Diferencijalne jednačine višeg reda (dodatak predavanjima i vežbama)

Zadaci

1. Naći opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine
$$xy'' + 2(x+1)y' + 2y = x^2 - x + 1$$
ukoliko je poznato da njena odgovarajuća homogena jednačina ima jedno rešenje oblika $y_{1h}(x) = x^p$, gde je p konstanta koju treba odrediti.

2. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine
$$y''' + y'' + 2y' + 2y = 0.$$

3. Naći opšte rešenje homogene DJ $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

Uputstva i konačni odgovori

1. Metodama pokazanim na predavanju pronalazimo $p = -1$, a zatim pomoću Abelove formule (Liuvilove, ili po kome se već zove) $y_{2h} = -\dfrac{1}{2x}e^{-2x}$. Odgovarajuće partikularno rešenje prvo probavamo da nadjemo u obliku $y_p = const$ - ne ide, zatim probavamo da ga nadjemo u obliku $y_p = ax+b$ - ne ide. Konačno, ako pretpostavimo $y_p = ax^2+bx+c$, imamo $y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$ i dobijamo $a = \dfrac{1}{6}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ i $c = 1$. Konačno,
$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{2x}e^{-2x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + 1.$$

2. $$y = C_1e^{-x} + C_2\sin x\sqrt{2} + C_2\cos x\sqrt{2}.$$

3. Karakteristična jednačina
$$t^4 + 4t^3 + 8t^2 + 8t + 4 = 0$$
se može zapisati kao $(t^2 + 2t + 2)^2 = 0$. Fundamentalni sistem rešenja zadate jednačine je
$$e^{-x}\cos x, \quad xe^{-x}\cos x, \quad e^{-x}\sin x, \quad xe^{-x}\sin x,$$
a njeno opšte rešenje
$$y = e^{-x}\big[(C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x\big].$$

Aleksandar Pejčev,

Mašinski fakultet u Beogradu