Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

Rešenja zadataka sa Prvog kolokvijuma iz predmeta Matematika 3 (1. grupa)

1. a) Ukoliko izrazimo y''', imamo $y'''(x) = -2^{-\frac{x}{3}}$ i stoga

$$\begin{aligned}
y'' &= \int y'''\,dx = -\int 2^{-\frac{x}{3}}\,dx = -\int 2^t\,(-3dt) = \frac{3}{\ln 2}2^t + C_1 \\
&= \frac{3}{\ln 2}2^{-\frac{x}{3}} + C_1 \; \left(\text{smena } t = -\frac{x}{3} \Rightarrow x = -3t,\ dx = -3dt\right) \\
y' &= \int y''\,dx = \int \left(\frac{3}{\ln 2}2^{-\frac{x}{3}} + C_1\right)dx = -\left(\frac{3}{\ln 2}\right)^2 2^{-\frac{x}{3}} + C_1x + C_2, \\
y &= \int y'\,dx = \int \left(-\left(\frac{3}{\ln 2}\right)^2 2^{-\frac{x}{3}} + C_1x + C_2\right)dx = \left(\frac{3}{\ln 2}\right)^3 2^{-\frac{x}{3}} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.
\end{aligned}$$

Ispalo je da nam za računanje y i y' nije trebalo ništa osim integrala rešavanog prilikom računanja y''.

b) U ovom slučaju nije moguće eksplicitno izraziti y'' preko x, tako da smo prinudjeni da parametrizujemo: $y'' = t,\ \sin 2t + t = x$, odakle je $dx = (2\cos 2t + 1)\,dt$ i onda (analogno kao u delu pod a))

$$\begin{aligned}
y' &= \int y''\,dx = \int t(2\cos 2t + 1)\,dt = t\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{t^2}{2} + C_1, \\
y &= \int y'\,dx = \int \left(t\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{t^2}{2} + C_1\right)(2\cos 2t + 1)\,dt \\
&= \int t^2\cos 2t\,dt + \int t\,(2\sin 2t\cos 2t + \sin 2t)\,dt + \int \cos^2 2t\,dt \\
&\quad + \left(2C_1 + \frac{1}{2}\right)\int \cos 2t\,dt + \int \left(\frac{1}{2}t^2 + C_1\right)dt \\
&= \left(\frac{1}{2}t^2\sin 2t - \int t\sin 2t\,dt\right) + \int t\,(\sin 4t + \sin 2t)\,dt + \int \frac{1+\cos 4t}{2}\,dt \\
&\quad + \left(C_1 + \frac{1}{4}\right)\sin 2t + \frac{t^3}{6} + C_1t + C_2 = \dots
\end{aligned}$$

Podrazumeva se da su studenti upućeni u računanje ovakvih integrala uz pomoć parcijalne integracije (svi su istog tipa kao onaj koji se pojavio u 1. koraku rešenja ovog dela zadatka).

2. Zadatak je kompletno prepisan iz materijala o Diferencijalnim jednacinama koji je okacen u okviru pripremnog materijala za ovaj kolokvijum (gde je ujedno kompletno i rešen - tamo je označen rednim brojem 4), jedino što je y zamenjeno sa ρ i x sa φ). Dodat je jedino deo u kojem se trazi partikularno rešenje. Dakle,

$$\varphi = \pm\ln\left(\ln\rho + \sqrt{(\ln\rho)^2 + C_1}\right) + C_2, \tag{1}$$

a tokom procesa rešavanja je dobijeno

$$\rho' = \pm\rho\sqrt{C_1 + (\ln\rho)^2} \tag{2}$$

Dakle kad je $\rho = 1$, ρ' je jednako $\frac{1}{2}$ i kada to uvrstimo u (2) ($\varphi = 0$ ćemo koristiti kasnije), dobijamo:

$$\frac{1}{2} = \pm\sqrt{C_1 + (\ln 1)^2} = \pm\sqrt{C_1},$$

što, zbog pozitivnosti korena, znači da očito mora biti $\frac{1}{2} = \sqrt{C_1}$ i $C_1 = \frac{1}{4}$ (dakle, u (1) se radi o varijanti sa +). Dalje je, na osnovu (1)

$$0 = \ln\left(\ln 1 + \sqrt{(\ln 1)^2 + \frac{1}{4}}\right) + C_2,$$

odnosno $\ln\frac{1}{2} + C_2 = 0$, odakle je $C_2 = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$. Konačno

$$\varphi = \ln\left(\ln\rho + \sqrt{(\ln\rho)^2 + \frac{1}{4}}\right) + \ln 2.$$

