Pismeni ispit iz Numeričkih metoda, I grupa

1. Ispitati konvergenciju numeričkog reda

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2+\sin k}{1+k^2}.$$

Rešenje. Jednostavno nalazimo da važi

$$\frac{2+\sin k}{1+k^2} \le \frac{3}{k^2}.$$

Kako je red $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$ konvergentan zaključujemo da je naš red konvergentan.

2.a Oceniti gornju granicu greške koja može nastati prilikom rešavanja sistema linearnih jednačina $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} .5 & .5 \\ .5 & .50001 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{||\Delta b||_{+\infty}}{||b||_{+\infty}} \le 10^{-4}.$$

Rešenje. Znamo da važi

$$\frac{||\Delta x||_{+\infty}}{||x||_{+\infty}} \le ||A^{-1}||_{+\infty}||A||_{+\infty}\frac{||\Delta b||_{+\infty}}{||b||_{+\infty}}.$$

Nalazimo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 100002. & -100000. \\ -100000. & 100000. \end{bmatrix},$$
$$||A||_{+\infty} = \max\{.5+.5, .5+.50001\} = 1.00001,$$
$$||A^{-1}||_{+\infty} = \max\{100002. + 100000, 100000. + 100000.\} = 200002.$$

Važi

$$\frac{||\Delta x||_{+\infty}}{||x||_{+\infty}} \le 200004. \times 10^{-4} \approx 20.$$

2.b Koristeći Gauss-Seidelov metod rešiti sistem linearnih jednačina $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1.02 & -.25 & -.3 \\ -.25 & -.14 & 1.21 \\ -.41 & 1.13 & -.15 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} .515 \\ 2.780 \\ 1.555 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Prvo je potrebno sistem jednačina napisati u nešto izmenjenoj formi. Kao što znamo Gauss-Seidelov metod konvergira kad je matrica sistema djagonalno dominantna, tako da je najbolje sistem posmtrati u formi

$$A = \begin{bmatrix} 1.02 & -.25 & -.3 \\ -.41 & 1.13 & -.15 \\ -.25 & -.14 & 1.21 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} .515 \\ 1.555 \\ 2.780 \end{bmatrix}$$

gde smo samo razmenili drugu i treću vrstu. Ovako dobijen sistem jedančina je dijagonalno dominantan, jer

$$1.02 > |-.25| + |-.3| = .55, \quad 1.13 > |-.41| + |-.15| = .56, \quad 1.21 > |-.25| + |-.14| = .39.$$

Sam metod izgleda ovako

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -\begin{bmatrix} 1.02 & 0 & 0 \\ -.41 & 1.13 & 0 \\ -.25 & -.14 & 1.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -.25 & -.3 \\ 0 & 0 & -.15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1.02 & 0 & 0 \\ -.41 & 1.13 & 0 \\ -.25 & -.14 & 1.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .515 \\ 1.555 \\ 2.780 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & .2451 & .2941 \\ 0 & .0889 & .2395 \\ 0 & .0609 & .0885 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} .5049 \\ 1.5593 \\ 2.5823 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Startujući sa $x_0 = 0$, nalazimo

$$x_1 = \begin{bmatrix} .5049 \\ 1.5593 \\ 2.5822 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1.6466 \\ 2.3163 \\ 2.9057 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1.9273 \\ 2.4611 \\ 2.9805 \end{bmatrix},$$

$$x_4 = \begin{bmatrix} 1.9847 \\ 2.4919 \\ 2.9959 \end{bmatrix}, \quad x_5 = \begin{bmatrix} 1.9968 \\ 2.4983 \\ 2.9991 \end{bmatrix}, \quad x_6 = \begin{bmatrix} 1.9993 \\ 2.4996 \\ 2.9998 \end{bmatrix}, \quad x_7 = \begin{bmatrix} 1.9998 \\ 2.4999 \\ 2.9999 \end{bmatrix}$$

Vidimo da je rešenje približno $(2., 2.5, 3)$ do na tačnost sa kojom smo računali.

3. Naći Lagrangeov interpolacioni polinom za skup podataka

	0	1	2	3
x_k	1.	1.2	1.3	1.4
$f(x_k)$	0.	-1.1	$-.9$	$-.8$

Odrediti približno vrednost funkcije f u tački 1.25 i oceniti učinjenu grešku.

Rešenje. Nalazimo

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{(x-1.2)(x-1.3)(x-1.4)}{(1.-1.2)(1-1.3)(1-1.4)} 0 + \frac{(x-1.)(x-1.3)(x-1.4)}{(1.2-1.)(1.2-1.3)(1.2-1.4)}(-1.1) \\ &+ \frac{(x-1.)(x-1.2)(x-1.4)}{(1.3-1.)(1.3-1.2)(1-1.4)}(-.9) + \frac{(x-1.)(x-1.2)(x-1.3)}{(1.4-1.)(1.4-1.2)(1.4-1.3)}(-.8). \end{aligned}$$

$P_3(1.25) = -1.016$

4. Koristeći metod proste iteracije odrediti bar jedno rešenje jednačine $x = x^2/2 - 1$ sa relativnom greškom manjom od 10^{-2}.

Rešenje. Crtanjem grafika možemo naći da je jedno rešenje u intervalu $(-1, 0)$. Posmtrajmo interativni proces

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad x_0 = -.5, \quad \phi(x) = \frac{x^2}{2} - 1.$$

Proces je konvergentan jer je $|\phi'(x)| = |x| < 1$, za $x \in (-1, 0)$.

