvoren skup, jer za svako $c \in (a,b)$ postoji $\delta > 0$ tako da je $(c - \delta, c + \delta) \subset (a,b)$.

Skup $Z \subset \mathbb{R}^n$ je **zatvoren** ako je skup $\mathbb{R}^n \setminus Z$ otvoren, gde je $\mathbb{R}^n \setminus Z$ komplement skupa Z. Na primer, zatvoren interval $[a,b]$ je zatvoren skup, jer je skup $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ otvoren skup.

Rub ∂D skupa $D \subset \mathbb{R}^n$ je skup onih tačaka $x \in \mathbb{R}^n$ koje imaju osobinu da je za svako $\varepsilon > 0$

$$L(x,\varepsilon) \cap D \neq \emptyset, \quad L(x,\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq \emptyset.$$

Na primer, ako je $D = [a,b]$, tada je $\partial D = \{a,b\}$,

a ako je $D = \{(x,y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq r^2\}$, tada je $\partial D = \{(x,y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = r^2\}$.

Tačka x je, dakle, rubna tačka skupa D ako je presek **svake** lopte $L(x,\varepsilon)$ sa centrom u x sa skupovima D i $\mathbb{R}^n \setminus D$, respektivno, **neprazan.**

Tačka $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ je **unutrašnja tačka** skupa D ako postoji neka lopta $L(a,r)$ takva da je $L(a,r) \subset D$.

Ako je, na primer, $D = [a,b]$, tada je svaka tačka $c \in (a,b)$ unutrašnja tačka skupa D.

Unutrašnjost skupa $D \subset \mathbb{R}^n$, u oznaci $\mathrm{int}D$, je skup svih unutrašnjih tačaka skupa D.

6.1.2 Granična vrednost

6.2. Definicija. *Neka je f funkcija dve realne promenljive, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gde D sadrži neki krug sa centrom u tački (x_0,y_0), sem možda tačku (x_0,y_0). Funkcija f ima* **graničnu vrednost** *L u tački (x_0,y_0) ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon, x_0, y_0) > 0$ tako da važi implikacija*

$$(\forall (x,y) \in D)\ 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Tada pišemo $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$

Primetimo da je u definiciji 6.2 (x_0,y_0) tačka nagomilavanja definicionog skupa (kao i kod funkcija jedne promenljive).

Kod funkcije jedne promenljive smo definisali levu i desnu graničnu vrednost u tački x_0, odnosno posmatrali približavanje tački x_0 sa leve i sa desne strane. U slučaju funkcije dve realne promenljive posmatramo približavanje tački (x_0,y_0) **po svakoj krivoj**, pa ako granična vrednost postoji, ona mora biti **jedinstvena** bez obzira na izabranu krivu po kojoj se približavamo tački (x_0,y_0).

6.3. Primer. *Ispitati da li postoje sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; b); $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\cdot y}{x^4+y^2}$; c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$.

Rešenja.

a) Ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $x=0$ (tj. po y-osi), tada je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1$, a ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=0$ (tj. po x-osi) tada je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1$. Znači, granična vrednost $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ne postoji.

Mogli smo takođe uzeti i mnoge druge krive. Na primer, kada se (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=3x$, tada imamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2-(3x)^2}{x^2+(3x)^2} = -\frac{4}{5}.$$

b) Ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=kx$, $k\neq 0$, tada je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\cdot y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = 0$. Međutim, ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po paraboli $y=x^2$, tada je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\cdot y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4} = \dfrac{1}{2}$. Znači, granična vrednost $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\cdot y}{x^4+y^2}$ ne postoji.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-y^2) = 0.$ ▶

6.4. Primer. *Ako je $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ ispitati da li sledeće granične vrednosti postoje:*

a) $\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\right)$; b) $\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\right)$; c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Rešenja.

a) Ako prvo fiksiramo promenljivu x, pa potražimo graničnu vrednost date funkcije kada $y\to0$, tada imamo $\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0} \dfrac{x-y}{x+y}\right) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{x} = 1$.

b) Ako sada prvo fiksiramo y i potražimo graničnu vrednost date funkcije kada $x\to0$ tada dobijamo $\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-y}{x+y}\right) = \lim\limits_{y\to0} \dfrac{-y}{y} = -1$, što je različito od a).

c) U ovom slučaju imamo graničnu vrednost funkcije dve promenljive. Ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=2x$ dobija se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-x}{3x} = -\dfrac{1}{3}$, a ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=x$ dobija se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{0}{2x} = 0$, pa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \text{ ne postoji.}$$

Znači granična vrednost funkcije dve promenljive **ne mora** biti jednaka graničnoj vrednosti funkcije **po svakoj od promenljivih** posebno. U prethodnom primeru $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, $((x_0,y_0)=(0,0))$ ne postoji, a granične vrednosti

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right),\ \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) \quad \text{su različite.} \ ▶$$

Osobine granične vrednosti funkcije dve promenljive analogne su kao i granične vrednosti funkcije jedne realne promenljive.

Ako funkcije f i g imaju granične vrednosti u tački (x_0,y_0), tada važi da je

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y)+g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y),$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y)\cdot g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\cdot \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y),$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}, \quad \text{ako je} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\neq 0.$$

Na primer,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}=0, \text{ jer je } -1\le \sin\frac{1}{xy}\le 1. \text{ ili}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,3)}\frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,3)}\frac{\sin xy}{yx}y = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\lim_{y\to 3} y = 3.$$

6.1.3 Neprekidnost funkcije

6.5. Definicija. *Neka tačka (x_0,y_0) pripada definicionom skupu $D\subset\mathbb{R}^2$ funkcije dve promenljive $f:D\to\mathbb{R}$. Funkcija f je* **neprekidna u tački** (x_0,y_0) *ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta(\varepsilon,x_0,y_0)>0$ tako da važi implikacija*

$$(\forall(x,y)\in D)\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

6.6. Teorema. *Ako je $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ i $(x_0,y_0)\in D$, tako da je (x_0,y_0) centar nekog kruga koji je sadržan u D, tada je funkcija f* **neprekidna u tački** (x_0,y_0) *ako i samo ako važi*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0). \tag{6.3}$$

Funkcija $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je **neprekidna na** A, $A\subset D$, ako je neprekidna u svakoj tački skupa A.

Neprekidnost funkcije f **po svakoj od promenljivih** x i y razlikuje od neprekidnosti funkcije f kao funkcije od dve promenljive. Naime, funkcija f je neprekidna po promenljivoj x, za svako fiksirano $y=y_0$, ako se granična vrednost u relaciji (6.3) posmatra po pravoj $y=y_0$. Analogno se uvodi neprekidnost po promenljivoj y.

Ako su funkcije $f,g:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ neprekidne u tački $P_0\in D$, tada su u toj tački neprekidne i funkcije koje predstavljaju njihov

zbir $f+g$; **razliku** $f-g$;

proizvod $f\cdot g$; **količnik** $\frac{f}{g}$, ako su vrednosti funkcije g različite od nule u nekoj okolini tačke P_0.

