

# Procena momenata inercije komponenti letelice i cele letelice - pregled

- Kratko podsećanje
- Sopstveni momenti inercije pravilnih geometrijskih tela
- Određivanje težišta i sopstvenog momenta inercije trupa
- “Skidanje” potrebnih dimenzija trupa

# Kratko podsećanje – određivanje položaja težišta letelice

Počinja se od prikazane tabele. Masu komponenti procenjujemo, dok položaj težišta računamo ili procenjujemo...

Red. br.	Naziv dela	Masa	Težište komponente			$W_{xi} = M_i \cdot x_i$ [kgm]	$W_{zi} = M_i \cdot z_i$ [kgm]
		$M_i$ [kg]	$x_i$ [m]	$y_i$ [m]	$z_i$ [m]		
1	Trup		proračun				
2	Krilo		proračun				
3	Hor. rep		proračun				
4	Ver. rep		proračun				
5	Stajni trap		procena				
6	Nosna noga		procena				
7	Motor		procena				
8	Gorivo		procena				
9	Teret		procena				
10	Putnici		procena				
11	Komande		procena				
12	...		...				
13							
14							
15							
		$M_{max} = \sum M_i$				$W_x = \sum W_{xi}$	$W_z = \sum W_{zi}$
						$X_c = W_x / M_{max}$ [m]	$Z_c = W_z / M_{max}$ [m]
						$Y_c = 0m$	

## Za prostije komponente...

Sve komponente sem trupa, krila, horizontalnog i vertikalnog repa aproksimirati nekim pravilnim geometrijskim telom.

Masu proceniti prema statističkim podacima ili poluempirijskim izrazima.

Težište pretpostaviti u središtu dela.

Sopstveni moment inercije računa se iz poznatih izraza datih na sledećim slajdovima...

# Sopstveni momenti inercije nekih geometrijskih tela

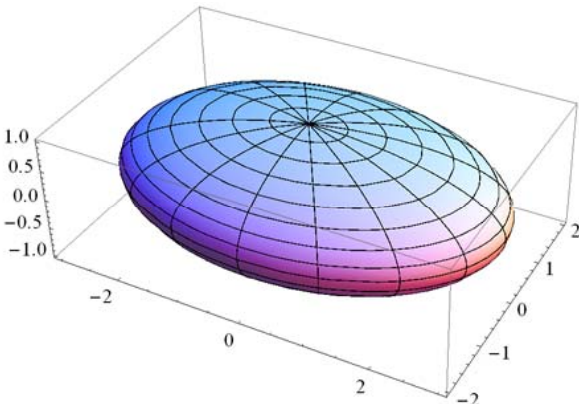
- Kugla mase  $m$ , poluprečnika  $r$  (prečnika  $d$ )

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2mr^2}{5} = \frac{md^2}{10}$$

- Kugla mase  $m$ , poluprečnika  $R$  (prečnika  $D$ ) sa šupljinom poluprečnika  $r$  (prečnika  $d$ )

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2m}{5} \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = \frac{m}{10} \frac{D^5 - d^5}{D^3 - d^3}$$

- Elipsoid mase  $m$ , poluosa  $a$  i  $b$  (osa  $d_1$  i  $d_2$ ), rotacija oko ose  $x$

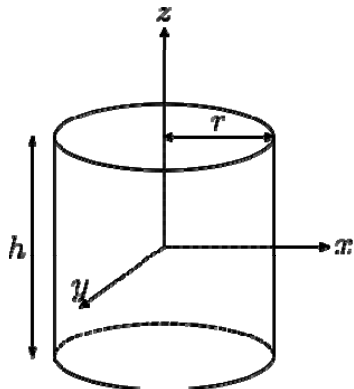


$$I_x = \frac{2mb^2}{5} = \frac{md_2^2}{10}$$

$$I_y = I_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{5} = \frac{m(d_1^2 + d_2^2)}{20}$$

# Sopstveni momenti inercije nekih geometrijskih tela

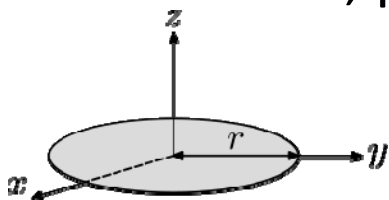
- Cilindar mase  $m$ , poluprečnika  $r$  (prečnika  $d$ ) i visine  $h$



$$I_z = \frac{mr^2}{2} = \frac{md^2}{8}$$

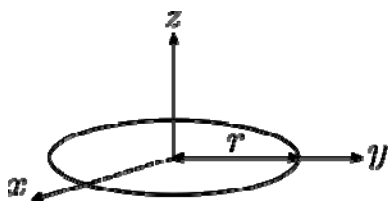
$$I_x = I_y = m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) = m \left( \frac{d^2}{16} + \frac{h^2}{12} \right)$$

- Disk mase  $m$ , poluprečnika  $r$  (prečnika  $d$ )



$$I_z = \frac{mr^2}{2} = \frac{md^2}{8} \quad I_x = I_y = \frac{mr^2}{4} = \frac{md^2}{16}$$

- Kružna linija/obruč/šuplji disk mase  $m$  i poluprečnika  $r$



$$I_z = mr^2 = \frac{md^2}{4} \quad I_x = I_y = \frac{mr^2}{2} = \frac{md^2}{8}$$

# Sopstveni momenti inercije nekih geometrijskih tela

- Štap mase  $m$  i dužine  $l$

$$I_z = \frac{ml^2}{12}$$

- Kvadar mase  $m$  i stranica  $a$ ,  $b$  i  $c$

$$I_x = m \frac{b^2 + c^2}{12} \quad I_y = m \frac{a^2 + c^2}{12} \quad I_z = m \frac{a^2 + b^2}{12}$$

- Dve jednake koncentrisane mase  $m$ , prečnika  $d$  na rastojanju  $a$

$$I_z = m \left( \frac{d^2}{5} + \frac{a^2}{2} \right)$$

$$a \gg d \Rightarrow I_z = \frac{ma^2}{2}$$

## Položaj težišta trupa

Masa trupa je procenjena (prema dostupnim statističkim podacima ili poluempirijskim izrazima) i iznosi

$$M_F = M_{tr}$$

Potrebno je što tačnije odrediti položaj težišta trupa, odnosno koordinate

$$x_{ctr}, z_{ctr}$$

Sledi prikaz jednog analitičkog/numeričkog/poluempirijskog metoda koji se može primeniti ukoliko je poznata geometrija trupa i njegova masa.

