

## Prvi kolokvijum iz predmeta Matematika 1

### 1. grupa

1. Date su tačke  $A(4, 1, 3)$ ,  $B(2, -3, 0)$ ,  $C(1, 2, -3)$  i  $D(0, -4, 5)$ .

a) Izračunati zapreminu tetraedra  $ABCD$ .

b) Izračunati visinu tetraedra iz temena  $D$ .

c) Napisati jednačinu ravni  $ABC$ .

d) Napisati jednačinu visine iz temena  $D$ .

**Rešenje:** a) Kako je zapremina tetraedra jednaka šestini zapremine paralelopipeda nastalog od tri vektora ivica tog tetraedra koji izviru iz nekog njegovog temena (svejedno je kog), traženu zapreminu možemo računati kao jednu šestinu apsolutne vrednosti mešovitog proizvoda

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -3 & 1 & -6 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} = -121,$$

odnosno  $V = \frac{121}{6}$ .

b) Kako je po poznatoj formuli zapremina tetraedra  $V = \frac{1}{3}P_{ABC} \cdot H_D$ , s obzirom na

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -4 & -3 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (27, -3, -14)$$

i

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{27^2 + 3^2 + 14^2} = \frac{1}{2} \sqrt{934},$$

dobijamo

$$H_D = \frac{3V}{P_{ABC}} = \frac{\frac{121}{2}}{\frac{\sqrt{934}}{2}} = \frac{121}{\sqrt{934}}.$$

c) Upravo je vektor  $\vec{AB} \times \vec{AC}$  normalan na ravan  $ABC$  (kao i vektorski proizvod svaka dva međusobno neparalelna vektora te ravni), te se njena jednačina može zapisati kao

$$27(x - x_0) - 3(y - y_0) - 14(z - z_0) = 0, \text{ tj. } 27x - 3y - 14z = 27x_0 - 3y_0 - 14z_0,$$

gde  $x_0, y_0, z_0$  mogu biti koordinate bilo koje tačke te ravni. Bilo da za poslednje uzmemo koordinate tačke  $A$ , bilo da uzmemo koordinate tačke  $B$ , bilo koordinate tačke  $C$ , desna strana će iznositi 63 (mora za svaku tačku da bude isto), pa je

$$(ABC) : 27x - 3y - 14z = 63.$$

d) Prava koja sadrži tačku  $D(0, -4, 5)$  i ima vektor pravca  $(27, -3, -14)$ :

$$\frac{x}{27} = \frac{y + 4}{-3} = \frac{z - 5}{-14}.$$

2. Rešiti matricnu jednačinu  $XAB = C + X$ , ako su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = A^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rešenje:** Data matricna jednačina je ekvivalentna sa  $X = C(AB - E)^{-1}$ , ako je  $\det(AB - E) \neq 0$ . Dalje je

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 11 & 34 \end{bmatrix},$$

pa je

$$AB - E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 11 \\ 3 & 11 & 33 \end{bmatrix}.$$

Njena determinanta je  $-36 \neq 0$ , pa postoji inverzna matrica

$$(AB - E)^{-1} = \frac{1}{-36} \begin{bmatrix} 11 & -33 & 10 \\ -33 & -9 & 6 \\ 10 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$

pa je

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11/36 & 11/12 & -5/18 \\ 11/12 & 1/4 & -1/6 \\ -5/18 & -1/6 & 1/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/36 & 11/12 & -5/18 \\ 23/36 & 1/12 & -1/18 \end{bmatrix}.$$

3. U zavisnosti od realnog parametra  $a$  rešiti sistem

$$\begin{aligned} x + ay - z &= 5, \\ 3x - y - az &= a - 3 \\ 6x + (3a - 1)y - 5z &= 14. \end{aligned}$$

**Rešenja:** Sistem rešavamo uz pomoć Kramerovog pravila, dobijamo da su odgovarajuće determinante jednake

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 3 & -1 & -a \\ 6 & 3a-1 & -5 \end{vmatrix} = -3a^2 + 5a + 2 = -(a-2)(3a+1), \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} 5 & a & -1 \\ a-3 & -1 & -a \\ 14 & 3a-1 & -5 \end{vmatrix} = 3a^2 - 10a + 8 = (a-2)(3a-4), \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & a-3 & -a \\ 6 & 14 & -5 \end{vmatrix} = 30 - 15a = -15(a-2), \\ \Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & a & 5 \\ 3 & -1 & a-3 \\ 6 & 3a-1 & 14 \end{vmatrix} = 3a^2 - 5a - 2 = (a-2)(1+3a). \end{aligned}$$

Bitno je glavnu determinantu rastaviti i diskutovati u zavisnosti od toga kad je različita od 0 i kad je jednaka 0 (za ostale determinante je u ovom rešenju rastavljanje takodje sprovedeno, mada nije neophodno).