6.2 Izvodi funkcije

6.2.1 Parcijalni izvodi

Neka je $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, gde je (x_0,y_0) unutrašnja tačka skupa D. **Prvi parcijalni izvod funkcije** f **u odnosu na promenljivu** x u tački (x_0,y_0), u oznaci $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, je dat sa

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} := \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Prvi parcijalni izvod funkcije f **u odnosu na promenljivu** y u tački (x_0,y_0), u oznaci $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$, je dat sa

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} := \lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}.$$

U oba slučaja pretpostavljamo postojanje odgovarajućih graničnih vrednosti. Koristi se i obeležavanje $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Analogno se definišu parcijalni izvodi realne funkcije n promenljivih, $n>2$. Primetimo da se pri određivanju $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ promenljiva y uzima za konstantu, a pri određivanju $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ promenljiva x uzima za konstantu. Potreban uslov za postojanje parcijalnog izvoda po promenljivoj x je neprekidnost funkcije f po promenljivoj x za svako fiksirano y, dok je potreban uslov za postojanje parcijalnog izvoda po promenljivoj y neprekidnost funkcije f po promenljivoj y za svako fiksirano x. Međutim, parcijalni izvod po, na primer, promenljivoj x može da postoji i u tački u kojoj posmatrana funkcija nije neprekidna kao funkcija dve promenljive.

6.7. Primer. *Odrediti prve parcijalne izvode sledećih funkcija:*

a) $f(x,y) = x^7 + 3y^4 + 3x^2y + 5xy^2 + 7, \quad x,y \in \mathbb{R};$

b) $f(x,y) = 2x\cos y - y^3 \operatorname{tg} x + x^2e^y - y\ln x; \quad x > 0, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, y \in \mathbb{R};$

c) $f(x,y) = xy + \dfrac{x^2+y^2}{x-y}, \quad x \neq y, \ x,y \in \mathbb{R};$

d) $f(x,y) = x + y + \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{x+y}, \quad x \neq -y, \ x,y \in \mathbb{R};$

e) $f(x,y,z) = x + x^3z + zxy^3 + xz^2y - 3zy + 5, \quad x,y,z \in \mathbb{R};$

f) $f(x,y,z) = z\arcsin y + z^3\operatorname{ctg}(xy) + x^2e^y + y\ln(zx), \quad |y| \leq 1, \ xy \neq k\pi, \ k \in \mathbf{Z}, \ zx > 0, \ x,y,z \in \mathbb{R}.$

Rešenja.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 7x^6 + 6xy + 5y^2, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 12y^3 + 3x^2 + 10xy.$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\cos y - \dfrac{y^3}{\cos^2 x} + 2xe^y - \dfrac{y}{x}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x\sin y - 3y^2\operatorname{tg} x + x^2e^y - \ln x.$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y + \dfrac{2x(x-y) - (x^2+y^2)}{(x-y)^2}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + \dfrac{2y(x-y) + (x^2+y^2)}{(x-y)^2}.$

d) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{1 + \left(\dfrac{xy}{x+y}\right)^2} \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2 + 2xy + y^2 + (xy)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + \frac{1}{1 + \left(\dfrac{xy}{x+y}\right)^2} \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} = 1 + \frac{x^2}{x^2 + 2xy + y^2 + (xy)^2}.$$

e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 + 3x^2z + zy^3 + z^2y, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3xzy^2 + xz^2 - 3z, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z} = x^3 + xy^3 + 2xyz - 3y.$

f) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-z^3y}{\sin^2(xy)} + 2xe^y + \dfrac{y}{x}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{z}{\sqrt{1-y^2}} - \dfrac{z^3x}{\sin^2(xy)} + x^2e^y + \ln(zx),$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = \arcsin y + 3z^2\operatorname{ctg}(xy) + \dfrac{y}{z}.$ ▶

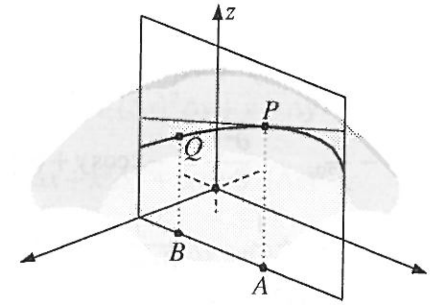
6.2.2 Geometrijsko tumačenje prvog parcijalnog izvoda

Posmatrajmo ravan koja prolazi kroz tačku $A(x_0,y_0,0)$ i paralelna je sa yz–ravni. Presek te ravni i površi S koju određuje funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je kriva koju ćemo označiti sa C_1 (sl.6.1.). Količnik $\dfrac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$ je koeficijent pravca sečice krive C_1 od tačke $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ do tačke $P_1(x_0,y_0+k,f(x_0,y_0+k))$. Prema tome, prvi parcijalni izvod po y funkcije $z = f(x,y)$ u tački (x_0,y_0), koji je jednak

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k},$$

predstavlja **koeficijent pravca tangente** u tački P_0 na krivu C_1, koja se nalazi u preseku površi S određene grafikom funkcije f i ravni paralelne sa yz–ravni koja prolazi kroz tačku A. Jednačina te ravni je $x = x_0$.

Prvi parcijalni izvod po x funkcije $z = f(x,y)$ u tački (x_0,y_0) predstavlja koeficijent



Slika 6.1.

pravca tangente u tački P_0 na krivu C_2, koja se nalazi u preseku površi određene funkcijom f i ravni paralelne sa xz–ravni koja prolazi kroz tačku A. Jednačina te ravni je $y = y_0$.

6.2.3 Parcijalni izvodi višeg reda

Neka funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ima parcijalne izvode na otvorenom skupu D. Tada su $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ takođe funkcije dve promenljive definisane na D. Ako sada i te funkcije imaju svoje parcijalne izvode na D, dolazimo do **drugih parcijalnih izvoda** funkcije f i označavamo ih redom sa

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} f_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}f_x=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\quad f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}f_y=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

Poslednja dva parcijalna izvoda se zovu **mešoviti parcijalni izvodi** drugog reda funkcije f.

Neka je data funkcija $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Ako su njeni drugi parcijalni izvodi **neprekidne** funkcije na D, tada se može pokazati da su njeni **mešoviti** parcijalni izvodi **jednaki**, odnosno važi relacija $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$, za sve $(x,y)\in D$.

6.8. Primer. *Odrediti druge parcijalne izvode sledećih funkcija:*

a) $f(x,y)=x^9-2y^5+x^2y+2xy^2+13,\quad x,y\in\mathbb{R}$;

b) $f(x,y)=x\cos y+y^3\operatorname{tg}x+x^2e^y+y\ln x,\ x>0,\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z},\quad y\in\mathbb{R}$;

c) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x-y},\quad x\neq y,\ x,y\in\mathbb{R}$.

Rešenja.