# Položaj težišta trupa

Pretpostavke:

- Trup posmatramo kao krivu površinu,
- Masa trupa je ravnomerno raspoređena po površini, pa uvodimo pojam linijske mase  $\gamma$  gde ( $x$  je podužna koordinata)

$$\gamma = \frac{dM_{tr}}{dx}$$

- Raspodela mase  $\gamma$  (linijska masa, masa po jedinici dužine trupa) srazmerna je obimu  $L$ .

$$\gamma = K \cdot L \left[ \frac{kg}{m} \right]$$

Može se zapisati:

$$M_{tr} = \int_0^l \gamma dx = K \int_0^l L dx \Rightarrow K = \frac{M_{tr}}{\int_0^l L dx} = \frac{M_{tr}}{S_{tr}} \left[ \frac{kg}{m^2} \right]$$



## Položaj težišta trupa

Da bi se odredila vrednost konstante  $K$  potrebno je poznavati površinu trupa.

Jedna mogućnost je numeričko rešavanje integrala

$$S_{tr} = \int_0^l L dx$$

gde  $L$  predstavlja osrednjeni obim koji računamo kao zbir širine  $a$  i visine  $b$  trupa

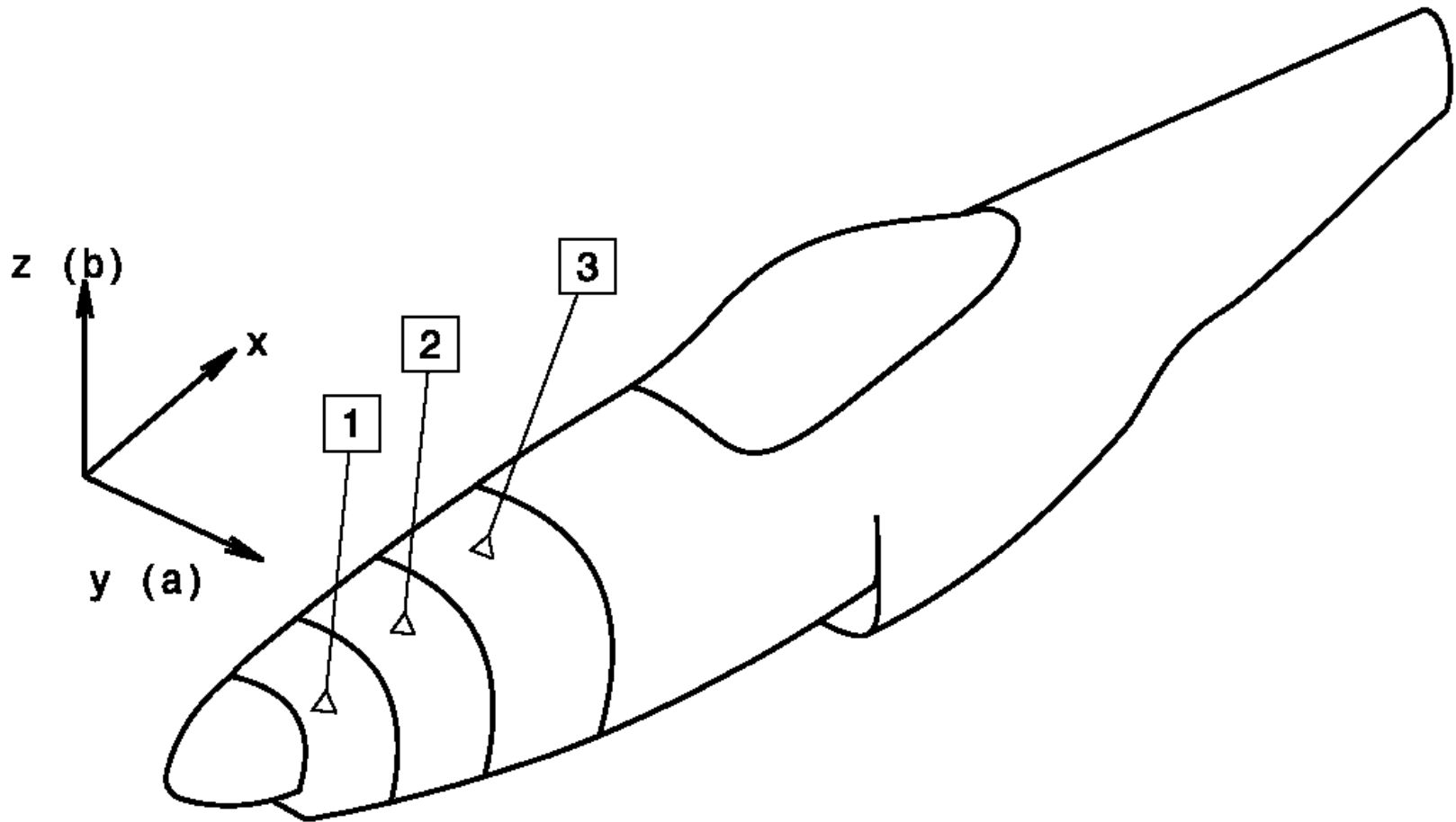
$$L = a + b$$

Trup delimo na konačan broj segmenata  $n$  pa se integral svodi na sumu

$$S_{tr} \approx \sum_{i=1}^n L_i dx_i$$

## Položaj težišta trupa

Trup podeliti na segmente i za svaki segment odrediti srednju širinu  $a$ , visinu  $b$ , i koordinate težišta  $(x_{ci}, z_{ci})$ :



## Položaj težišta trupa

Težište trupa ćemo odrediti preko masa i težišta segmenata trupa i ukupne mase.

Masa segmenta  $i$

$$M_i = KL_i dx_i$$

Koordinate težišta segmenta  $i$

$$x_i, z_i$$

Odatle slede koordinate težišta trupa kao

$$x_{ctr} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i x_i}{M_{tr}} = \frac{\sum_{i=1}^n KL_i dx_i x_i}{M_{tr}} = \frac{K}{M_{tr}} \sum_{i=1}^n L_i x_i dx_i, z_{ctr} = \frac{K}{M_{tr}} \sum_{i=1}^n L_i z_i dx_i$$

## Sopstveni moment inercije trupa

Kada su poznate koordinate težišta trupa, moguće je odrediti sopstveni moment inercije trupa (u odnosu na tri glavne ose:  $\xi \sim x, \eta \sim y, \zeta \sim z$ ).

Segmente trupa posmatramo kao cilindre prečnika  $L_i/2$  i dužina  $dx_i$ .