3. Čim je zadatak ovako formulisan, jasno je da jedno rešenje treba da "izvariramo", a drugo da dobijemo preko prvog uz pomoć Abelove formule. Zamenjujući u odgovarajuću homogenu jednačinu $y = x^p$, $y' = px^{p-1}$, $y'' = p(p-1)x^{p-2}$, dobijamo

$$p(p-1)x^{p-1} + 2(x+1)px^{p-1} + 2x^p = 0, \ (p^2+p)x^{p-1} + (2p+2)x^p = 0$$

Poslednje je moguće samo za $p^2 + p = 0$ i $2p + 2 = 0$, odnosno $p = -1$.
Dakle, $y_{h1} = \frac{1}{x}$ i sada, nakon zapisivanja u " default" obliku odgovarajuće homogene jednačine koja odgovara polaznoj jednačini:

$$y_h'' + \frac{2(x+1)}{x}y_h' + \frac{2}{x} = 0$$

i primene Abelove formule, dobijamo

$$y_{2h} = \frac{1}{x}\int \frac{e^{-\int \frac{2(x+1)}{x}\,dx}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx.$$

Imamo

$$\int \frac{2(x+1)}{x}\,dx = \int\left(2 + \frac{2}{x}\right)dx = \int 2\,dx + 2\int\frac{dx}{x} = 2x + 2\ln x,$$

$$e^{-(2x+2\ln x)} = e^{-2x}\cdot e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}e^{-2x}$$

i

$$y_{2h} = \frac{1}{x}\int \frac{\frac{1}{x^2}e^{-2x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{x}\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2x}e^{-2x}.$$

Odgovarajuće partikularno rešenje prvo probavamo da nadjemo u obliku $y = const$ - ne ide, zatim probavamo da ga nadjemo u obliku $y = ax + b$ - ne ide. Konačno, ako pretpostavimo $y = ax^2 + bx + c$, imamo $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$, tj.

$$x \cdot 2a + 2(x+1)(2ax+b) + 2(ax^2+bx+c) = x^2+x+1,\ 6ax^2+(6a+4b)x+2b+2c = x^2+x+1,$$

odakle dobijamo $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$ i $c = \frac{1}{2}$.

Sada je opšte rešenje $y = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{1}{x}e^{-2x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}$.

4. Karakteristična jednačina za odgovarajuću homogenu diferencijalnu jednačinu glasi

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$
$$\left(\lambda^2 + 2\right)(\lambda + 1) = 0$$

(odmah se vidi da $\lambda_1 = -1$ jeste rešenje, a onda vidimo da su druga dva rešenja $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$), odakle dobijamo da opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine glasi

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 \sin x\sqrt{2} + C_2 \cos x\sqrt{2}.$$

Ako zadatak rešavamo Metodom neodredjenih koeficijenata (a teško da bismo mogli drugačije), neophodno je da nezavisno nadjemo dva partikularna rešenja - jedno za $f_1(x) = e^{-x}$ i drugo za $f_2(x) = e^{2x}\cos x$.