Za  $a \neq 2, -\frac{1}{3}$  nalazimo da sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x, y, z) = \left( \frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = \left( \frac{4-3a}{3a+1}, \frac{15}{3a+1}, -1 \right).$$

Za  $a = -\frac{1}{3}$  je sistem protivrečan (čim je glavna determinanta jednaka 0 i pritom bar jedna od pomoćnih različita od 0, sistem je protivrečan i tu nikakva dalja diskusija nije potrebna).

Za  $a = 2$  (kada su i glavna i sve tri pomoćne determinante jednake 0, neophodno je da se sprovede ovakva diskusija), dati sistem se svodi na

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ 6 & 5 & -5 & 14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \leftarrow^{-3} \\ \leftarrow_{+} \end{array} \right\}^{-6} \\ \leftarrow_{+} \end{array} \right\} \end{array} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -16 \\ 0 & -7 & 1 & -16 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \leftarrow^{-1} \\ \leftarrow_{+} \end{array} \right\} \end{array} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

odakle vidimo da u ovom slučaju sistem ima beskonačno mnogo rešenja

$$(x, y, z) \in \{(-11 + 5t, t, -16 + 7t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

4. Odrediti položaj datih pravih, a zatim i njihovo najkraće rastojanje:

$$p_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}, \quad p_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}.$$

Ispitati da li postoji prava koja sadrži tačku  $M(1,2,-3)$  i seče date prave.

**Rešenje:**

Jednačina prave  $p_1$  u kanonskom obliku je (radjeno je na času kako se do ovoga dolazi na osnovu datih uslova)

$$p_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Jasno je da su dve  $p_1$  i  $p_2$  mimoilazne ako i samo ako za bilo koju tačku  $M_1 \in p_1$  i bilo koju tačku  $M_2 \in p_2$  važi da vektori datih pravih nisu koplanarni sa  $\overrightarrow{M_1M_2}$ , tj. ako i samo ako je njihov mešoviti proizvod  $[\vec{p}_1, \vec{p}_2, \overrightarrow{M_1M_2}]$  različit od 0 (isto kao što su koplanarne ako i samo je  $[\vec{p}_1, \vec{p}_2, \overrightarrow{M_1M_2}] = 0$ ). Za  $M_1$  i  $M_2$  možemo uzeti upravo tačke kroz koje su nam prave date u kanonskim jednačinama,  $M_1(-1, 1, 0)$  i  $M_2(2, 0, 0)$ . Kako je sad

$$[\vec{p}_1, \vec{p}_2, \overrightarrow{M_1M_2}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \neq 0,$$

to su prave  $p_1$  i  $p_2$  mimoilazne.

Deo vezan za određivanje najkraćeg rastojanja se može raditi nalaženjem zajedničke normale: ukoliko  $P_1P_2$  predstavlja tu zajedničku normalu, gde su tačke  $P_1 \in p_1$  i  $P_2 \in p_2$  date sa  $P_1(t_1 - 1, -t_1 + 1, t_1)$  i  $P_2(t_2 + 2, 2t_2, 0)$  za neke  $t_1$  i  $t_2$ , odgovarajuće  $t_1$  i  $t_2$  nalazimo iz uslova  $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{p}_1 = 0$  i  $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{p}_2 = 0$ , a zatim izračunamo intenzitet vektora  $\overrightarrow{P_1P_2}$ .