Doprinos svakog segmenta trupa ukupnom momentu inercije trupa predstavlja zbir sopstvenog i položajnog momenta inercije tog segmenta:

$$dI_{\xi_{tr}} = dm \frac{L^2}{16} + dm (z - z_{ctr})^2 = \gamma dx \frac{L^2}{16} + \gamma dx (z - z_{ctr})^2$$

$$dI_{\xi_{tr}} = KLdx \frac{L^2}{16} + KLdx (z - z_{ctr})^2$$

$$I_{\xi_{tr}} = \frac{K}{16} \sum_{i=1}^n L_i^3 dx_i + K \sum_{i=1}^n L_i (z_i - z_{ctr})^2 dx_i$$

## Sopstveni moment inercije trupa

Slični izrazi se dobijaju i za druge dve glavne ose:

$$dI_{\eta_{tr}} = \frac{1}{2}dm \frac{L^2}{16} + dm \left[ (x - x_{ctr})^2 + (z - z_{ctr})^2 \right] = \gamma dx \frac{L^2}{32} + \gamma dx \left[ (x - x_{ctr})^2 + (z - z_{ctr})^2 \right]$$

$$dI_{\eta_{tr}} = KLdx \frac{L^2}{32} + KLdx \left[ (x - x_{ctr})^2 + (z - z_{ctr})^2 \right]$$

$$I_{\eta_{tr}} = \frac{K}{32} \sum_{i=1}^n L_i^3 dx_i + K \sum_{i=1}^n L_i (x_i - x_{ctr})^2 dx_i + K \sum_{i=1}^n L_i (z_i - z_{ctr})^2 dx_i$$

i

$$dI_{\zeta_{tr}} = \frac{1}{2}dm \frac{L^2}{16} + dm (x - x_{ctr})^2 = \gamma dx \frac{L^2}{32} + \gamma dx (x - x_{ctr})^2$$

$$dI_{\zeta_{tr}} = KLdx \frac{L^2}{32} + KLdx (x - x_{ctr})^2$$

$$I_{\zeta_{tr}} = \frac{K}{32} \sum_{i=1}^n L_i^3 dx_i + K \sum_{i=1}^n L_i (x_i - x_{ctr})^2 dx_i$$

# Sopstveni moment inercije trupa

Da bi bilo moguće odrediti sopstveni moment inercije trupa, potrebno je numerički odrediti pomenute integrale/sume.

Za konstantu  $K$ :

$$\sum_{i=1}^n L_i dx_i,$$

Za položaj težišta trupa:

$$\sum_{i=1}^n L_i x_i dx_i, \quad \sum_{i=1}^n L_i z_i dx_i,$$

Za moment inercije trupa:

$$\sum_{i=1}^n L_i^3 dx_i, \quad \sum_{i=1}^n L_i (x_i - x_{ctr})^2 dx_i, \quad \sum_{i=1}^n L_i (z_i - z_{ctr})^2 dx_i,$$

# Težište i sopstveni momenti inercije trupa

Za proračun težišta i sopstvenih momenata inercije trupa formirati sledeću tabelu:

Presek	Težište		Širina	Visina	Dužina	L [m]	Povrsina	Masa	Wxi [kgm]	Wzi [kgm]	Za momente inercije		
	xi [m]	zi [m]	a [m]	b [m]	dxi [m]		Si [m <sup>2</sup> ]	Mi [kg]			[m <sup>4</sup> ]	[m <sup>4</sup> ]	[m <sup>4</sup> ]
1						a+b	L*dxi	K*Si	Mi*xi	Mi*zi	Li <sup>3</sup> *dxi	Li*(xi-Xtr) <sup>2</sup> *dxi	Li*(zi-Ztr) <sup>2</sup> *dxi
2	Ovih 5 kolona popuniti prema projekcijama aviona												
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
							Str = ΣSi		Wx = ΣWxi	Wz = ΣWzi	Σ	Σ	Σ
							konstanta K=Mtr/Str [kg/m <sup>2</sup> ]	težište	Xtr = Wx/Mtr [m]	Ztr = Wz/Mtr [m]			
								momenti inercije Iksi, Ieta, Iceta					

Rezultate, koordinate težišta ( $X_{tr}, Z_{tr}$ ) i sopstvene momente inercije ( $I_{\xi tr}, I_{\eta tr}, I_{\zeta tr}$ ), uneti u polaznu tabelu za proračun cele letelice...

## Skidanje potrebnih dimenzija trupa

Da bismo izračunali položaj težišta i sopstvene momente inercije trupa potrebno je poznavati veličine  $x_i$ ,  $z_i$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  i  $dx_i$  svakog segmenta trupa.

U nastavku je prikazan postupak određivanja potrebnih dimenzija u paketu za modeliranje CATIA.

Potrebno je da postoje projekcije letelice.

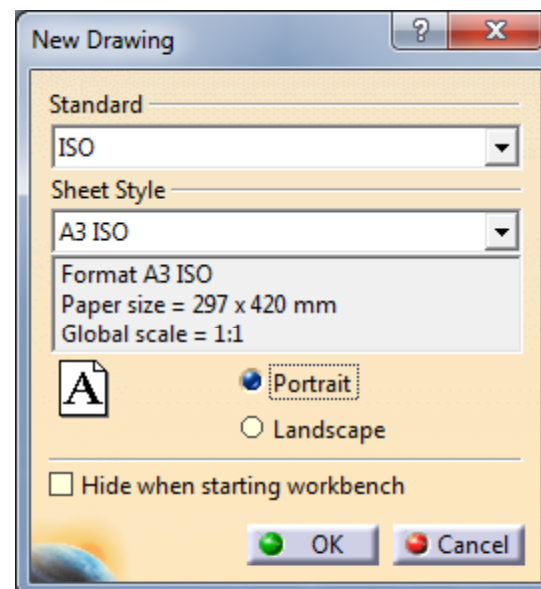
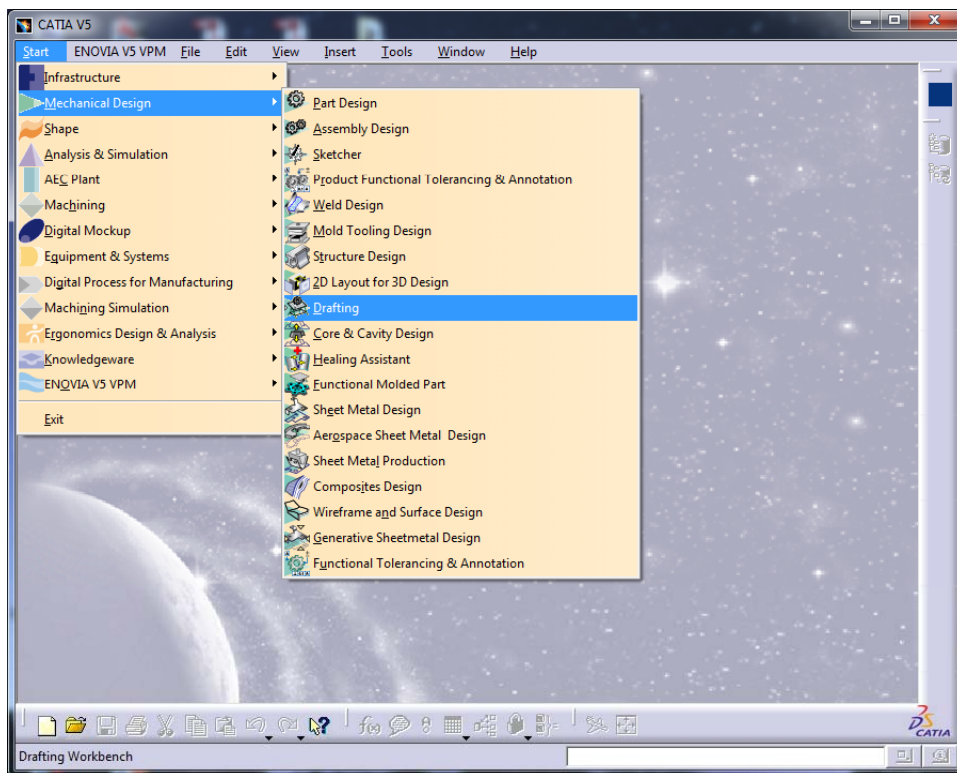