Prvo partikularno rešenje tražimo u obliku $y_{p_1} = Cx^1e^{-x} = Cxe^{-x}$ (jer, u skladu sa oznakama sa vežbi, u $f_1(x)$ imamo $\alpha = -1$ i $\beta = 0$, pri čemu $\alpha \pm \beta i = -1$ jeste rešenje odgovarajuće karakteristične jednačine višestrukosti $s = 1$). Biće

$$y'_{p_1} = Ce^{-x}(1-x),\ y''_{p_1} = Ce^{-x}(x-2),\ y'''_{p_1} = Ce^{-x}(3-x),$$

pa se $y'''_{p_1} + y''_{p_1} + 2y'_{p_1} + 2y_{p_1} = e^{-x}$ svodi na $3Ce^{-x} = e^{-x}$, odakle dobijamo $C = \frac{1}{3}$, odnosno $y_{p_1}(x) = \frac{1}{3}e^{-x}$.

Drugo partikularno rešenje tražimo u obliku $y_{p_2} = e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right)$ (jer, u skladu sa oznakama sa vežbi, u $f_2(x)$ imamo $\alpha = 2$ i $\beta = 1$, pri čemu $\alpha \pm \beta i = 2 \pm i$ nije rešenje odgovarajuće karakteristične jednačine). Biće

$$y'_{p_2} = e^{2x}\left((2A+B)\cos x + (2B-A)\sin x\right),\ y''_{p_2} = e^{2x}\left((3A+4B)\cos x + (3B-4A)\sin x\right)$$
$$e^{2x}\left((2A+11B)\cos x + (2B-11A)\sin x\right)$$

pa se $y'''_{p_2} + y''_{p_2} + 2y'_{p_2} + 2y_{p_2} = e^{2x}\cos x$ svodi na

$$e^{2x}\left((11A + 17B)\cos x + (11B - 17A)\sin x\right) = e^{2x}\cos x,$$

odakle dobijamo $11A + 17B = 1$ i $-17A + 11B = 0$, odakle sledi $A = \dfrac{11}{410}$ i $B = \dfrac{17}{410}$, odnosno $y_{p_2}(x) = e^{2x}\left(\dfrac{11}{410}\cos x + \dfrac{17}{410}\sin x\right)$.

Opšte rešenje polazne jednačine je

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \sin x\sqrt{2} + C_2 \cos x\sqrt{2} + \frac{1}{3}e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{11}{410}\cos x + \frac{17}{410}\sin x\right).$$

5. Rešavamo zadatak za I grupu, u zadatku za II grupu su samo zamenjena mesta promenljivim x i y. Koristimo metodu varijacije konstanti, koja postoji zasebno za jednačine i zasebno za sisteme jednačina. Rešenje koje sledi koristi prvu varijantu te metode (i druga varijanta se sprovodi analogno).

   Iz prve jednačine imamo
$$y = x - x' + \frac{1}{\cos t},$$
   a diferenciranje nam daje
$$y' = x' - x'' + \frac{\sin t}{\cos^2 t},$$
   što kad uvrstimo u drugu jednačinu sistema dobijamo:

$$x'' + x = \frac{\sin t + \cos t}{\cos^2 t}$$

   Kako karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine glasi $\lambda^2 + 1 = 0$, njeno opšte rešenje je
$$x_h = C_1 \sin t + C_2 \cos t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

   Dakle, opšte rešenje nehomogene jednačine tražimo u obliku

$$x(t) = C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t,$$

   gde funkcije $C_1(t)$ i $C_2(t)$ zadovoljavaju

$$\begin{aligned} C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t &= 0 \\ C_1'(t)\cos t - C_2'(t)\sin t &= \frac{\sin t + \cos t}{\cos^2 t}, \end{aligned}$$

   odnosno
$$C_1'(t) = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t},\ C_2'(t) = -\sin t\frac{\sin t + \cos t}{\cos^2 t}.$$

Integracijom nalazimo

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= \int \left(\frac{\sin t}{\cos t} + 1\right) dt = -\ln|\cos t| + t + D_1, \\
C_2(t) &= \int \left(-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} - \frac{\sin t}{\cos t}\right) dt = \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos^2 t}\, dt + \ln|\cos t| \\
&= \int dt - \int \frac{dt}{\cos^2 t} + \ln|\cos t| = t - \operatorname{tg} t + \ln|\cos t| + D_2
\end{aligned}$$

