Metod varijacije konstanti
(dodatak predavanjima i vežbama)

Sledi jedan primer primene ove metode na diferencijalnu jednačinu 3. reda (primer je doduše malo veštački s obzirom na to da se datoj jednačini može direktno sniziti red, mada u konkretnom slučaju to i ne skraćuje postupak za sam Metod varijacije konstanti).

Zadatak: Rešiti diferencijalnu jednačinu $y''' + y' = \tan(x)$

Rešenje: Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine $y''' + y' = 0$ je $t^3 + t = 0$ i ima korene $t_1 = 0,\ t_{2,3} = \pm i$. Stoga je njeno opšte rešenje

$$y_h = C_1 + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x).$$

Potražimo opšte rešenje polazne jednačine u obliku

$$y = C_1(x) + C_2(x)\cos(x) + C_3(x)\sin(x),$$

gde funkcije $C_1(x),\ C_2(x),\ C_3(x)$ nalazimo rešavanjem sistema

$$\begin{aligned} C_1'(x) \qquad + C_2'(x)\cos(x) + C_3'(x)\sin(x) &= 0,\\ - C_2'(x)\sin(x) + C_3'(x)\cos(x) &= 0,\\ - C_2'(x)\cos(x) - C_3'(x)\sin(x) &= \tan(x), \end{aligned}$$

Odavde dobijamo

$$C_1'(x) = \tan x, \quad C_2'(x) = -\sin x, \quad C_3'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Integracijom poslednjih jednakosti dobijamo

$$C_1 = A_1 - \ln\cos(x), \quad C_2 = A_2 + \cos(x), \quad C_3 = A_3 + \sin(x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right),$$

odnosno

$$y = A_1 + A_2\cos(x) + A_3\sin(x) - \ln\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x) + \sin(x)\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right),$$

odnosno

$$y = K + A_2\cos(x) + A_3\sin(x) - \ln\cos(x) + \sin(x)\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right).$$

Aleksandar Pejčev,

Mašinski fakultet u Beogradu