DODATAK - za kolokvijum 5 i 6

(elementi diferencijalnih jednačina)

•

Opšta napomena: U teoriji običnih diferencijalnih jednačina upoznajemo se sa diferencijalnim jednačinama kod kojih nepoznata funkcija zavisi od *jedne realne promenljive*. U ovom tekstu ćemo sa x označiti *nezavisno promenljivu* a sa y(x) *nepoznatu funkciju*, a izvode funkcije y(x) sa $y'_x \equiv \frac{dy}{dx}$ tj. skraćeno y'.

Postupak nalaženja rešenja diferencijalnih jednačina često se naziva *integraljenjem* diferencijalnih jednačina.

(a) Geometrisko tumačenje diferencijalnih jednačina prvog reda

Ma koja algebarska jednačina oblika y = f(x) može se grafički predstaviti krivom linijim. Kada se izabere jedna vrednost x, jednačina definiše jednu vrednost y, koja se može povezati sa tim x. Ovo određuje jednu tačaku na krivoj. Ukratko, algebarska jednačina definiše krivu kao skup tačaka čije kordinate zadovoljavaju tu jednačinu.

Jednačine koje su nazvane diferencijalne ne vezuju y direktno sa x – one se služe potpuno drugim procesom. Da bi to objasnili uzmimo prvo jednu kružnu liniju poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početkom,

$$(1)\quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Šta izražava ova jednačina? Ona izražava poznatu osobinu kružne linije, kao geometrisko mesto tačaka u ravni čije rastojanje od jedne stalne tačke (ovde, od koordinatog početka) ima konstantnu vrednost, recimo R_i (i=1, 2,...,n). Međutim ako bi sada postavili pitanje koju osobinu imaju ovi krugovi, bez obrira na vrednost njihovih poluprečnika, onda u izražavanju te osobine ne sme učestvovati veličina R_i, koja karakteriše svaki posebni krug. Zato diferencirajmo jednačinu (1) po x; sledi 2x + 2yy' = 0, ovu relaciju možemo napisati i u obliku

$$(2)\quad x + yy' = 0 \quad \text{ili} \quad xdx + ydy = 0.$$

Kao što vidimo napisana jednačina (2), osim x i y, sadrži i izvod y'=dy/dx, odnosno diferencijale dx i dy. Prirodno je onda što takvu jednačinu zovemo diferencijalna jednačina. Kako ova jednačina sadrži samo izvode prvog reda, nazivamo je diferencijalna jednačina prvog reda. Nasuprot ovoj jednačini (2), jednačinu (1) koja je bez diferencijala, često se naziva i konačnom jednačinim.

Šta izražava jednačina (2)? Pošto je y/x=k koeficijent potega OM tačke M kružne linije a $y'=k_1$ ugaoni koeficijent tangente na krugu u istoj tački, onda zapravo diferencijalna jednačina prvog reda data u obiku (2) tj.(2')

$$(2')\quad 1 + kk_1 = 0$$

izražava ortogonalnost tangente na krugu i potega tačke dodira. Na taj način smo došli do diferencijalne geometriske osobine svih krugova sa centrom u koordinatnom početku. Primetimo da smo do ove osobine došli tako što smo posmatrali osobinu kružne linije u malom tj. u okolini tačke M.

Generalno, posmatrajmo diferencijalnu jednačinu prvog reda u takozvanom normalnom obliku[1]:

$$(3)\qquad y' = f(x,y).$$

---

[1]Diferencijalna jednačina prvog reda, naime, ima *opšti oblik* φ (y', y, x)=0, ako se ova jednačina može na jednoznačan način rešiti po y' dolazimo do pomenutog normalnog oblika.

Zamena posebne vrednosti za x u ovoj jednačini ne vodi nekoj vrednosti y, kao što je to slučaj sa jednačinom (1). Mesto toga, kada se pojedinačno odrede vrednosti za x i y, biće određene neke vrednosti za y'. To jest, ako se izabere ma koja tačka M(x,y), jednačina (3) određuje pravac koji tangenta integralne krive koja prolazi kroz tu tačku mora imati ako prolazi kroz tu tačku M. Zato ćemo kazati, da diferencijalna jednažina definiše krivu kazivanjem pravca u kome ona prolazi kroz svaku od svojim tačaka.

Rešiti diferencijalnu jednačinu znači naći sva njena netrivijalna rešenja. Uopšte u problemu rešavanja diferencijalnih jednačina osim traženja svih njenih rešenja, u zadatom skupu, značajno je ispitati osobine tih rešenja i dokazati njihovu egzistenciju.

Pretpostavimo da za diferencijalnu jednačinu prvog reda (3) postoji rešenje. Opšti integral te jednačine u nekoj oblasti D u 0xy ravni je neprekidna diferencijabilna funkcija y nezavisno promenljive x i proizvoljne konstante C, tj. (4) $y = F(x, C)$.

