

Konvergenција redova (dodatak predavanjima i vežbama)

Zadaci

1. Ispitati konvergenciju reda

a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$;

b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)}$;

c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+m)}$,

gde je m dati prirodan broj i ukoliko konvergira, izračunati njegovu sumu.

2. Dokazati da redovi

a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(\sqrt[3]{k} - 2)(\sqrt[4]{k} + e)}$

b) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 - 5k - \pi}$

konvergiraju u običnom, ali ne i u apsolutnom smislu.

Uputstva i konačni odgovori

1. Iskoristiti razlaganje

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

i uopšte

$$\frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m} \frac{(k+m) - k}{k(k+m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m} \right)$$

Odgovori a) 1; b) 3/4; c) $\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}}{m}$.

2. Iskoristiti da su dati redovi, što se apsolutne konvergenције tiče, ekvivalentni sa redovima čiji su opšti sabirci $\frac{1}{k^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{k^{\frac{7}{12}}}$, odnosno

$\frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$, za koje je poznato da divergiraju.

Što se obične konvergenције tiče, nju dokazujemo Lajbnicovim kriterijumom na standardan način (u delu pod b) treba se uveriti da je funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x - \pi}$ opadajuća za x počev od neke pozitivne realne vrednosti a i da teži nuli kad x teži $+\infty$).

Lajbnicov kriterijum nam je neophodan za one naizmenične redove koji ne konvergiraju apsolutno, npr. da smo pod b) imali red $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 - 5k - \pi}$, on bi na planu apsolutne konvergencije bio ekvivalentan sa redom $\frac{1}{k}$, što bi značilo da konvergira apsolutno, a samim tim i u običnom smislu.

Aleksandar Pejčev,
Mašinski fakultet u Beogradu