

Rešenja zadataka sa pismenog dela ispita iz predmeta Matematika 1, septembar 2014. године

1. Dati sistem je ekvivalentan sa

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -\lambda \\ 3 & \lambda - 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Primenimo sledeće elementarne transformacije, da bi našli $\rho(\Sigma)$.

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -\lambda \\ 3 & \lambda - 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -\lambda \\ 3 & \lambda - 1 & 3 & 1 \\ \lambda & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow^1 \leftarrow^3 \leftarrow^2 \\ \leftarrow^+ \\ \leftarrow^+ \\ \leftarrow^+ \end{array} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3 - \lambda \\ 6 & \lambda - 7 & 0 & 10 \\ \lambda + 2 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow^{-2} \leftarrow^{-\frac{1}{3}(\lambda+2)} \\ \leftarrow^+ \\ \leftarrow^+ \end{array} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3 - \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 2\lambda + 4 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & \frac{1}{3}(\lambda^2 - \lambda + 18) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ukoliko je $\lambda = 1$ tada je sistem oblika:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

odakle sledi da je sistem protivrečan odnosno $\mathcal{R}(\Sigma) = \emptyset$.

Ako je $\lambda \neq 1$ tada je sistem oblika:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & \boxed{\lambda-1} & 0 & 2\lambda+4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \frac{1}{3}(\lambda^2-\lambda+18) \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow + \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -1 \end{array} \\ &= \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & \boxed{\lambda-1} & 0 & 2\lambda+4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(\lambda^2-7\lambda+6) \end{array} \right]\end{aligned}$$

Slobodni član $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ za $\lambda = 1$ ili za $\lambda = 6$. Sledi da je $\mathcal{R}(\Sigma) = \emptyset$ za $\lambda \notin \{1, 6\}$.

Ukoliko je $\lambda = 6$ sistem je oblika:

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

i ima jedinstveno rešenje $\mathcal{R}(\Sigma) = \left\{ \left(\frac{11}{5}, \frac{16}{5}, -\frac{36}{5} \right) \mid \lambda = 6 \right\}$

2. Vektor pravca prave p_2 je kolinearan sa vektorom

$$\vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} = (2, 1, 3)$$

Uočimo bilo koju tačku sa prave p_1 , na primer $M_0(-2, 0, 1)$. Tačka mora pripadati ravni α .

Kako je vektor normale na ravan α

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},$$

to njena je jednačina glasi

$$-4(x+2) + 2y + 2(z-1) = 0. \quad -4x + 2y + 2z - 10 = 0.$$

3. Domen date funkcije je skup svih realnih brojeva za koje važi $x^2 - 2 \geq 0$, odnosno $|x| \geq \sqrt{2}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. Eventulne nule tražimo iz uslova $\sqrt{x^2 - 2} + x = 0$, $\sqrt{x^2 - 2} =$

$-x$, $x^2 = x^2 - 2$, što očito nema rešenja. Vrednost $\sqrt{x^2 - 2} + x$ je pozitivna svakako kad god je $x \geq 0$ (jer ono što je pod korenom ne može biti negativno), dok u slučaju $x \leq 0$ imamo

$$\sqrt{x^2 - 2} + x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2} \geq -x \Leftrightarrow x^2 - 2 \geq x^2,$$

što očito nije tačno. Dakle, $f(x) > 0$ za $x \in [\sqrt{2}, +\infty)$ i $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$.

U " $+\infty$ "važi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty + \infty = +\infty,$$

tako da u ovom slučaju nema horizontalne asimptote (zato treba da ispitamo i postojanje kose asimptote). Dalje,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 2}{x^2}} = 1 + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 2} + x} = 0,$$

što znači da data funkcija u " $+\infty$ "ima kosu asimptotu $y = 2x$.

U " $-\infty$ "važi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2} + x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t^2 - 2} - t) = 0$$

(uvedena je smena $t = -x$) na osnovu malopre dobijenog rezultata, što znači da u " $-\infty$ "ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ (x-osa). Zato egzistenciju kose asimptote nema potrebe ispitivati.

Vertikalnih asimptota je jasno da ne može biti.