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=72x^7+2y,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-40y^3+4x,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x+4y,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x+4y.$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\dfrac{y^3\sin x}{\cos^3 x}+2e^y-\dfrac{y}{x^2},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x\cos y+6y\operatorname{tg}x+x^2e^y,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\sin y+\frac{3y^2}{\cos^2 x}+2xe^y+\frac{1}{x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\sin y+3y^2\frac{1}{\cos^2 x}+2xe^y+\frac{1}{x}.$$

c) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{(2x-2y)(x-y)^2-2(x^2-2xy-y^2)(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{4y^2}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{(2x-2y)(x-y)^2+2(x^2+2xy-y^2)(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{4x^2}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{(-2x-2y)(x-y)^2+2(x^2-2xy-y^2)(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{-4xy}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{(2x+2y)(x-y)^2-2(x^2+2xy-y^2)(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{-4xy}{(x-y)^3}.\ \blacktriangleright$$

Analogno kao što su definisani drugi parcijalni izvodi, možemo definisati **parcijalne izvode** proizvoljnog s–reda funkcije f, gde $s\in\mathbf{N}$, $s>2$.

Na primer, jedan od parcijalnih izvoda trećeg reda je $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)$.

U opštem slučaju, parcijalni izvod reda $s\geq 3$ je parcijalni izvod parcijalnog izvoda reda $s-1$.

6.2.4 Diferencijal funkcije

Neka je f realna funkcija dve promenljive definisana na kvadratu $\{(x,y)\,|\,|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}$ (za neko $\delta>0$). Ako sa Δx i Δy, ($|\Delta x|<\delta$, $|\Delta y|<\delta$) obeležimo priraštaje nezavisno promenljivih x i y, u tačkama x_0 i y_0 respektivno, tada se veličina

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\tag{6.4}$$

naziva **priraštaj** funkcije f u tački (x_0,y_0).

6.9. Primer. *Odrediti priraštaj funkcije f definisane sa $f(x,y)=2x^3+x^2y+y$ i pomoću njega vrednost funkcije f u tački $(0.1,0.9)$.*

Rešenje. Na osnovu relacije (6.4) imamo

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\ &= 2(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)^2(y+\Delta y)+(y+\Delta y)-(2x^3+x^2y+y)\\ &= 2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3+x^2y+2xy\Delta x+(\Delta x)^2y\\ &\quad +x^2\Delta y+2x\Delta x\Delta y+(\Delta x)^2\Delta y+y+\Delta y-2x^3-x^2y-y\\ &= 6x^2\Delta x+2xy\Delta x+x^2\Delta y+\Delta y+6x(\Delta x)^2\\ &\quad +2(\Delta x)^3+(\Delta x)^2y+2x\Delta x\Delta y+(\Delta x)^2\Delta y.\end{aligned}$$

Ako je $x=0$, $y=1$, $\Delta x=0.1$ i $\Delta y=-0.1$, na osnovu prethodne relacije je

$$\begin{aligned}\Delta f &= 6\cdot 0^2\cdot 0.1+2\cdot 0\cdot 1\cdot 0.1+0^2\cdot(-0.1)-0.1+6\cdot 0\cdot 0.1^2+2\cdot 0.1^3\\ &\quad +(0.1)^2\cdot 1+2\cdot 0\cdot 0.1\cdot(-0.1)+(0.1)^2\cdot(-0.1)=0.0881,\end{aligned}$$

a na osnovu (6.4) važi $f(0.1,0.9)=f(0,1)+\Delta f=1+0.0881=1.0881$. $\blacktriangleright$

Sledeća teorema omogućava približno izračunavanje priraštaja funkcije f pomoću parcijalnih izvoda ove funkcije.

6.10. Teorema *Neka je f realna funkcija definisana na pravougaoniku $\mathcal{P}=\{(x,y)\,|\,a<x<b,\ c<y<d\}$, neka postoje prvi parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ na $\mathcal{P}$ i neprekidni su u tački $(x_0,y_0)\in\mathcal{P}$. Ako je $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in\mathcal{P}$, tada postoje funkcije λ_1 i λ_2 priraštaja Δx i Δy, takve da je*

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\lambda_1\Delta x+\lambda_2\Delta y,\tag{6.5}$$

i važi $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \lambda_1(\Delta x,\Delta y)=0,\quad \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \lambda_2(\Delta x,\Delta y)=0.$

Prethodni rezultat se zapisuje i na sledeći način:

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

i koristi za **približno izračunavanje priraštaja** Δf.

6.11. Primer. *Proveriti tačnost prethodne teoreme za funkciju* $f(x,y)=2x^3+x^2y+y$ *i odrediti funkcije* $\lambda_1(\Delta x,\Delta y)$ *i* $\lambda_2(\Delta x,\Delta y)$.

Rešenje. Kako je $\dfrac{\partial f}{\partial x}=6x^2+2xy$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2+1$, a ovo su neprekidne funkcije nad skupom $\mathbb{R}^2$, to je (videti primer 6.9)

$$\Delta f=6x^2\Delta x+2xy\Delta x+x^2\Delta y+\Delta y+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3+(\Delta x)^2y+2x\Delta x\Delta y+(\Delta x)^2\Delta y$$
$$=(6x^2+2xy)\Delta x+(x^2+1)\Delta y+(6x\Delta x+2(\Delta x)^2+y\Delta x)\Delta x+(2x\Delta x+(\Delta x)^2)\Delta y.$$

Prema tome, $\Delta f\approx(6x^2+2xy)\Delta x+(x^2+1)\Delta y$.

Dalje je $\lambda_1=6x\Delta x+2(\Delta x)^2+y\Delta x,\qquad \lambda_2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$ i zaista važi

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\lambda_1(\Delta x,\Delta y)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}(6x\Delta x+2(\Delta x)^2+y\Delta x)=0,$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\lambda_2(\Delta x,\Delta y)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}(2x\Delta x+(\Delta x)^2)=0.\quad \blacktriangleright$$

6.12. Definicija. *Funkcija* $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *je* **diferencijabilna u tački** (x_0,y_0), *koja je unutrašnja tačka skupa* D, *ako postoje realni brojevi* A *i* B *takvi da je*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-Ah-Bk|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0. \tag{6.6}$$

Može se pokazati da je $A=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad B=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, ako granična vrednost u relaciji (6.6) postoji,

Ako je funkcija $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **diferencijabilna u tački** (x_0,y_0), tada se priraštaj Δf može zapisati u obliku

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+\lambda_1\Delta x+\lambda_2\Delta y,$$

gde za funkcije λ_1 i λ_2 važi $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\lambda_1(\Delta x,\Delta y)=0,\ \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\lambda_2(\Delta x,\Delta y)=0,$ pod pretpostavkom da je $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in D$.

U teoremi 6.10 su dati **dovoljni uslovi** za diferencijabilnost funkcije f dve promenljive u tački (x_0,y_0), pri čemu posebno ističemo uslov neprekidnosti parcijalnih izvoda funkcije f.

6.13. Teorema. *Ako je realna funkcija* f *od dve promenljive diferencijabilna u tački* (x_0,y_0), *tada je ona neprekidna u toj tački.*

6.14. Definicija. Diferencijal *realne funkcije* f *dve promenljive je*

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy, \tag{6.7}$$

gde su dx *i* dy *diferencijali nezavisno promenljivih* x *i* y, *respektivno.*

Diferencijal funkcije f je **linearni deo** priraštaja Δf iz relacije (6.5). Često se umesto Δx i Δy koriste oznake dx i dy respektivno.