Sada $x(t)$ dobijamo direktno, a odmah zatim i $y(t)$:

$$x(t) = t(\sin t + \cos t) + \ln|\cos t|(-\sin t + \cos t) + D_1 \sin t + D_2 \cos t,$$

$$\begin{aligned}
x'(t) = \;& (\sin t + \cos t) + t(\cos t - \sin t) \\
& - \operatorname{tg} t(-\sin t + \cos t) + \ln|\cos t|(-\cos t - \sin t) \\
& + D_1 \cos t - D_2 \sin t \\
y(t) = \;& x - x' + \frac{1}{\cos t}
\end{aligned}$$

Ukoliko se eksplicitno odrede $x(t)$ i $x'(t)$, nije neophodno sredjivati poslednji izraz.

Rešenja zadataka sa Prvog kolokvijuma iz predmeta Matematika 3 (2. grupa)

1. a) Ukoliko izrazimo y''', imamo $y'''(x) = 3^{-\frac{x}{2}}$ i stoga

$$\begin{aligned}
y'' &= \int y'''\, dx = \int 3^{-\frac{x}{2}}\, dx = \int 3^t\,(-2dt) = -\frac{2}{\ln 3} 3^t + C_1 \\
&= -\frac{2}{\ln 3} 3^{-\frac{x}{2}} + C_1 \;\left(\text{smena } t = -\frac{x}{2} \Rightarrow x = -2t,\ dx = -2dt\right) \\
y' &= \int y''\, dx = \int \left(-\frac{2}{\ln 3} 3^{-\frac{x}{2}} + C_1\right) dx = \left(\frac{2}{\ln 3}\right)^2 3^{-\frac{x}{2}} + C_1 x + C_2, \\
y &= \int y'\, dx = \int \left(\left(\frac{2}{\ln 3}\right)^2 3^{-\frac{x}{2}} + C_1 x + C_2\right) dx = -\left(\frac{2}{\ln 3}\right)^3 3^{-\frac{x}{2}} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.
\end{aligned}$$

Ispalo je da nam za računanje y i y' nije trebalo ništa osim integrala rešavanog prilikom računanja y''.

b) U ovom slučaju nije moguće eksplicitno izraziti y'' preko x, tako da smo prinudjeni da parametrizujemo: $y'' = t,\ \sin 3t - t = x$, odakle je $dx = (3\cos 3t - 1)\, dt$ i onda (analogno kao u delu pod a))

$$\begin{aligned}
y' &= \int y''\,dx = \int t(3\cos 3t - 1)\,dt = t\sin 3t + \frac{1}{3}\cos 3t - \frac{t^2}{2} + C_1,\\
y &= \int y'\,dx = \int \left(t\sin 3t + \frac{1}{3}\cos 3t - \frac{t^2}{2} + C_1\right)(3\cos 3t - 1)\,dt\\
&= -\frac{3}{2}\int t^2\cos 3t\,dt + \int t\left(3\sin 3t\cos 3t - \sin 3t\right)\,dt + \int \cos^2 3t\,dt\\
&\quad + \left(3C_1 - \frac{1}{3}\right)\int \cos 3t\,dt + \int \left(\frac{1}{2}t^2 - C_1\right)\,dt\\
&= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}t^2\sin 3t - \frac{2}{3}\int t\sin 3t\,dt\right) + \int t\left(\frac{3}{2}\sin 6t - \sin 3t\right)\,dt + \int \frac{1+\cos 6t}{2}\,dt\\
&\quad + \left(C_1 - \frac{1}{9}\right)\sin 3t + \frac{t^3}{6} - C_1 t + C_2 = \dots
\end{aligned}$$

Podrazumeva se da su studenti upućeni u računanje ovakvih integrala uz pomoć parcijalne integracije (svi su istog tipa kao onaj koji se pojavio u 1. koraku rešenja ovog dela zadatka).