Kako je  $\overrightarrow{P_1P_2} = (t_2 - t_1 + 3, 2t_2 + t_1 - 1, -t_1)$ , to su ova dva uslova ekvivalentni sa

$$(t_2 - t_1 + 3) - (2t_2 + t_1 - 1) + (-t_1) = 0, \quad 3t_1 + t_2 = 4$$

i

$$(t_2 - t_1 + 3) + 2(2t_2 + t_1 - 1) = 0, \quad t_1 + 5t_2 = -1,$$

odakle rešavanjem sistema po  $t_1$  i  $t_2$  dobijamo  $t_1 = \frac{3}{2}$  i  $t_2 = -\frac{1}{2}$ . Sledi  $\overrightarrow{P_1P_2} = (t_2 - t_1 + 3, 2t_2 + t_1 - 1, -t_1) = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ , te  $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \frac{\sqrt{14}}{2}$ , što je upravo dužina zajedničke normale.

Drugi način da se uradi zadatak bi bio da se pozovemo na gotovu formulu za rastojanje između dve mimoilazne prave

$$d = \frac{|[\vec{p}_1, \vec{p}_2, \overrightarrow{M_1M_2}]|}{|\vec{p}_1 \times \vec{p}_2|}.$$

Dalje je

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2, 1, 3),$$

pa je traženo rastojanje

$$d = \frac{|-7|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Da bi se ispitala egzistencije prave sa opisanim svojstvom, potrebne je ustvari ispitati postojanje tačke  $A \in p_1$  i  $B \in p_2$  takve da su kolinearne sa  $M$ . Koordinate proizvoljne tačke  $A_1 \in p_1$  su oblika  $x = t_1 - 1, y = -t_1 + 1, z = t_1$  za neko  $t_1 \in \mathbb{R}$ , dok su koordinate proizvoljne tačke  $A_2 \in p_2$  oblika  $x = t_2 + 2, y = 2t_2, z = 0$  za neko  $t_2 \in \mathbb{R}$ . Kolinearnost tačaka  $M, A_1$  i  $A_2$  je ekvivalentna sa kolinearnošću vektora  $\overrightarrow{MA_1}$  i  $\overrightarrow{MA_2}$ , odnosno sa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA_1} \times \overrightarrow{MA_2} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t_1 - 2 & -t_1 - 1 & t_1 + 3 \\ t_2 + 1 & 2t_2 - 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \left( \begin{vmatrix} -t_1 - 1 & t_1 + 3 \\ 2t_2 - 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} t_1 - 2 & t_1 + 3 \\ t_2 + 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} t_1 - 2 & -t_1 - 1 \\ t_2 + 1 & 2t_2 - 2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0), \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} -2t_1t_2 - t_1 - 6t_2 + 3 &= 0 \\ -t_1t_2 + 2t_1 - 3t_2 - 9 &= 0 \\ 3t_1t_2 - t_1 - 3t_2 + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminišući  $t_1t_2$  iz npr. druge jednačine,  $t_1t_2 = 2t_1 - 3t_2 - 9$  (najlakše nam je iz druge jer onda ne moramo nigde da pravimo razlomak) i zamenjujući redom u prvu i treću, dobijamo sistem dve linearne jednačine sa dve nepoznate  $t_1$  i  $t_2$ ,

$$\begin{aligned} -5t_1 + 21 &= 0 \\ 5t_1 - 12t_2 - 22 &= 0, \end{aligned}$$

čije je rešenje  $t_1 = \frac{21}{5}$  i  $t_2 = -\frac{1}{12}$ .

Kako za dobijene vrednosti  $t_1$  i  $t_2$  zaista važi  $t_1 t_2 = 2t_1 - 3t_2 - 9$ , dobijamo da tačke  $A_1 \left( \frac{16}{5}, -\frac{16}{5}, \frac{21}{5} \right)$  prave  $p_1$  i  $A_2 \left( \frac{11}{12}, -\frac{1}{6}, 0 \right)$  sa  $p_2$  jesu kolinearne sa tačkom  $M$ .

**Napomena** Drugi način da se radi ovaj deo zadatka bio bi da se nadje jednačina ravni određene tačkom  $M$  i jednom od pravih  $p_1$  i  $p_2$ , npr.  $p_1$ ;  $A_2$  bi se onda moglo dobiti kao prodor prave  $p_2$  kroz tu ravan ( $A_1$  je presek prave  $MA_2$  sa pravom  $p_1$ ).