Ako je f funkcija od jedne promenljive, na primer samo od x, tada je $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$, pa se relacija (6.7) svodi na

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx=f'(x)dx,$$

što odgovara definiciji diferencijala funkcije jedne promenljive.

6.15. Primer. *Odrediti diferencijal funkcije* $f(x,y)=2x^3+x^2y+y$.

Rešenje. $df=(6x^2+2xy)dx+(x^2+1)dy.\ \blacktriangleright$

6.16. Definicija. Diferencijal *realne funkcije* f *tri promenljive je*

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz, \tag{6.8}$$

gde su dx, dy *i* dz *diferencijali nezavisno promenljivih* x,y *i* z *respektivno.*

Analogno se definiše i diferencijal realne funkcije n promenljivih, $n>3$.

6.17. Primer. *Odrediti diferencijale sledećih funkcija:*

a) $f(x,y)=-x^5+7y^2-x^2y+3xy^2+5,\quad x,y\in\mathbb{R}$;

b) $f(x,y)=x^2\sin y+y^5\operatorname{tg}x-12x^2e^y+y\ln x^2,\quad x>0,\ x\neq(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbf{Z},\ y\in\mathbb{R}$;

c) $f(x,y)=\sin^2(xy)+\dfrac{x^2+y^2}{x-y},\quad x\neq y,\ x,y\in\mathbb{R}$;

d) $f(x,y)=z\arcsin y+z^3\operatorname{ctg}(xy)+x^2e^y+y\ln(zx),\quad |y|\le1,\ zx>0,\ xy\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Rešenja.

a) $df = (-5x^4 - 2xy + 3y^2)dx + (14y - x^2 + 6xy)dy.$

b) $df = \left(2x\sin y + \frac{y^5}{\cos^2 x} - 24xe^y + \frac{2y}{x}\right)dx + (x^2\cos y + 5y^4 \mathrm{tg} x - 12x^2e^y + 2\ln x)dy.$

c) $df = \left(2y\sin(xy)\cos(xy) + \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(2x\sin(xy)\cos(xy) + \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x-y)^2}\right)dy.$

d) $df = \left(\frac{-z^3y}{\sin^2(xy)} + 2xe^y + \frac{y}{x}\right)dx + \left(\frac{z}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{z^3x}{\sin^2(xy)} + x^2e^y + \ln(zx)\right)dy$

$+ \left(\arcsin y + 3z^2 \mathrm{ctg}(xy) + \frac{y}{z}\right)dz.$ ▶

6.2.5 Diferencijali višeg reda

Pretpostavimo da realna funkcija $z = f(x,y)$ dve promenljive x i y ima neprekidne druge parcijalne izvode na nekom otvorenom skupu $D \subset \mathbb{R}^2$. Tada je diferencijal od dz, odnosno **diferencijal drugog reda** reda funkcije f, $d^2z = d(dz)$, dat sa

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Iz $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ sledi da je

$$\begin{aligned} d(dz) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2. \end{aligned}$$

Na osnovu nepekidnosti drugih parcijalnih izvoda funkcije f sledi da su mešoviti izvodi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ jednaki, te je

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2. \tag{6.9}$$

Izraz sa desne strane relacije (6.9) može se simbolički predstaviti u obliku

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)} f.$$

Pri tome operator $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)}$ deluje na funkciju f na sledeći način: sumu $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ treba kvadrirati po pravilima binomnog obrasca, a zatim stepene od $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$ zameniti parcijalnim izvodima odgovarajućeg reda.

Ako funkcija $z = f(x,y)$ ima neprekidne parcijalne izvoda reda m na otvorenom skupu D, tada se analogno definiše

$$d^m z = d(d^{m-1}z), \quad m > 2,$$

odnosno, **diferencijal reda** m funkcije f, koji je simbolički dat relacijom

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(m)} f.$$

6.2.6 Tejlorova i Maklorenova formula

Analogno kao i kod realne funkcije jedne realne promenljive, gde se pod određenim uslovima funkcija $f(x)$ može aproksimirati polinomom $P_n(x)$, i realna funkcija $f(x,y)$ dve realne promenljive može da se, takođe pod određenim uslovima, aproksimira polinomom

$$\sum_{i+j \le n} a_{ij}x^iy^j = P_n(x,y).$$

6.18. Teorema. *Neka je realna funkcija f od dve promenljive definisana i neprekidna zajedno sa svim svojim parcijalnim izvodima do reda $m+1$ u nekoj lopti $L((x_0,y_0),\delta)$. Tada za Δx i Δy takve da je $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta$ postoji $\Theta = \Theta(\Delta x, \Delta y) \in (0,1)$ takav da važi relacija*

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{(k)} f(x_0,y_0) \\ &\quad + R_m(\Delta x, \Delta y), \end{aligned} \tag{6.10}$$

gde je **ostatak** $R_m(\Delta x, \Delta y)$ *dat sa*

$$R_m(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{(m+1)} f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y).$$

Tejlorova formula za realne funkcije dve promenljive data je sa (6.10) i može se zapisati i u obliku:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^{(k)} f(x_0,y_0) \\ &\quad + R_m(x - x_0, y - y_0), \end{aligned}$$

do koje se dolazi ako se u relaciji (6.10) Δx zameni sa $x - x_0$ a Δy zameni sa $y - y_0$.

Polinom

$$f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^{(k)} f(x_0,y_0)$$

je **Tejlorov polinom funkcije f u tački** (x_0,y_0). Ako je $(x_0,y_0)=(0,0)$, $\Delta x=x$ i $\Delta y=y$, tada iz Tejlorovog polinoma dobijamo **Maklorenov polinom** (kao i kod funkcije jedne promenljive).

6.19. Primer. *Naći Maklorenov polinom funkcije* $f(x,y)=e^{x+y}$.

Rešenje. Iz $\dfrac{\partial^m f}{\partial x^i\partial y^j}=e^{x+y}$, sledi $\left(\dfrac{\partial^m f}{\partial x^i\partial y^j}\right)(0,0)=e^0=1$, $i+j=m$, za svako $m\in\mathbf{N}$. Na osnovu toga je

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^{0+0}+(x+y)+\frac{1}{2!}(x^2+2xy+y^2)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y\right.\\ &\quad\left.+\ldots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+y^n\right)+R_n(x,y),\quad \text{odnosno}\end{aligned}$$

$e^{x+y}=1+(x+y)+\dfrac{1}{2!}(x+y)^2+\ldots+\dfrac{1}{n!}(x+y)^n+R_n(x,y)$, gde je ostatak

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}e^{\Theta x+\Theta y},\quad \Theta\in(0,1).\ \blacktriangleright$$

6.2.7 Parcijalni izvodi složene funkcije

Neka je funkcija w data sa $w=f(u,v)$, gde je $u=g(x,y)$, a $v=h(x,y)$. Pretpostavimo da su funkcije g i h definisane u nekoj okolini tačke (x_0,y_0), a funkcija f je definisana u nekoj okolini tačke (u_0,v_0), gde je $u_0=g(x_0,y_0)$, $v_0=h(x_0,y_0)$. Ako je funkcija f diferencijabilna u tački (u_0,v_0), a funkcije g i h imaju parcijalne izvode u tački (x_0,y_0), tada postoje $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ u tački (x_0,y_0) i važe relacije