Ta funkcija treba da zadovoljava identitet

$$(5) \qquad \frac{dF(x,C)}{dx} \equiv f(x, F(x,C))$$

ne samo za svako x, već i za svaku vrednost C. Pored toga, zahteva se da jednačina (4) ima rešenje po C za svaku tačku (x,y) iz oblasti D. Za svaku određenu vrednost C jednačini (4) odgovara kriva linija u ravni, koja se zove integralna kriva date diferencijalne jednačine prvog reda (3). Prema tome jednačina integralne krive je partikularni integral[2].

Ako u jednačini (4) konstanti C ne dajemo određenu vrednost, već tu veličinu ostavljamo proizvoljnu, toj jednačini više ne odgovara određena integralna kriva, već niz krivih. Taj se niz zove porodica integralnih krivih. Takva porodica geometriski predstavlja opšti integral.

Primer (1): Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' + y = 0$

Lako je videti da data diferencijalna jednačina prvog reda razdvaja promenljive tj. da se može napisati u obliku $(dy/y)= -(dx/x)$. Integralimo levu i desnu stranu ove jednačine. Kvadratura ovog datog primera daje rešenje u obliku $\ln(y)= -\ln(x) + C_1$, ali kako je C_1 bilo koja konstanta najednostavnije je da je u ovom slučaju napišemo u obliku $C_1=\ln(C)$, pa se ista kvadratura može napisati i u obliku $xy = C$. Znači kao opšte rešenje date diferencijalne jednačine smo dobili familiju hiperbola.

Primer (2): Odrediti konačno rešenje diferencijalne jednačine $xy' + y = 0$ koja prolazi kroz tačku $M_1(1, 1)$.

U prethodnom zadatku smo pokazali da je opšte rešenje date diferencijalne jednačine familija hiperbola $xy=C$. Integralna kriva koja prolazi kroz tačku $M_1(1, 1)$ jeste traženo konačno rešenje. Naime za $x_1=1$ i $y_1=1$ sledi da je C=1, pa je samim tim konačno rešenje date diferencijalne jednačine, sledeća hiperbola $xy = 1$. (Pogledati u skicu prethodnog zadatka). Od svih integralih krivih izabrali smo znači onu koja u tački M ima tangentu čiji je keficijent pravca

$$\mathrm{tg}\alpha_{M1} = (y')_{M1} = -1.$$

Opšta napomena: Od elementarnih metoda za integraljenje diferencijalnih jednačina prvog reda ovde smo govorili samo o onim jednačinama koje razdvajaju promennjive[3]. Promenljive razdvajaju one normalnom jednačine koje se mogu napisati u obliku $y'= f_1(x)f_2(y)$ tj. $dy/ f_2(y) = f_1(x)dx$.

---

[2]Nalaženje rešenja $y=y(x)$ koje zadovoljava uslov $y(x_o)=y_o$ naziva se *Košijev zadatak*. *Teoreme* koje govore o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja su *Pikarova* i *Peanova* i studenti će sa njima biti upoznati u odgovarajućim matematičkim kursevima.

[3]Teoreme koje govore o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja su Pikarova i Peanova a studenti će s njima biti upoznati u odgovarajućim kursevima iz matematike.

O drugim elementarnim jednačinama, kao što su *homogene*, *linearne*, *Rikatijeva*,..., studenti će biti upoznati u odgovarajućim kursevima iz matematike.

(b) Klasifikacija diferencijalnih jednačina

Kao što smo videli jednačina $\varphi(x, y, y') = 0$ je diferencijalna jednačina prvog reda i to u opštem, implicitnom obliku. Smatramo da je ona u normalnom tj. eksplicitnom obliku, kad je rešena po y', tj. $y' = f(x,y)$.

Jednačina $\varphi(x, y, y', y'') = 0$, odnosno $y'' = f(x, y, y')$ je diferencijalna jednačina drugog reda.

Uopšte, jednačina $\varphi(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ je diferencijalna jednačina n–og reda. Red diferencijalne jednačine određuje se redom izvoda najvišeg reda koji učestvuje u jednačini.

Rešenje diferencijalna jednačina n–og reda može biti određeno ili u eksplicitnom obliku pomoću fukcije y, koja identiči zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu, ili eksplicitno pomoću relacije $\Phi(x,y) = 0$, koja posle n diferenciranja postavlja vezu između argumenata $x, y, y', ..., y^{(n)}$ identičnu sa vezom koju određuje data diferencijalna jednačina n–og reda.