Dobijamo

$$
\begin{aligned}
&x_0 = -.5,\\
&x_1 = \phi(x_0) = -.875\\
&x_2 = \phi(x_1) = -.6171875\\
&x_3 = \phi(x_2) = -809539794921875\\
&x_4 = \phi(x_3) = -.672322660218924\\
&x_5 = \phi(x_4) = -.773991120278074\\
&x_6 = \phi(x_5) = -.700468872865346\\
&x_7 = \phi(x_6) = -.754671679073376\\
&x_8 = \phi(x_7) = -.715235328402286\\
&x_9 = \phi(x_8) = -.744219212502637\\
&x_{10} = \phi(x_9) = -.723068881870977\\
&x_{11} = \phi(x_{10}) = -.738585696034927\\
&x_{12} = \phi(x_{11}) = -.727245584806301\\
&x_{13} = \phi(x_{12}) = -.735556929689871\\
&x_{14} = \phi(x_{13}) = -.729478001592605
\end{aligned}
$$

5. Odrediti A_0, A_1 i A_2 tako da kvadraturna formula

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1),$$

ima maksimalni algebraski stepen tačnosti.

Rešenje. Kako imamo tri nepoznate težine to možemo postići algebraski stepen tačnosti 2. Odavde dobijamo sistem jednačina

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} = A_0 + A_1 + A_2,\\
&\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx = 0 = A_0(-1) + A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1,\\
&\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} dx = 2 - \frac{\pi}{2} = A_0(-1)^2 + A_1 0^2 + A_2 1^2.
\end{aligned}
$$

Rešenje liearnog sitema je $(A_0, A_1, A_2) = (1 - \pi/4, \pi - 2, 1 - \pi/4)$.

Pismeni ispit iz Numeričkih metoda, II grupa

1. Ispitati konvergenciju numeričkog reda

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + \sin k + 2}.$$

Rešenje. Pokažimo da red apsolutno konvergira. Dobijamo

$$\frac{1}{k^2 + \sin k + 2} \leq \frac{1}{k^2},$$

kako je red $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$ konvergentan to je i naš red apsolutno konvergentan, pa sami tim i uslovno konvergentan.

2.a Oceniti gornju granicu greške koja može nastati prilikom rešavanja sistema linearnih jednačina $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1. & -1. \\ 1. & -.9998 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{||\Delta b||_1}{||b||_1} \leq 10^{-5}.$$

Rešenje. Videti rešenje zadatka 2.a u prvoj grupi. $||A||_1 = 2$, $||A^{-1}||_1 = 10000$, i

$$\frac{||\Delta x||_1}{||x||_1} \leq ||A||_1 ||A^{-1}||_1 \frac{||\Delta b||_1}{||b||_1} \approx .2$$

2.b Koristeći Gauss-Seidelov metod rešiti sistem linearnih jednačina $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} -.41 & 1.13 & -.15 \\ 1.02 & -.25 & -.3 \\ -.25 & -.14 & 1.21 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.555 \\ .515 \\ 2.780 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Videti rešenje zadatka 2.b u prvoj grupi.

3. Naći Newtonov interpolacioni polinom za skup podataka

	0	1	2	3
x_k	1.	.8	.6	.4
$f(x_k)$	2.	2.3	1.8	.9

Odrediti približno vrednost funkcije f u tački .7.

Rešenje. Nalazimo

$$
\begin{array}{llllll}
k & x_k & [x_k;f] & [x_k,x_{k+1};f] & [x_k,x_{k+1},x_{k+2};f] & [x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3};f] \\
0 & 1. & \underline{2.} & & & \\
 & & & \dfrac{2.-2.3}{1.-.8} = \underline{-1.5} & & \\
1 & .8 & 2.3 & & \dfrac{-1.5-2.5}{1.-.6} = \underline{-10.} & \\
 & & & \dfrac{2.3-1.8}{.8-.6} = 2.5 & & \dfrac{-10.-(-5.)}{1.-.4} = \underline{-8.3333} \\
2 & .6 & 1.8 & & \dfrac{2.5-4.5}{.8-.4} = -5. & \\
 & & & \dfrac{1.8-.9}{.6-.4} = 4.5 & & \\
3 & .4 & .9 & & &
\end{array}
$$

Odavde dobijamo polinom

$P_3(x) = 2. - 1.5(x-1.) - 10.(x-1.)(x-.8) - 8.3333(x-1.)(x-.8)(x-.6)$

Vrednost polinoma u tački .7 iznosi

$$P(.7) = 2.125$$

4. Koristeći metod proste iteracije odrediti bar jedno rešenje jednačine $x = 1 - x^2/3$ sa relativnom greškom manjom od 10^{-2}.

   Rešenje. Videti rešenje zadatka 4. u prvoj grupi. Iterativna funkcija je $\phi(x) = 1 - x^2/3$, a rešenje je .7912878474779201

5. Odrediti vrednosti za A_0, A_1 i A_2 tako da kvadraturna formula

$$\int_{-1}^{1} (1+x^2) f(x)\, dx = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1),$$

   ima maksimalni mogući algebarski stepen tačnosti.

   Rešenje. Videti rešenje zadatka u prvoj grupi. Rešenje je $(A_0, A_1, A_1) = (8/15, 8/5, 8/15)$.