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{6.11}$$

Relacije (6.11) znače

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial w}{\partial u}(u_0,v_0)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial w}{\partial v}(u_0,v_0)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),\\ \frac{\partial w}{\partial y}(x_0,y_0) &= \frac{\partial w}{\partial u}(u_0,v_0)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial w}{\partial v}(u_0,v_0)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0).\end{aligned}$$

6.20. Primer. *Odrediti* $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ *i* $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, *ako je*

a) $w=uv+u+v,\quad u=e^x+\sin y,\quad v=x^2+y^2;$

b) $w=\sqrt{u+2v}+\ln(u-v),\quad u=\arcsin(x+y),\quad v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}.$

Rešenja.

a) $\dfrac{\partial w}{\partial u}=v+1,\quad \dfrac{\partial w}{\partial v}=u+1,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=\cos y,\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=2x,\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=2y.$ Iz (6.11), dobijamo

$$\frac{\partial w}{\partial x}=(v+1)\cdot e^x+(u+1)\cdot 2x,\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=(v+1)\cdot\cos y+(u+1)\cdot 2y.$$

b) Iz $\dfrac{\partial w}{\partial u}=\dfrac{1}{2\sqrt{u+2v}}+\dfrac{1}{u-v},\qquad \dfrac{\partial w}{\partial v}=\dfrac{1}{\sqrt{u+2v}}-\dfrac{1}{u-v},$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}},\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{-x^2y}{x^2(x^2+y^2)},\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{x^2}{x(x^2+y^2)},$

sledi da je

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\left(\frac{1}{2\sqrt{u+2v}}+\frac{1}{u-v}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}-\left(\frac{1}{\sqrt{u+2v}}-\frac{1}{u-v}\right)\cdot\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\left(\frac{1}{2\sqrt{u+2v}}+\frac{1}{u-v}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{u+2v}}-\frac{1}{u-v}\right)\cdot\frac{x}{x^2+y^2}.\ \blacktriangleright$$

6.2.8 Teorema o implicitnim funkcijama

Neka su promenljive x i y vezane relacijom $F(x,y)=0$. Često je potrebno izraziti promenljivu y **eksplicitno** pomoću promenljive x relacijom $y=f(x)$, gde je f neprekidna funkcija. Ako je to moguće kaže se da je funkcija f **implicitno** zadata relacijom $F(x,y)=0$.

Ponekad je veoma jednostavno odrediti takvu funkciju f, kao u slučaju $F(x,y)=Ax+By+C$. Tada iz relacije $F(x,y)=Ax+By+C=0$, sledi da je

$$y=f(x)=\frac{-C-Ax}{B},\quad B\neq 0.$$

Međutim, često je taj postupak veoma komplikovan ili čak nemoguć. Na primer, za implicitno zadatu funkciju $y=f(x)$ relacijom

$$x^2+y^2-1=0, \tag{6.12}$$

koja predstavlja jednačinu centralnog kruga, takvu jedinstvenu funkciju f ne možemo odrediti. Naime, iz (6.12) sledi da je

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}, \quad |x| \leq 1.$$

To znači da postoje dve neprekidne funkcije f_1 i f_2 definisane na intervalu $[-1,1]$ sa vrednostima u $(-1,0]$ i $[0,1)$ respektivno, takve da je $x^2 + (f_i(x))^2 = 1, \; i = 1,2$, i $|x| \leq 1$.

Sledeća teorema daje uslove pod kojima postoji jedinstvena i neprekidna funkcija f takva da je $F(x, f(x)) = 0$.

6.21. Teorema. *Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup, tačka $(x_0,y_0) \in D$ i važe sledeći uslovi: $F : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija, i $F(x_0,y_0) = 0$,*

postoji parcijalni izvod $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ i neprekidan je na D, i $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$.

Tada postoji pravougaonik $P = U \times V \subset D$, gde je $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ i $V = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ i jednoznačno određena neprekidna funkcija $f : U \to V$, takva da je $f(x_0) = y_0$ i $F(x, f(x)) = 0$, za sve $x \in U$.

Prvi izvod implicitno zadate funkcije f određuje se pomoću sledeće teoreme.

6.22. Teorema. *Ako uz uslove prethodne teoreme postoji još i parcijalni izvod $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ koji je neprekidan na D, tada je*

$$y' = \left(\frac{dy}{dx}\right)(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

6.23. Primer. *Pod pretpostavkom da funkcija $y = f(x)$ zadovoljava datu jednačinu*

a) $x^3 + 3x^2y^3 + x^2y^2 = 6$; **b)** $x^{3/4} + \ln(xy)^2 + 2\sqrt{x+y} = -3$, *odrediti y'.*

Rešenja.

a) Kako je $F(x,y) = x^3 + 3x^2y^3 + x^2y^2 - 6$, sledi da je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^3 + 2xy^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 9x^2y^2 + 2x^2y, \qquad y' = -\frac{3x^2 + 6xy^3 + 2xy^2}{9x^2y^2 + 2x^2y}.$$

b) Ovde je $F(x,y) = x^{3/4} + \ln(xy)^2 + 2\sqrt{x+y} + 3$, te je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{3}{4x^{1/4}} + \frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{y} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}, \qquad y' = -\frac{\frac{3}{4x^{1/4}} + \frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}}{\frac{2}{y} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}}. \blacktriangleright$$

6.2.9 Izvod u pravcu

Neka je $z = f(x,y)$ funkcija sa dve promenljive i neka je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ dati jedinični vektor. Izvod funkcije f u **pravcu** vektora $\vec{a}$ u datoj tački $M(x,y)$ je po definiciji

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(M) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+ta_1, y+ta_2) - f(x,y)}{t}$$

ukoliko limes postoji. Ovako uvedenim izvodom se meri brzina promene funkcije u tački $M(x,y)$ ali u pravcu vektora $\vec{a}$. Parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ su nije teško proveriti, izvodi u pravcu koordinatnih vektora $\vec{i} = 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j}$ i $\vec{j} = 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j}$.

6.24. Primer. *Neka je $f(x,y) = xy$. Odrediti izvod funkcije f u pravcu vektora $\vec{a} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$ u tački $O(0,0)$.*

Rešenje. Po definiciji je $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}(O) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(0+t\cdot 2)(0+t\cdot 3) - 0\cdot 0}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{6t^2}{t} = 0.$ ▶

Napomenimo da ako je funkcija diferencijabilna u tački $M(x,y)$ onda ona ima izvod u pravcu bilo kog vektora. Obrnuto nije tačno. Dovoljno je uzeti funkciju $z = \sqrt{xy}$, koja ima izvod u tački $O(0,0)$ u pravcu svakog od vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ a nije diferencijabilna u njoj.

6.3 Tangentna ravan i normala površi

Neka je S površ data jednačinom $\Phi(x,y,z) = 0$.

Tačka $M(x,y,z)$ površi S je **regularna** (nesingularna) tačka te površi ako sva tri parcijalna izvoda $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$ u tački M postoje i neprekidna su i ako se bar jedan od njih razlikuje od nule.