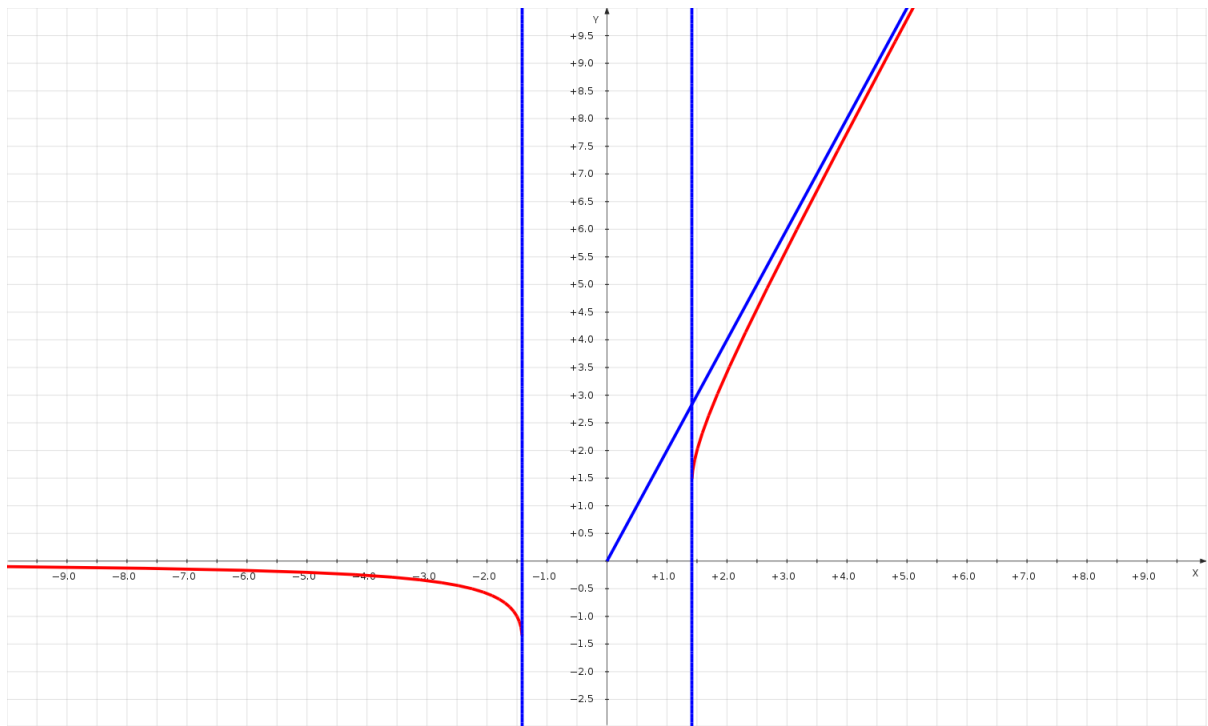
Prvi izvod, $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$, je pozitivan ako i samo ako važi $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} > -1$, što očito

uvek važi za $x > 0$, dok za $x < 0$ ovo, odnosno $\frac{x^2}{x^2 - 2} < 1$ (prilikom kvadriranja nejednačine u kojoj su obe strane negativne - menja se znak!), nikad ne važi u domenu $x^2 - 2 \geq 0$ date funkcije. Dakle, $f'(x) > 0$ i $f(x)$ raste za $x \in [\sqrt{2}, +\infty)$, a $f'(x) < 0$ i $f(x)$ opada za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$ ($f'(x)$ nikad nije jednako 0).

Drugi izvod,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[x (x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}} \right]' = x \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 - 2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x + (x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x^2}{(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2 - 2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-x^2 + x^2 - 2}{(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2}{(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

je očito uvek strogo manji od 0, odnosno funkcija $f(x)$ je konkavna na celom svom domenu.



4. Važno je uočiti $D_{\vec{r}} = D_x \cap D_y \cap D_z = (0, +\infty)$. Kako je krivina krive jednaka:

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$$

potrebno je izračunati:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \left(1 - \frac{1}{t^2}, 1 + \frac{1}{t^2}, \frac{2}{t}\right) \\ \ddot{\vec{r}} &= \left(\frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^2}\right) \\ \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 - \frac{1}{t^2} & 1 + \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \\ \frac{2}{t^3} & -\frac{2}{t^3} & -\frac{2}{t^2} \end{vmatrix} = \frac{2}{t^2} \left(-1 + \frac{1}{t^2}, 1 + \frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t}\right)\end{aligned}$$

Izračunajmo intezitete potrebnih vektora:

$$|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t}\right)^2} = \sqrt{2} \left|1 + \frac{1}{t^2}\right| = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

$$\begin{aligned}|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| &= \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\right)^2 \left(-1 + \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^2}\right)^2 \left(-\frac{2}{t}\right)^2} \\ &= \left|\frac{2}{t^2}\right| \cdot \sqrt{2} \left|1 + \frac{1}{t^2}\right| \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{t^2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

Konačno se dobija krivina krive kao funkcija od t :

$$K = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{t^2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}{2\sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^3} = \frac{1}{t^2 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2} = \frac{t^2}{(t^2 + 1)^2}$$

Da bi pronašli ekstremalnu krivinu krive, neophodno je pronaći prvi izvod krivine:

$$K' = \frac{2t(t^2 + 1)^2 - t^2 \cdot 2 \cdot (t^2 + 1) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^4} = \frac{2t^3 + 2t - 4t^3}{(t^2 + 1)^3} = 2 \frac{t(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^3}$$

Nule prvog izvoda su:

$$K' = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t^2 = 1 \Rightarrow t = 0 \vee t = -1 \vee t = 1 \Rightarrow t = 1$$

jer je $1 \in D_{\vec{r}}$. Slično iz $K' > 0$ za $-1 < t < 1 \Rightarrow 0 < t < 1$ sledi da je maksimum krivine krive u $t = 1$ odnosno u tački $\dot{\vec{r}}(1) = M(2, 0, 0)$. Vrednost krivine krive za $t = 1$ je:

$$K(1) = \frac{1^2}{(1^2 + 1)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = \frac{1}{K} = 4$$

odakle je jednačina tražene lopte:

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 4^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4^2$$

prof. dr Slobodan Radojević
doc. dr Aleksandar Pejčev