# Skidanje potrebnih dimenzija trupa - 2

Pokrenuti CATIA-u. Ugasiti Product.

Ići na Start - Mechanical Design - Drafting (modul za teh. crtanje).

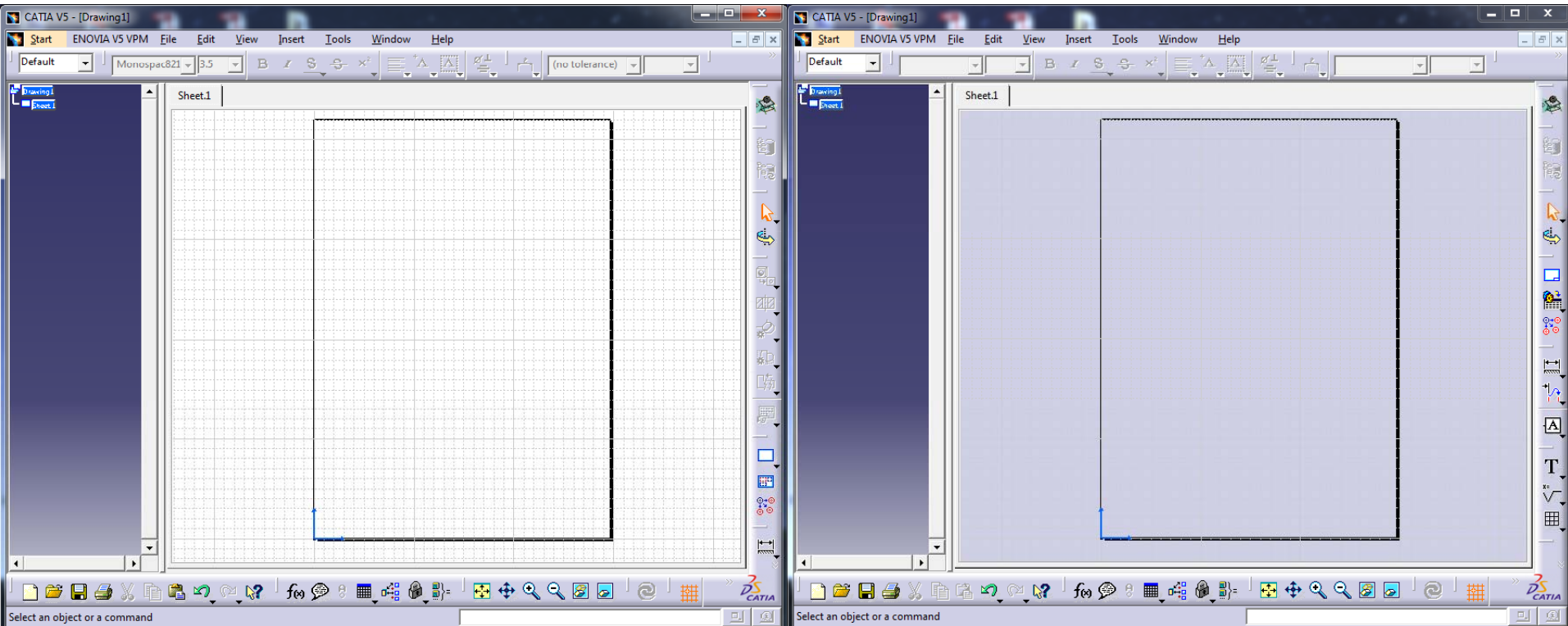
Otvora se prozor. Odabrati dimenziju crteža, npr. A3, i orijentaciju. Kliknuti OK.