Tačka $M(x,y,z)$je **singularna** tačka površi S, ako su sva tri parcijalna izvoda prvog reda $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$ u njoj jednaki nuli ili bar jedan od njih ne postoji.

6.25. Primer. *Naći regularne i singularne tačke površi S date jednačinom $3x^2 + 5y^2 - 4z^2 = 0$.*

Rešenje. Imamo da je $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 6x$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 10y$ i $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = -4z$, odakle sledi da su sve tačke površi regularne izuzev tačke $O(0,0,0)$ koja je singularna.▶

Neka je L kriva u prostoru data parametarskim jednačinama

$$x=x(t), \quad y=y(t) \quad \text{i} \quad z=z(t), \quad t\in(\alpha,\beta). \tag{6.13}$$

Pretpostavimo da funkcije $x(t), y(t)$ i $z(t)$ imaju neprekidne izvode $x'(t), y'(t)$ i $z'(t)$ u svakoj tački t intervala (α,β). Uzmimo na L regularnu tačku $M_0(x_0,y_0,z_0)$ koja odgovara vrednosti $t_0\in(\alpha,\beta)$. Onda vektor $\vec{\tau}=x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}$ pripada **tangenti** krive L konstruisane[1] u tački $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Odaberimo sada regularnu tačku P na površi S i povucimo kroz P krivu L koja pripada površi S. Neka je kriva data sa (6.13) i neka $x(t), y(t)$ i $z(t)$ imaju neprekidne izvode koji nisu svi istovremeno jednaki nuli u (α,β). Po definiciji se tangenta na krivu L u tački P zove **tangenta** na površ S.

Zamenjujući $x(t), y(t)$ i $z(t)$ u jednačinu $\Phi(x,y,z)=0$ površi S dobijamo identitet $\Phi(x(t),y(t),z(t))=0$, jer kriva L pripada površi S. Diferenciranjem funkcije Φ kao složene funkcije promenljive t, dobijamo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0. \tag{6.14}$$

Izraz (6.14) je u stvari skalarni proizvod vektora

$$\vec{n}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{\tau}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Vektor $\vec{\tau}$ je tangentni vektor krive L u tački P. Vektor $\vec{n}$ ne zavisi od oblika krive koja prolazi kroz tačku P, zavisi samo od koordinata tačke P i od oblika funkcije $\Phi(x,y,z)$. Pošto je P regularna tačka površi S, to je dužina vektora $\vec{n}$

$$|\vec{n}|=\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}$$

različita od nule. ▶

Iz (6.14) sledi da je skalarni proizvod vektora $\vec{\tau}$ i $\vec{n}$ jednak nuli. Ovo znači da je vektor $\vec{\tau}$ tangente na krivu L u tački P normalan (ortogonalan) na vektor $\vec{n}$ u tački P. Do istog zaključka dolazimo ako umesto krive L uzmemo neku drugu krivu koja prolazi kroz tačku P i pripada površi S. Na osnovu toga sledi da je proizvoljna tangenta na površ S u tački P normalna na vektor $\vec{n}$; znači sve tangente na površ S u tački P pripadaju istoj ravni normalnoj na vektor $\vec{n}$.

[1] Kriva L je u stvari hodograf vektor funkcije $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$.

6.26. Definicija. *Ravan koju čine sve tangente na površ S u datoj regularnoj tački P te površi zove se* **tangentna ravan** *na površ S u tački P.*

Vektor $\vec{n}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(P),\frac{\partial\Phi}{\partial y}(P),\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}(P)\right)$ je normalni vektor tangentne ravni na površ $\Phi(x,y,z)=0$ u tački P te površi. Zato jednačina **tangentne ravni** površi $\Phi(x,y,z)=0$ u regularnoj tački $P_0(x_0,y_0,z_0)$ glasi

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0. \tag{6.15}$$

Ako je površ S data jednačinom $z=f(x,y)$, onda je $\Phi(x,y,z)=f(x,y,z)-z$, i tada imamo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=-1,$$

odakle sledi da jednačina **tangentne ravni** površi $z=f(x,y)$ u regularnoj tački $P_0(x_0,y_0,z(x_0,y_0))$ te površi ima oblik:

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0). \tag{6.16}$$

6.27. Definicija. *Prava koja prolazi kroz tačku $P_0(x_0,y_0,z_0)$ površi $\Phi(x,y,z)=0$ normalno na tangentnu ravan te površi u P_0 zove se* **normala** *na površ u P_0.*

Očigledno je normalni vektor $\vec{n}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(P_0),\frac{\partial\Phi}{\partial y}(P_0),\frac{\partial\Phi}{\partial z}(P_0)\right)$ tangentne ravni površi S u tački P_0 vektor te prave i njena jednačina je onda

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}(P_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}(P_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial\Phi}{\partial z}(P_0)}. \tag{6.17}$$

Ako je površ data jednačinom $z=f(x,y)$, onda je

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1} \tag{6.18}$$

jednačina normale površi S u tački P_0.

6.28. Primer. *Napisati jednačine* **tangentne ravni** *i* **normale** *površi $z=x^2+y^2$ u tački $P(1,1,2)$.*

Rešenje. Prema formuli (6.16), imamo $z-2=2\cdot1\cdot(x-1)+2\cdot1\cdot(y-1)$ tj. jednačina tangentne ravni je $2x+2y-z=2$. Primenom formule (6.18) dobijamo da je $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$ jednačina normale. Primetimo da su sve tačke date površi regularne.▶

6.29. Primer. *Pokazati da tangentne ravni površi $xyz = 1$ obrazuju sa koordinatnim ravnima tetraedar konstantne zapremine.*

Rešenje. Jednačina površi je: $\Phi(x,y,z) = xyz - 1 = 0$. Ako je $P_0(x_0,y_0,z_0)$ dodirna tačka površi, onda su parcijalni izvodi funkcije Φ u toj tački jednaki

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(P_0) = y_0z_0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}(P_0) = z_0x_0 \quad, \frac{\partial\Phi}{\partial z}(P_0) = x_0y_0.$$

Sada je prema (6.15)

$$y_0z_0(x-x_0) + z_0x_0(y-y_0) + x_0y_0(z-z_0) = 0,$$

odnosno, posle sređivanja i korišćenja činjenice da je $x_0y_0z_0 = 1$ (P_0 pripada površi $xyz = 1$), dobijamo $\dfrac{x}{3x_0} + \dfrac{y}{3y_0} + \dfrac{z}{3z_0} = 1$. Zapremina tetraedra koga sa koordinatnim osama gradi tangentna ravan je onda jednaka

$$V = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot|3x_0|\cdot|3y_0|\cdot|3z_0| = \tfrac{9}{2}. \quad \blacktriangleright$$

6.4 Ekstremumi funkcija dve promenljive

Ekstremumi funkcija dve promenljive definišu se na isti način kao funkcija jedne promenljive. Kažemo da funkcija $z = f(x,y)$ koja preslikava podskup A od $\mathbb{R}^2$ u skup $\mathbb{R}$ ima u tački $(x_0,y_0) \in A$

lokalni ekstremum ako postoji okolina U te tačke tako da $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ ima stalan znak za svako $(x,y) \in A \cap U$.