Funkcija $y=F(x, C_1, C_2,..., C_n)$ promenljive x i n konstanti $C_1, C_2,..., C_n$ je opšti integral date diferencijalne jednačine n–og reda u normalnom obliku $y^{(n)} = f(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)})$, ako zadovoljava dva uslova:

(I) sistem od (n jednačina): ima rešenja po $C_1, C_2,..., C_n$ za sve one vrednosti n+1 parametara $x_o, y_o, y_o', y_o'',..., y_o^{(n-1)}$, za koje postoji jedinstveno rešenje Košijevog problema za datu diferencijalnu jednačinu; tj. zadatka nalaženja onog rešenja $y=y(x)$ diferencijalne jednačine $y^{(n)} = f(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)})$, koje zadovoljava početne uslove:

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y_o',\ y''(x_o) = y_o'',..., y^{(n-1)}(x_o)= y_o^{(n-1)},$$

(II) funkcija $y=F(x, C_1, C_2,..., C_n)$ je rešenje polazne diferncijalne jednačine za sve tako određene vrednosti konstanata $C_1, C_2,..., C_n$.

Ako rešenje ne sadrži ni jednu proizvoljnu konstatu, ali se dobiva iz opšteg integrala za određene vrednosti tih konstati, integral je partikularni. Najzad, diferencijalne jednačine i višeg reda mogu imati, u specijalim slučajevima, i singularne integrale. To su rešenja koja ne sadrže proizvoljne konstante, ali ne mogu da se izvedu iz opštih integrala za posebne vrednosti konstati.

(c) Diferencijalne jednačine drugog reda

Videli smo da jednačina

$$(6)\quad \varphi(x, y, y', y'') = 0,\quad \text{odnosno}\quad (7)\quad y'' = f(x, y, y')$$

izražava diferencijalnu jednačinu drugog reda u implicitnom, odnosno u eksplicitnom, obliku. Diferencijalne jednačine drugog reda igraju dominantnu ulogu u teortiji diferencijalnih jednačina jer imaju veliku primenu u fizičkim teorijama pa samim tim i u tehničkoj praksi. Razlog za to jeste fenomenološka činjenica po kojoj uzimamo da se promena stanja neke pojave, određuje ne samo položajem nego i kretanjem (znači $y' \neq 0$), pa samim tim praćenje tih procesa zavisi i od drugog izvoda y''.

Pretpostavimo da postoji rešenje jednačine (6); ako ih ima više biramo jedno. Opšti integral te jednačine je funkcija y nezavisno promenljive x i dve proizvoljne konstante integracije C_1 i C_2 tj.

$$(8)\quad y = F(x, C_1, C_2)$$

Ta funkcija da bi bila opšti integral tj. opšte rešenje jednačine (7) treba da zadovolji identitet

$$\frac{d^2}{dx^2} F(x, C_1, C_2) \equiv f\left(x, F(x, C_1, C_2), \frac{d}{dx} F(x, C_1, C_2)\right)$$

ne samo za x, već i za svaku vrednost konstanti C_1 i C_2 iz neke oblasti.

Jednačina prvog reda, kao što smo pokazali, omogućavala je da se pomoću vrednosti y', odredi beskrajno mali pravoliniski element integralne krive, a na tome se i zasnivala geometriska predstava te jednačine. Slično, geometrisku interpretaciju diferencijalnih jednačina drugog reda, $y'' = f(x, y, y')$, možemo dati ako se setimo da se poluprečnik R krivine neke krive može napisati u obliku

$$(1/R)=(y''/(1+y'^2)^{3/2})$$

tako da diferencijalnu jednačinu drugog reda (6) možemo predstaviti u vidu relacije

$$\varphi(x, y, y', (1+y'^2)^{3/2}/R) = 0,$$

koja povezuje – koordinate tačke (x,y) integralne krive y=y(x), nagib tangente y' sa krivinom 1/R u toj tački. Priblino crtanje integralne krive koja odgovara postavljenoj diferencijalnoj jednačini drugog reda vezano je samim tim za izračunavanje poluprečnika krivine, R, te od sastavljanja kružnih elemenata koje oni čine.

Konačno rešenje, ili rešenje Košijevog zadatka, diferencijalne jednačine drugog reda (7) predstavlja partikularni integral

$$(9)\ y = F(x - x_o, y_o, y'_o)$$

i nije teško zaključiti da on predstavlja integralnu krivu koja prolazi kroz tačku $M_o(x_o, y_o)$, sa ugaonim koeficijentom, y'_o, tangente u toj tački.

Primer (3): Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' = -1$

Očigledno je da data jednačina razdvaja promenljive po y' i x pa se samim tim može odmah izvršiti prva integracija, naime

$$d(y') = -dx.$$

kvadratura date prvi (posredni) integral

$$(a)\qquad y' = -x + C_1$$

Međutim kako i jednačina (a) razdvaja promenljive lako je napraviti još jednu kvadraturu koja nam daje opšte rešenje postavljene diferencijalne jednačine drugog reda

$$(b)\qquad y = -(1/2)x^2 + C_1x + C_2$$

Opšte rešenje u ovom primeru je znači dvoparametarska (po konstantama C_1 i C_2) familija parabola.