# Skidanje potrebnih dimenzija trupa - 3

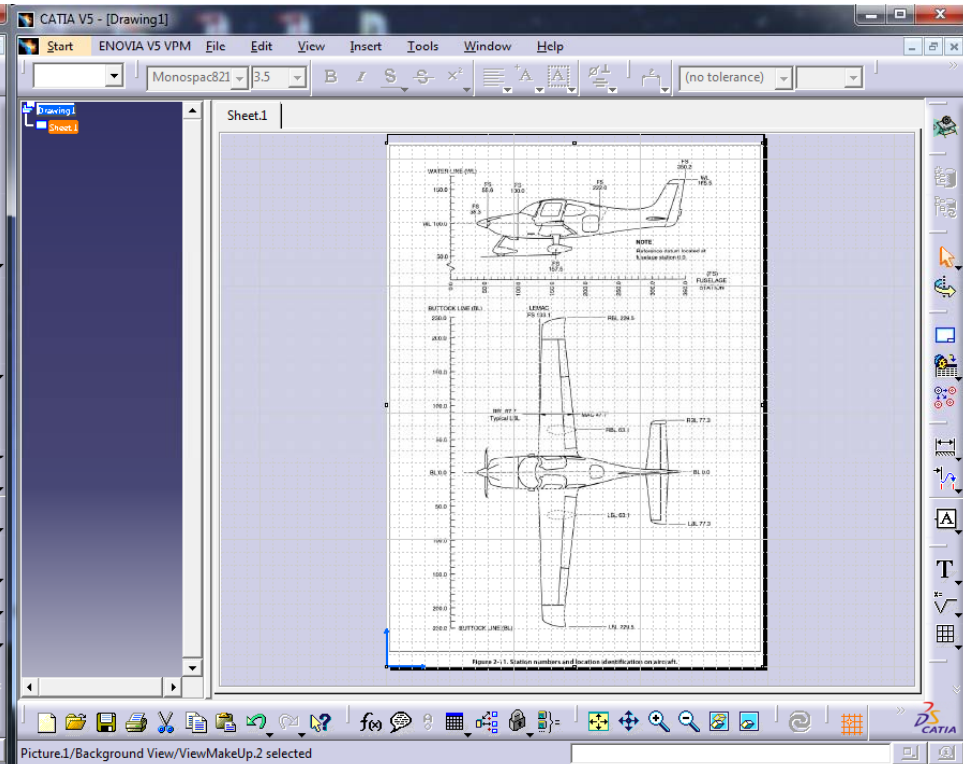
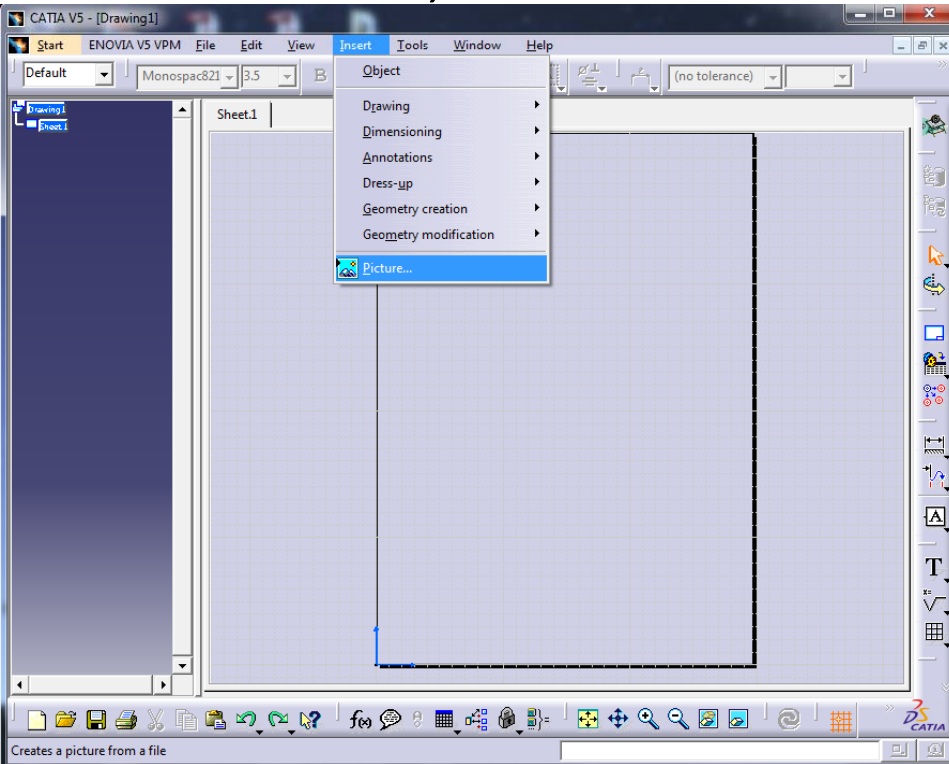
Otvora se novo radno okruženje.

Ući u pozadinu crteža, Edit – Sheet Background.



# Skidanje potrebnih dimenzija trupa - 4

Ubaciti sliku, Insert – Picture.



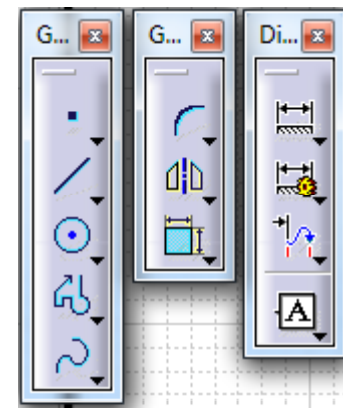
Odabrati npr. sliku1.

Postaviti u donji levi ćošak, pa razvući po papiru.

## Skidanje potrebnih dimenzija trupa - 5

Vratiti se u deo za crtanje, Edit – Working Views.

Neki od dostupnih toolbar-ova su poznati, i moguće je uočiti velike sličnosti sa Sketcher-om.



Moguće je crtati linije, profile, kružnice preko crteža.

Moguće definisati ograničenja (tangentnost, horizontalnost itd).

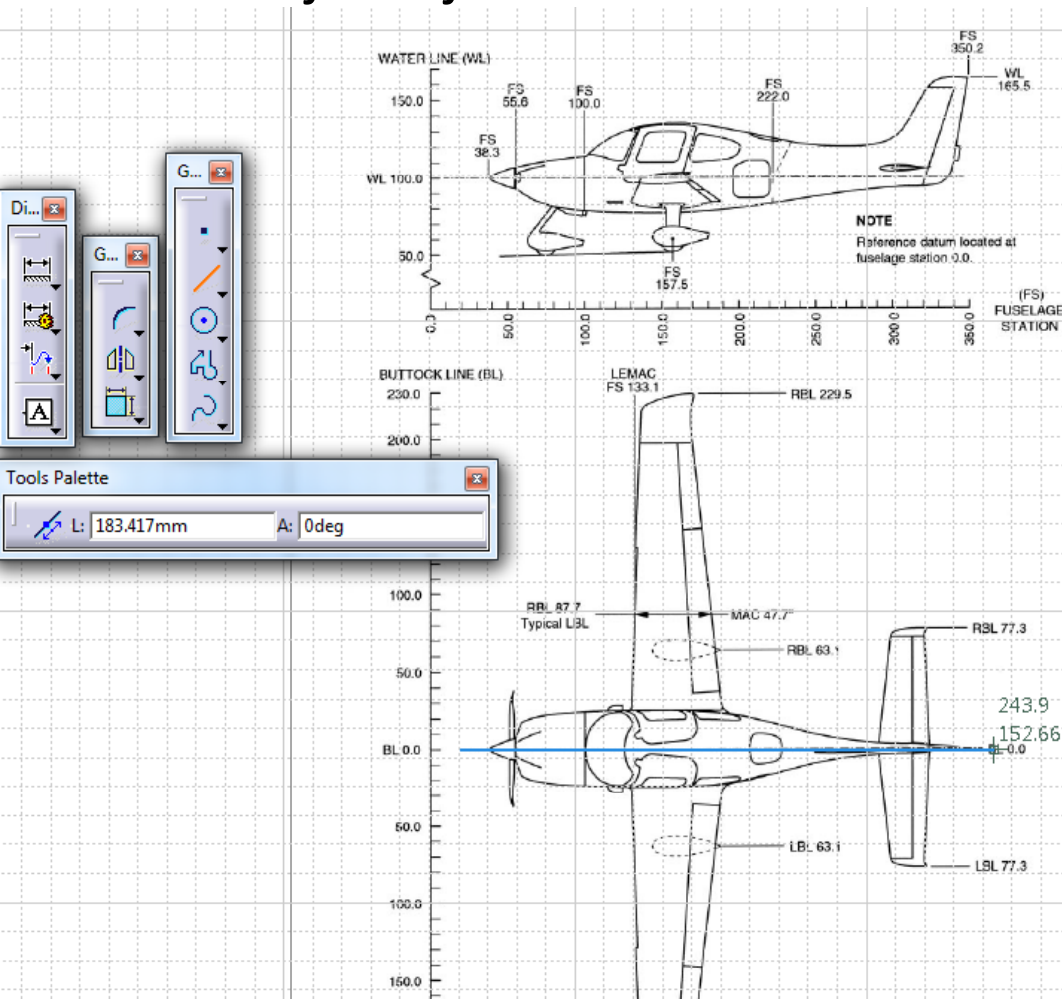
Moguće crtati tačke, linije, ose...