Ako je taj znak pozitivan (negativan) funkcija z u toj tački postiže lokalni **minimum (maksimum)**. Isto kao kod funkcija jedne promenljive govori se o strogom i nestrogom ekstremumu.

6.30. Primer. *Ispitati ekstremume sledećih funkcija:*

a) $z = x^2 + 2y^2$; b) $z = xy$; c) $z = 1 - 2x^2 - 3y^2$;
d) $z = x^2 - 2x + y^2 + 4y$; e) $z = x^2 + y^2$, *za* $(x,y) \neq (0,0)$ *i* $z(0,0) = 2$;
f) $z = x^2 - 5y^2$; g) $z = x^3 + y^3$.

Rešenje.

a) $z_{\min} = f(0,0) = 0$: u proizvoljnoj okolini nule znak izraza $f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 > 0$ kad god je $(x,y) \neq (0,0)$. Po definiciji funkcija postiže strogi lokalni minimum.

b) U svakoj okolini nule (kružnica pozitivnog poluprečnika sa centrom u koordinatnom početku) razlika $f(x,y) - f(0,0) = xy$ menja znak. Dovoljno je uzeti dve

tačke: jednu u prvom i jednu u drugom oktantu i odatle sledi da je vrednost proizvoda u njima suprotna po znaku.

c) $z_{\max} = z(0,0) = 1$: objašnjenje kao pod **a)**.

d) $z = (x-1)^2 + (y+2)^2 - 5 > -5$ kad god je $(x,y) \neq (1,-2)$; dakle funkcija postiže strogi lokalni minimum u tački $(1,-2)$.

e) U tačkama $(x,y) \neq (0,0)$ svake kružnice poluprečnika manjeg od $\sqrt{2}$ vrednost funkcije z je manja od 2, dakle $z_{\max} = f(0,0) = 2$.

f) i g): U tačkama svake okoline nule (kružnice proizvoljnog pozitivnog poluprečnika sa centrom u $(0,0)$) lako je naći dve tačke u kojima z uzima vrednosti suprotne po znaku.

Napomena. Razlika $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ je u stvari totalni priraštaj funkcije z u tački (x_0,y_0) i njega još zapisujemo na sledeći način

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0). \quad \blacktriangleright$$

Navodimo stav o neophodnom uslovu lokalnih ekstremuma funkcije dve promenljive:

6.31. Teorema. *Ako funkcija $z = f(x,y)$ ima ekstremum u tački $P_0(x_0,y_0)$ onda su u toj tački parcijalni izvodi $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ili jednaki nuli ili ne postoje.*

Dokaz. Ako u funkciji z uzmemo $y = y_0$ dobijamo funkciju $z = f(x,y_0)$, sa jednom promenljivom koja očigledno u tački $x = x_0$ ima lokalni ekstremum. Onda prema Teoremi 3.95 sledi da je ili $\dfrac{\partial z}{\partial x}(P_0) = 0$ ili ne postoji. Na isti način se zaključuje i o parcijalnom izvodu $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Tačke u kojima su parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jednaki nuli ili ne postoje zovu se **kritične** tačke, a tačke u kojima su parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ samo jednaki nuli zovu se **stacionarne** tačke. Naravno ako je neka tačka stacionarna ili kritična, funkcija u njoj ne mora imati ekstremum. Na primer $O(0,0)$ je stacionarna tačka funkcije $z = xy$ a ona u njoj nema ekstremum (primer 6.30 b)). $\blacktriangleright$

6.32. Primer. *Odrediti kritične i stacionarne tačke funkcije $z = \sqrt{xy}$.*

Rešenje. Najpre vidimo da je funkcija definisana u svim tačkama I i III kvadranta uključujući sve tačke koordinatnih osa. Ako je tačka (x,y) unutrašnja tačka domena funkcije, onda imamo $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{y}{\sqrt{xy}}$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{\sqrt{xy}}$ odakle sledi da ona nije ni stacionarna ni kritična. Uzmimo sada tačke:

$X(x>0,0)$, $Y(0,y>0)$ i $O(0,0)$. Za njih imamo

$$\frac{\partial z}{\partial x}(X) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)\cdot 0}-\sqrt{x\cdot 0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(X) = \lim_{g\to 0}\frac{\sqrt{x\cdot(0+g)}-\sqrt{x\cdot 0}}{g} = \lim_{g\to 0}\frac{\sqrt{x\cdot g}}{g}$$

odakle sledi da poslednji limes ne postoji. Znači tačka X je **kritična**. Slično dobijamo da $\frac{\partial z}{\partial x}(Y)$ ne postoji i da je $\frac{\partial z}{\partial y}(Y)=0$, što znači da je i Y **kritična** tačka. Za tačku $O(0,0)$ imamo

$$\frac{\partial z}{\partial x}(O) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(0+h)\cdot 0}-\sqrt{0\cdot 0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0,$$

tj. i $\frac{\partial z}{\partial y}(O)=0$, zbog simetrije funkcije $z(x,y)=\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{y\cdot x}=z(y,x)$. Dakle, tačka $O(0,0)$ je jedina **stacionarna** tačka funkcije $z=\sqrt{xy}$. ▶

Dajemo teoremu o dovoljnom uslovu lokalnih ekstremuma.

6.33. Teorema. *Neka je $P_0(x_0,y_0)$ stacionarna tačka dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije $z=f(x,y)$ (tj. postoji okolina tačke $P_0(x_0,y_0)$ u kojoj funkcija f ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda). Tada funkcija f u tački $P_0(x_0,y_0)$*

ima lokalni maksimum ako je totalni diferencijal $d^2f(P_0)$ negativan;

ima lokalni minimum ako je totalni diferencijal $d^2f(P_0)$ pozitivan;

nema lokalni ekstremum u toj tački ako $d^2f(P_0)$ nema stalan znak za sve dx, dy.

U slučaju da je $d^2f(P_0)=0$, potrebno je dodatno ispitivanje (na primer po definiciji).

6.34. Primer. *Odrediti ekstremume funkcije*

a) $z=x^2+y^2$; b) $z=xy$; c) $z=x^2+2y^2-2x+4y-6$.

d) $z=\ln(x^2+y^2)$; e) $z=x^4+y^4-x^2y^2$.

