Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

Vektori i matrice - važbanje

1. Date su tačke $A(4,1,3)$, $B(2,-3,0)$, $C(1,2,-3)$ i $D(0,-4,5)$.

   a) Izračunati zapreminu tetraedra $ABCD$.

   b) Izračunati visinu tetraedra iz temena D.

   Rešenje: a) Kako je zapremina tetraedra jednaka šestini zapremine paralelopipeda nastalog od tri vektora ivica tog tetraedra koji izviru iz nekog njegovog temena (svejedno je kog), traženu zapreminu možemo računati kao jednu šestinu apsolutne vrednosti mešovitog proizvoda

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -3 & 1 & -6 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} = -121,$$

   odnosno $V = \dfrac{121}{6}$.

   b) Kako je po poznatoj formuli zapremina tetraedra $V = \dfrac{1}{3} P_{ABC} \cdot H_D$, s obzirom na

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -4 & -3 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (27,-3,-14)$$

   i

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{27^2+3^2+14^2} = \frac{1}{2}\sqrt{934},$$

   dobijamo

$$H_D = \frac{3V}{P_{ABC}} = \frac{\frac{121}{2}}{\frac{\sqrt{934}}{2}} = \frac{121}{\sqrt{934}}.$$

2. Rešiti matričnu jednačinu $XAB = C + X$, ako su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = A^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Rešenje: Data matrična jednačina je ekvivalentna sa $X = C(AB-E)^{-1}$, ako je $\det(AB-E) \neq 0$. Dalje je

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 11 & 34 \end{bmatrix},$$

   pa je

$$AB - E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 11 \\ 3 & 11 & 33 \end{bmatrix}.$$

Njena determinanta je $-36 \neq 0$, pa postoji inverzna matrica

$$(AB - E)^{-1} = \frac{1}{-36} \begin{bmatrix} 11 & -33 & 10 \\ -33 & -9 & 6 \\ 10 & 6 & -4 \end{bmatrix} ,$$

pa je

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11/36 & 11/12 & -5/18 \\ 11/12 & 1/4 & -1/6 \\ -5/18 & -1/6 & 1/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/36 & 11/12 & -5/18 \\ 23/36 & 1/12 & -1/18 \end{bmatrix} .$$

3. Rešiti matričnu jednačinu $ABX = C + 2X$, ako su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} , \quad B = A^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Rešenje: Data matrična jednačina je ekvivalentna sa $X = (AB - 2E)^{-1}C$, ako je $\det(AB - 2E) \neq 0$. Dalje je

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 11 & 34 \end{bmatrix} ,$$

pa je

$$AB - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 11 & 32 \end{bmatrix} .$$

Njena determinanta je $2 \neq 0$, pa postoji inverzna matrica

$$(AB - 2E)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -25 & -31 & 13 \\ -31 & -41 & 17 \\ 13 & 17 & -7 \end{bmatrix} ,$$

pa je

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -25 & -31 & 13 \\ -31 & -41 & 17 \\ 13 & 17 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25/2 & -9 \\ -31/2 & -12 \\ 13/2 & 5 \end{bmatrix} .$$

Nastavnik: Aleksandar Pejčev
Asistent: Rada Mutavdžić