Moguće vršiti transformacije (translacija, rotacija itd).

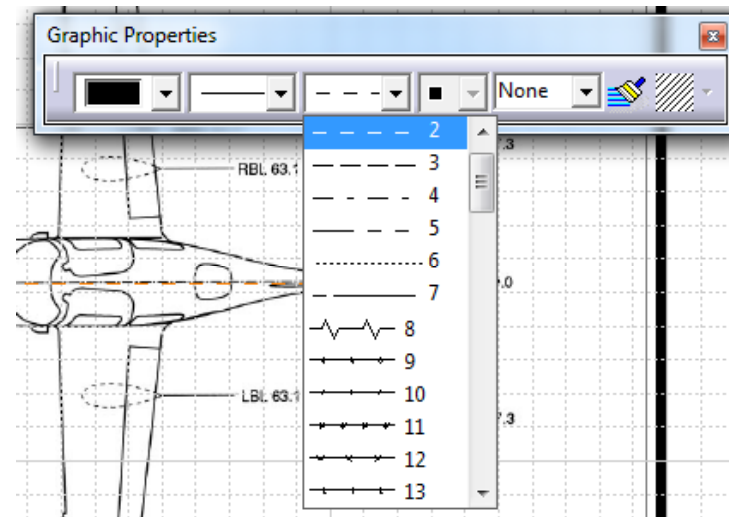
Moguće menjati osobine linija (boja, debljina itd).

# Skidanje potrebnih dimenzija trupa - 6

Preporuka je da se počne od osa. Kliknuti na naredbu za stvaranje linija Line i nacrtati osu.



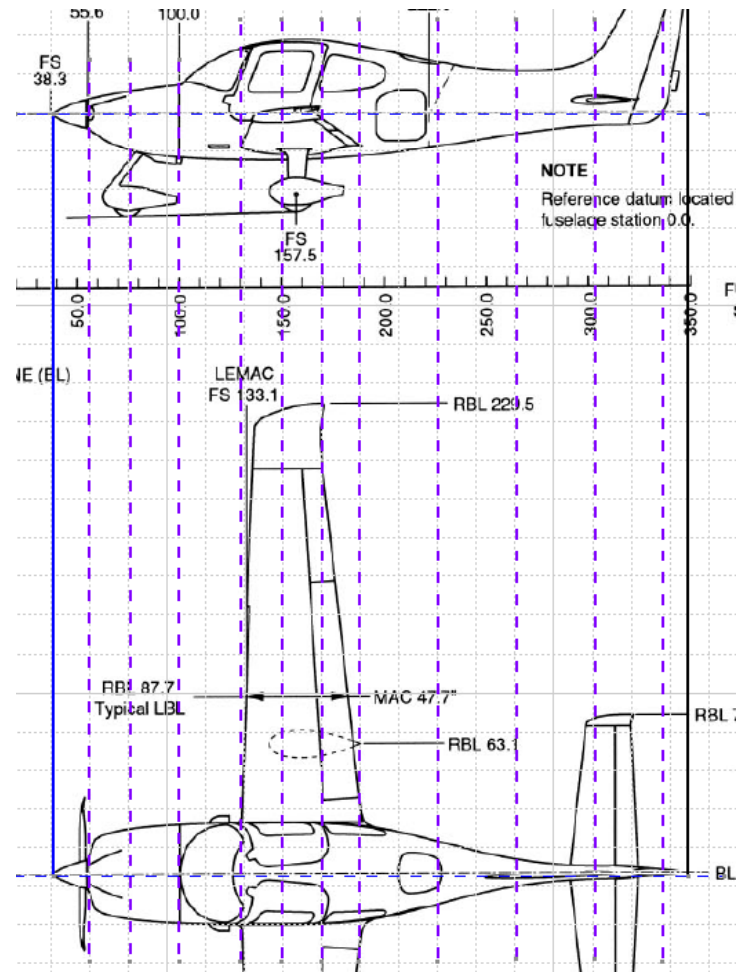
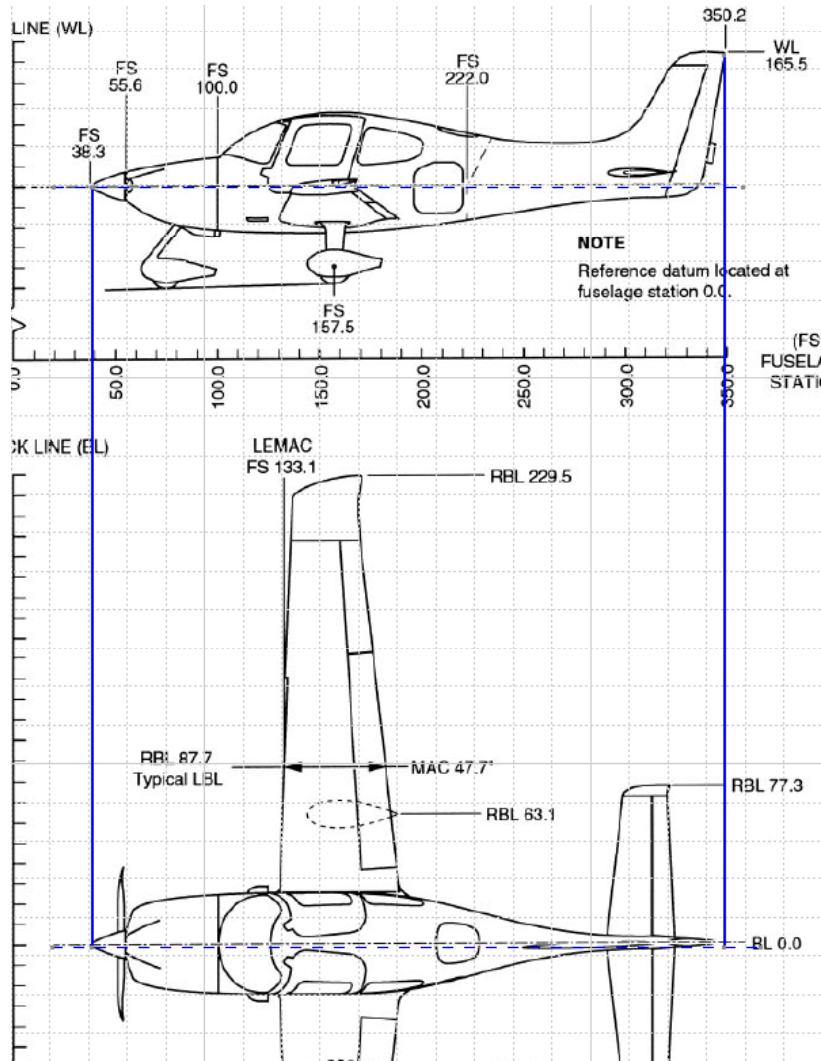
Moguće menjati osobine linije.