Rešenje.

a) Funkcija nema kritičnih tačaka, jer parcijalni izvodi postoje u svakoj tački (x,y) domena $\mathbb{R}^2$. Zato su stacionarne tačke, tj rešenja sistema

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2y=0$$

jedine tačke u kojima funkcija može da ima ekstremume (prema neophodnom

uslovu-Teorema 6.31). Dakle, tačka $O(0,0)$ je stacionarna. Nađimo $d^2z(O)$. Imamo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(O)=2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(O)=2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(O)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(O)=0, \text{ te je}$$

$$d^2z(O)=2\cdot dx^2+2\cdot 0\cdot dxdy+2\cdot dy^2=2\left(dx^2+dy^2\right)>0,$$

što znači da prema Teoremi 6.33 funkcija u tački $O(0,0)$ postiže lokalni minimum i on iznosi $z_{\min}=z(0,0)=0$.

b) Ovde je $O(0,0)$ takođe jedina tačka u kojoj funkcija može da ima lokalni ekstremum. Pošto je $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(O)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(O)=0$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(O)=1$ to je

$$d^2z(O)=0\cdot dx^2+2\cdot 1\cdot dxdy+0\cdot dy^2=2dxdy.$$

Odavde sledi da funkcija u tački $O(0,0)$ nema lokalni ekstremum jer $d^2z(O)$ nema stalan znak. Stvarno, ako je na primer $dx=dy>0$ odnosno, $dx=-dy\neq 0$, onda je $d^2z(O)>0$, odnosno $d^2z(O)<0$.

c) Koristeći Teoremu 6.31 nalazimo stacionarne tačke (kritičnih nema). Zato rešavamo sistem

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2=0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=4y+4=0.$$

Odatle je $x=1, y=-1$, tj. tačka $P_0(1,-1)$ je stacionarna. Zatim imamo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

u svakoj tački domena funkcije. Sada za totalni diferencijal drugog reda dobijamo

$$d^2(P_0)=2dx^2+4d^2y>0,$$

što prema Teoremi 6.33 znači da funkcija u tački P_0 postiže lokalni minimum i on iznosi $z_{\min}=f(1,-1)=-9$.

d) Funkcija je definisane na skupu $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ i u svakoj tački domena ima parcijalne izvode. Međutim sistem

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0 \wedge \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

nema rešenja u domenu funkcije (proveriti!). Dakle funkcija nema lokalnih ekstremuma.

e) Funkcija je definisana u celoj ravni i zato su jedine tačke u kojima može da ima lokalne ekstremume, rešenja sistema

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial z}{\partial y}=0 \Leftrightarrow 4x^3-2xy^2=0 \wedge 4y^3-2yx^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x\left(2x^2-y^2\right)=0 \wedge 2y\left(2y^2-x^2\right)=0.$$

Dobili smo sistem koji je ekvivalentan disjunkciji četiri sistema

$$\begin{aligned}&(2x=0 \wedge 2y=0) \vee \left(2x=0 \wedge 2y^2-x^2\right)\\ &\vee \left(2x^2-y^2=0 \wedge 2y=0\right) \vee \left(2x^2-y^2=0 \wedge 2y^2-x^2=0\right).\end{aligned}$$

Jedino rešenje svih ovih sistema je tačka $O(0,0)$. Pošto su svi parcijalni izvodi drugog reda u tački $O(0,0)$ jednaki nuli, to je i $d^2z(O)=0$, znači ne možemo prema teoremi 6.33 saznati da li funkcija u $O(0,0)$ ima ili nema lokalni ekstremum. S obzirom da je

$$f(x,y)=\left(x^2-\frac{y^2}{2}\right)^2+\frac{3y^4}{4}\geq 0,$$

sledi da funkcija u tački $O(0,0)$ ima (strogi) lokalni minimum. ▶

6.5 Vektor-funkcija sa dve realne promenljive

Slično vektor-funkciji jedne realne promenljive, definiše se i vektor-funkcija dve realne promenljive. Preslikavanje $\vec{r}: A \to \mathbb{R}^3$ gde je $A \subset \mathbb{R}^2$, zove se vektor-funkcija dve realne promenljive. Ona uređenom paru $(u,v) \in A$ dodeljuje vektor

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=x(u,v)\,\vec{i}+y(u,v)\,\vec{j}+z(u,v)\,\vec{k},$$

čije su koordinate x,y,z skalarne funkcije sa dve promenljive u i v. Vektor funkcija je potpuno određena ako su date funkcije $x=x(u,v), y=y(u,v)$ i $z=z(u,v)$ gde $(u,v) \in A \subset \mathbb{R}^2$. Skup tačaka u prostoru $\mathbb{R}^3$ koje opisuje kraj vektora $\vec{r}(u,v)$ čiji je početak $O(0,0,0)$ zove se **hodograf** vektor funkcije sa dve realne promenljive. Tako je na primer svaka površ (grafik funkcije sa dve promenljive) hodograf vektor funkcije

$$\vec{r}(x,y)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z(x,y)\cdot\vec{k}=(x,y,z(x,y)).$$

A je domen funkcije $z=f(x,y)$i $u=x, v=y$.

6.35. Primer. *Odrediti **hodograf** vektor-funkcije* $\vec{r}(u,v)=(u+v)\,\vec{i}+(u-v)\,\vec{j}+\left(u^2+v^2\right)\vec{k}$.

Rešenje. Imamo da je $x=u+v, \quad y=u-v, \quad z=u^2+v^2$. Iz prve dve jednačine je $u=\dfrac{x+y}{2}$, $v=\dfrac{x-y}{2}$, odakle se dobija $2z=x^2+y^2$. Znači **hodograf** date vektor funkcije sa dve promenljive je **kružni paraboliod** sa temenom u koordinatnom početku. ▶

Literatura

[AK89] Adnađević, D., Kadelburg, Z., *Matematička analiza*, Naučna knjiga, Beograd 1989.

[1] Demidovič, B. P. i saradnici, *Zadaci i riješeni primeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga, Zagreb 1971.

[Do97] Doroslovački, R., *Elementi opšte i linearne algebre*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad 1997.

[GP98] Gajić, Lj., Pilipović, S., Teofanov, N., *Zbirka zadataka iz Analize I*, Drugi deo, Institut za matematiku, Novi Sad 1998.

[hT00] Hadžić O. Takači, Đ., *Matematika za studente prirodnih nauka*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1998.

[hT98] Hadžić O. Takači, Đ., *Matematičke metode za studente prirodnih nauka*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 2000.

[Ku77] Kurepa, S., *Matematička analiza*, I, II, Tehnička knjiga, Zagreb 1977.

[Lj78] Ljaško, I. I. i saradnici, *Spravočnoe posobie po matematičeskomu analizu*, I,II Viša škola, Kijev 1978, 1979 (na ruskom).

[MU88] Miličić, P., Ušćumlić, M., *Zbirka zadataka iz više matematike I*, Naučna knjiga, Beograd 1988.

[Ra95] Radenović, S., *Matematička analiza I*, Osnovi teorije, Pregled teorije i zadaci, Kragujevac 1995.

[2] Radenović, S., *Matematička analiza I*, Pregled teorije i zadaci, Kragujevac 1995.

[STT95] Schmeelk, J., Takači, Đ., Takači, A., *Elementary Analysis through Examples and Exercises*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London 1995.

[Sk79] Skokowski, E. W., *Calculus with Analytic Geometry*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, MA 1979.

[TRT99] Takači, Đ., Radenović, S., Takači, A., *Zbirka zadataka iz redova*, Univerzitet u Kragujevcu, Kragujevac, 1999.

[TT97] Takači, Đ., Takači, A., *Diferencijalni i integralni račun*, Univerzitet u Novom Sadu i Stylos, Novi Sad 1997.

[Zo81] Zorič, V. A., *Matematičeskii analiz*, I, Nauka, Moskva 1981 (na ruskom).

Indeks