2. Zadatak je bio isti kao za 1. grupu.

3. Deo vezan za homogenu jednačinu je identičan kao za 1. grupu. Odgovarajuće partikularno rešenje prvo probavamo da nadjemo u obliku $y = const$ - ne ide, zatim probavamo da ga nadjemo u obliku $y = ax + b$ - ne ide. Konačno, ako pretpostavimo $y = ax^2 + bx + c$, imamo $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$, tj.

   $$x\cdot 2a + 2(x+1)(2ax+b) + 2(ax^2+bx+c) = x^2 - x + 1,\ 6ax^2 + (6a+4b)x + 2b + 2c = x^2 - x + 1,$$

   odakle dobijamo $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{2}$ i $c = 1$.
   Sada je opšte rešenje $y = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{1}{x}e^{-2x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$.

4. Karakteristična jednačina za odgovarajuću homogenu diferencijalnu jednačinu glasi

   $$\begin{aligned}
   &\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0,\\
   &(\lambda^2 + 2)(\lambda - 1) = 0
   \end{aligned}$$

   (odmah se vidi da $\lambda_1 = 1$ jeste rešenje, a onda vidimo da su druga dva rešenja $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$), odakle dobijamo da opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine glasi

   $$y_h = C_1 e^x + C_2 \sin x\sqrt{2} + C_2 \cos x\sqrt{2}.$$

   Ako zadatak rešavamo Metodom neodredjenih koeficijenata (a teško da bismo mogli drugačije), neophodno je da nezavisno nadjemo dva partikularna rešenja - jedno za $f_1(x) = e^x$ i drugo za $f_2(x) = e^{-2x}\sin x$.

   Prvo partikularno rešenje tražimo u obliku $y_{p_1} = Cx^1 e^x = Cxe^x$ (jer, u skladu sa oznakama sa vežbi, u $f_1(x)$ imamo $\alpha = 1$ i $\beta = 0$, pri čemu $\alpha \pm \beta i = 1$ jeste rešenje odgovarajuće karakteristične jednačine višestrukosti $s = 1$). Biće

$$y'_{p_1} = Ce^x(x+1),\ y''_{p_1} = Ce^x(x+2),\ y'''_{p_1} = Ce^x(x+3),$$

pa se $y'''_{p_1} - y''_{p_1} + 2y'_{p_1} - 2y_{p_1} = e^x$ svodi na $3Ce^x = e^x$, odakle dobijamo $C = \frac{1}{3}$, odnosno $y_{p_1}(x) = \frac{1}{3}e^x$.

Drugo partikularno rešenje tražimo u obliku $y_{p_2} = e^{-2x}\left(A\cos x + B\sin x\right)$ (jer, u skladu sa oznakama sa vežbi, u $f_2(x)$ imamo $\alpha = -2$ i $\beta = 1$, pri čemu $\alpha \pm \beta i = -2 \pm i$ nije rešenje odgovarajuće karakteristične jednačine). Biće

$$y'_{p_2} = e^{-2x}\left((-2A+B)\cos x + (-2B-A)\sin x\right),\ y''_{p_2} = e^{-2x}\left((3A-4B)\cos x + (3B+4A)\sin x\right)$$
$$e^{-2x}\left((-2A+11B)\cos x + (-2B-11A)\sin x\right)$$

pa se $y'''_{p_2} - y''_{p_2} + 2y'_{p_2} - 2y_{p_2} = e^{2x}\sin x$ svodi na

$$e^{-2x}\left((-11A+17B)\cos x + (-11B-17A)\sin x\right) = e^{-2x}\sin x,$$

odakle dobijamo $-11A + 17B = 0$ i $-17A - 11B = 1$, odakle sledi $A = -\frac{17}{410}$ i $B = -\frac{11}{410}$, odnosno $y_{p_2}(x) = e^{-2x}\left(-\frac{11}{410}\cos x - \frac{17}{410}\sin x\right)$.

Opšte rešenje polazne jednačine je

$$y = C_1e^{-x} + C_2\sin x\sqrt{2} + C_2\cos x\sqrt{2} + \frac{1}{3}e^x - e^{-2x}\left(\frac{17}{410}\cos x + \frac{11}{410}\sin x\right).$$

5. Videti rešenje odgovarajucćeg zadatka za 1. grupu.

Asistent: Aleksandar Pejčev