# Skidanje potrebnih dimenzija trupa - 7

Preporuka je dalje crtati početnu i krajnju liniju.

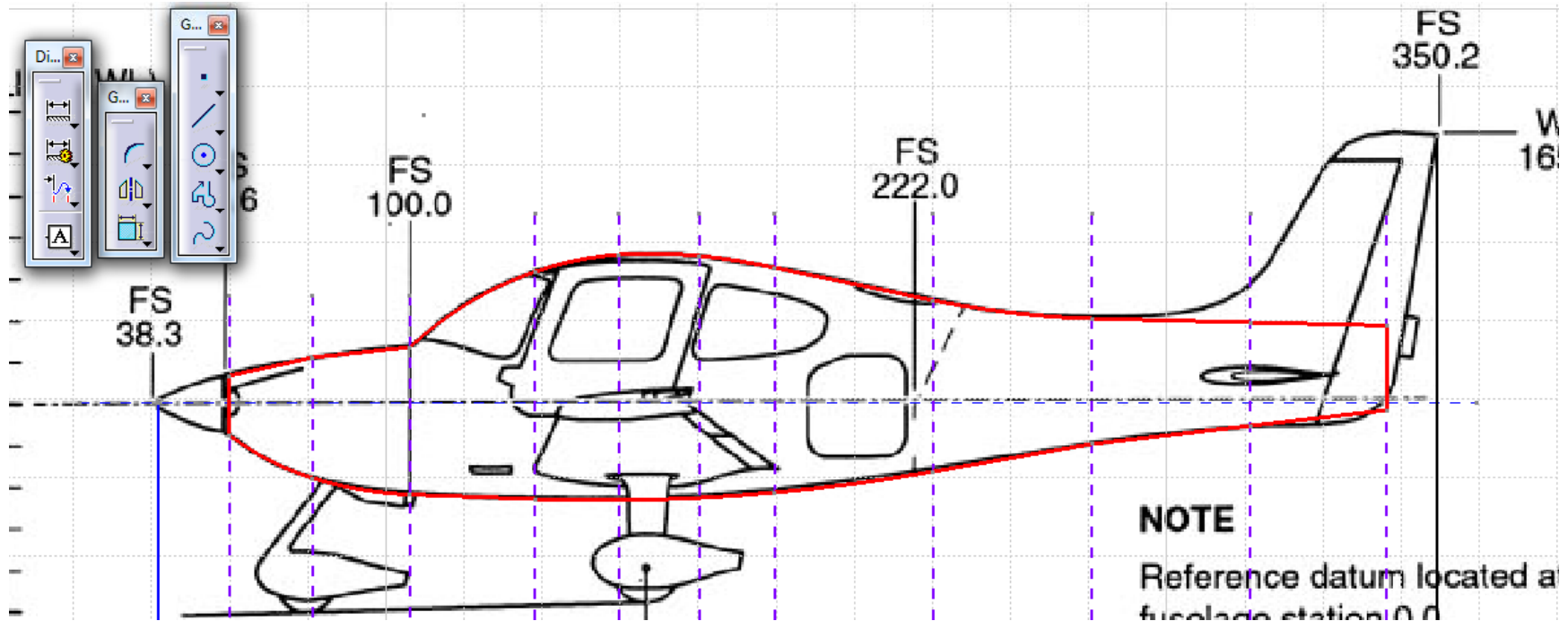
Potom linije izabranih preseka.





# Skidanje potrebnih dimenzija trupa - 8

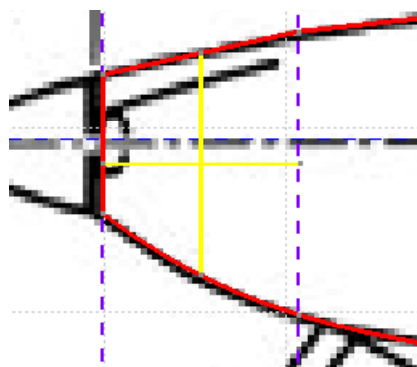
Potom konture trupa (naredbom Spline ili Profile).



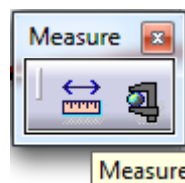
## Skidanje potrebnih dimenzija trupa - 9

Pošto segmente trupa aproksimiramo cilindričnim površinama, potrebne su nam osrednjene koordinate središta  $x_i, z_i$  i dimenzije  $a, b$  i  $dx_i$ .

CATIA hvata središte linije, te je lako nacrtati srednji prečnik i visinu cilindra.



Dalje, naredbom Measure moguće je izmeriti udaljenost između elemenata.