## 2. grupa

1. Date su tačke  $A(3, 1, 4)$ ,  $B(0, -3, 2)$ ,  $C(-3, 2, 1)$  i  $D(5, -4, 0)$ .

a) Izračunati zapreminu tetraedra  $ABCD$ .

b) Izračunati visinu tetraedra iz temena  $D$ .

c) Napisati jednačinu ravni  $ABC$ .

d) Napisati jednačinu visine iz temena  $D$ .

Zadatak je tipski potpuno isti kao odgovarajući zadatak za 1. grupu, jedino su date drugačije brojne vrednosti (i to samo delnično).

2. Rešiti matricnu jednačinu  $ABX = C + 2X$ , ako su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = A^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rešenje:** Data matricna jednačina je ekvivalentna sa  $X = (AB - 2E)^{-1}C$ , ako je  $\det(AB - 2E) \neq 0$ . Dalje je

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 11 & 34 \end{bmatrix},$$

pa je

$$AB - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 11 & 32 \end{bmatrix}.$$

Njena determinanta je  $2 \neq 0$ , pa postoji inverzna matrica

$$(AB - 2E)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -25 & -31 & 13 \\ -31 & -41 & 17 \\ 13 & 17 & -7 \end{bmatrix},$$

pa je

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -25 & -31 & 13 \\ -31 & -41 & 17 \\ 13 & 17 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25/2 & -9 \\ -31/2 & -12 \\ 13/2 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. U zavisnosti od realnog parametra  $m$  rešiti sistem

$$\begin{aligned} x + 7y - mz &= -1, \\ -2x - my + z &= m \\ 2x + 25y + (1 - 4m)z &= -1. \end{aligned}$$

**Rešenje:** Sistem rešavamo Kramerovom metodom, za odgovarajuće determinante dobijamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -m \\ -2 & -m & 1 \\ 2 & 25 & 1-4m \end{vmatrix} = 2m^2 - 7m + 3 = (m-3)(2m-1),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 7 & -m \\ m & -m & 1 \\ -1 & 25 & 1-4m \end{vmatrix} = 18 - 6m = -6(m-3),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -m \\ -2 & m & 1 \\ 2 & -1 & 1-4m \end{vmatrix} = -2m^2 + 7m - 3 = -(2m-1)(m-3),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ -2 & -m & m \\ 2 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 36 - 12m = -12(m-3).$$

Za  $m \neq 3, \frac{1}{2}$  nalazimo da sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x, y, z) = \left( \frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = \left( \frac{-6}{2m-1}, -1, \frac{-12}{2m-1} \right).$$

Bitno je glavnu determinantu rastaviti i diskutovati u zavisnosti od toga kad je različita od 0 i kad je jednaka 0 (za ostale determinante je u ovom rešenju rastavljanje takodje sprovedeno, mada nije neophodno).

Za  $m = \frac{1}{2}$  je sistem protivrečan (čim je glavna determinanta jednaka 0 i pritom bar jedna od pomoćnih različita od 0, sistem je protivrečan i tu nikakva dalja diskusija nije potrebna).

Za  $m = 3$  (kada su i glavna i sve tri pomoćne determinante jednake 0, neophodno je da se sprovede ovakva diskusija), dati sistem se svodi na

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 25 & -11 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \leftarrow^2 \\ \leftarrow^+ \end{array} \right]^{-2} \\ \left[ \leftarrow^+ \right]_+ \end{array} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & 11 & -5 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & 1 \end{bmatrix} \left[ \leftarrow^+ \right]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & 11 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

odakle vidimo da u ovom slučaju sistem ima beskonačno mnogo rešenja

$$(x, y, z) \in \left\{ \left( \frac{-2(9+t)}{11}, \frac{1+5t}{11}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Odrediti položaj datih pravih, a zatim i njihovo najkraće rastojanje:

$$p_1 : \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}, \quad p_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}.$$

Ispitati da li postoji prava koja sadrži tačku  $M(1,2,-3)$  i seče date prave.

Zadatak je tipski potpuno isti kao odgovarajući zadatak za 1. grupu, jedino što su zamenjena mesta  $x$  i  $y$ -koordinati (što znači da će se i dobijena rešenja takodje razlikovati samo utoliko).

*Nastavnik: Aleksandar Pejčev*

*Asistent: Rada Mutavdžić*