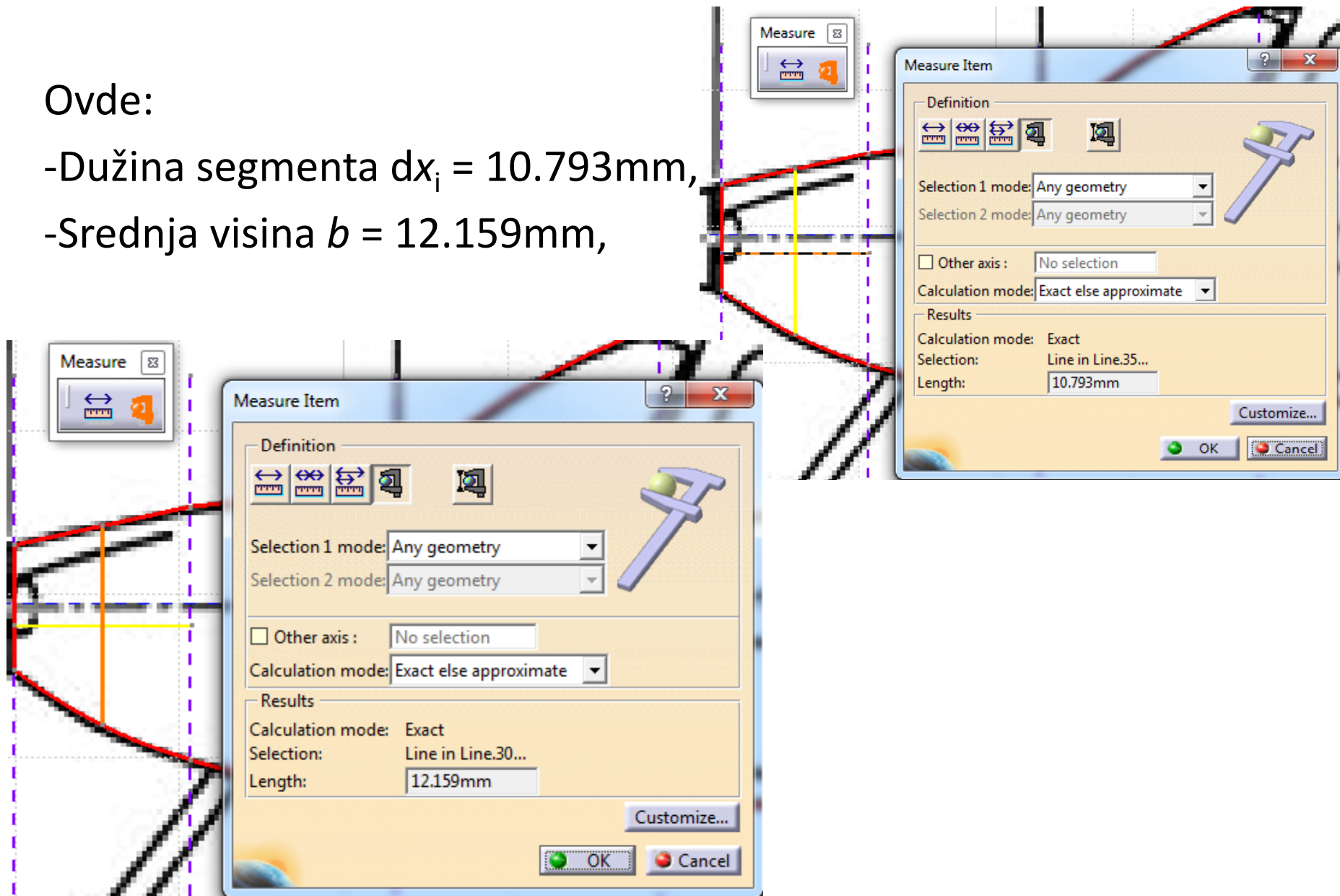




## Skidanje potrebnih dimenzija trupa - 10

Ovde:

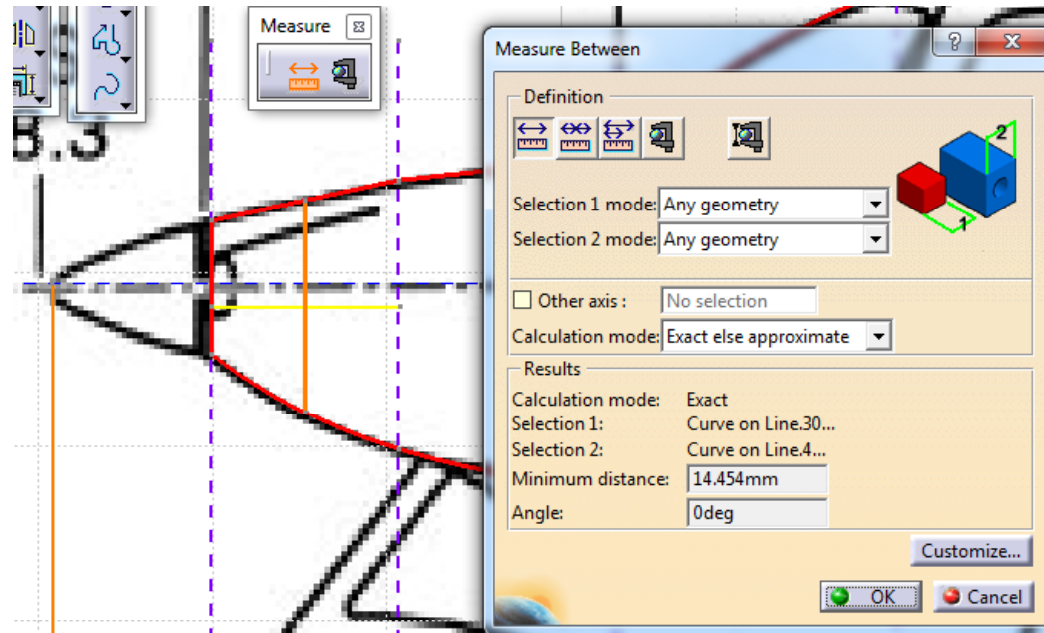
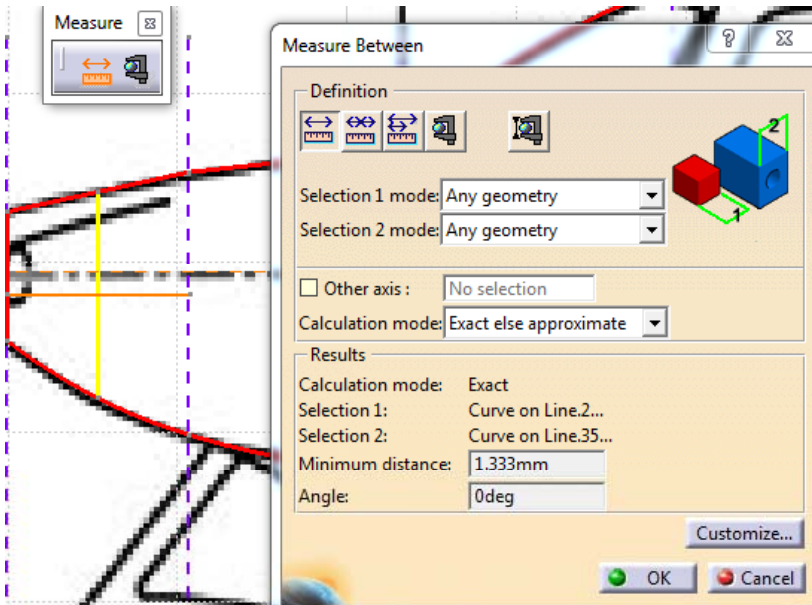
- Dužina segmenta  $dx_i = 10.793\text{mm}$ ,
- Srednja visina  $b = 12.159\text{mm}$ ,



## Skidanje potrebnih dimenzija trupa - 11

Ovde:

- Koordinata  $x_i = 14.454\text{mm}$ ,
- Koordinata  $z_i = 1.333\text{mm}$ .



Širinu  $a$  treba skinuti sa druge projekcije.

Na kraju, skalirati dimenzije u skladu sa referentnom dužinom.