Primer (4): Odrediti konačno rešenje diferencijalne jednačine $y'' = -1$ ako ono prolazi kroz tačku $M_1(1, 1/2)$ u kojoj je tangenta određena pravom $x + y = 0$.

Kako smo u zadatku (3) već odredili opšti integral date diferencijalne jednačine pređimo odmah na određivanje konstanti C_1 i C_2 tj. iz dvoparametarske familije parabola odredićemo jednu konačnu parabolu koja prolazi kroz zadatu tačku M_1 a u toj tački ima tangentu koja je određena pravom $x + y = 0$.

Naime, ako činjenicu da je nagib tangente

$$y'= -1,$$

a da integralna kriva mora proći kroz tačku M_1, uvrstimo u prvi integral (a) prethodnog zadatka sledi algebarska jednačina iz koje možemo odrediti integracionu konstantu C_1 tj.

$$y'_1 = -x_1 + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 0.$$

Zatim ako sve pomenute elemente (M_1, y'_1, $C_1 = 0$) uvrstimo u opštu jednačinu (b) dobivamo još jednu algebarsku jednačinu iz koje, ovoga puta, određujemo integracionu konstantu C_2 tj.

$$y_1 = -(1/2)x^2_1 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 1.$$

Samim tim konačna jednačina tj. integralna kriva koja zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu i date uslove za položaj i nagib tangente jeste parabola

$$y = -(1/2)x^2 + 1.$$

(d) Elementi opšte teorije linearnih diferencijalnih jedančina drugog i višeg reda

(d.1.) Definicija linearne jednačine

Pod diferencijalnom linearnom jednačinom podrazumeva se ona kod koje su nepoznata funkcija i njeni izvodi linearni (izvodi do n-og reda), a ma kako figurisala nezavisno promenljiva.

$$(1) \qquad y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x)$$

gde su a_i (i=1,...,n) ma kakve realne i neprekidne funkcije na nekom intervalu od promenljive x ili konstante. Pojedini sabirci izuzev $y^{(n)}$ mogu nedostajati.

Može se pokazati (teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja) da, pod izvesnim uslovima, koje treba da zadovoljavaju funkcije a_i, f(x) za proizvoljne početne vrednosti x_o, y_o, $y'_o,\ldots,y^{(n-1)}_o$, jednačina (1) ima određeno rešenje

$$y = G(x, x_o, y_o, y'_o,\ldots,y^{(n-1)}_o),$$

koje, zbog proizvoljnih početnih vrednosti u određenoj oblasti, može se napisati i na ovaj način $y = F(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Radi kratoće i preglednosti dogovorimo se da uvedemo sledeće oznake tj. sledeće linearne diferencijalne operatore (oznaka za njih biće L):

$$(1a) \qquad y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y \equiv L(y) \;\Rightarrow\; L(y) = f(x)$$

Napomena: – ako je $f(x) = 0 \Rightarrow$ jednačinu $L(y) = 0$, ćemo zvati homogena diferencijalna jednačina,

– ako je $f(x) \neq 0 \Rightarrow$ jednačinu $L(y) = f(x)$, ćemo zvati nehomogena diferencijalna jednačina.

(d.2.) Opšte teoreme homogene linearne diferencijalne jednačine:

Neka je data definicijalna jednačina

$$(2) \qquad L(y) = 0$$

Stav (1): Ako je y_1 (nekakva funkcija od nezavisno promenljive x) i ako je C_i= const tada je

$$L(Cy_1) = CL(y_1)$$

Dokaz ovog stava sledi iz osobine izvoda.

Stav (2): Ako su y_1 i y_2 (bilo koje funkcije od nezavisno promenljive x) tada je

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

Dokaz ovog stava sledi iz osobine izvoda.

Napomena: iz stava (1) i (2) sledi da je L linearni operator.

Posledica: iz stava (1) i (2) sledi da ako su y_1 i y_2 bilo koje funkcije od nezavisno promenljive x i ako su C_i konstante da je

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ...+ C_n y_n) = C_1L(y_1) + C_2 L(y_2) + ...+ C_n L(y_n)$$

Neka je y_1 partikularno rešenje diferencijalne jednačine (2) tj. $L(y_1) = 0$ onda je prema stavu (1) i $y_2=C_1y_1$ takođe partikularno rešenje jednačine (2) jer je $L(C_1y_1) = C_1L(y_1) = 0$ (identički za $\forall x$) $\Rightarrow$ $L(y_2) =0$.

Neka su y_1 i y_2 partikularna rešenja diferencijalne jednačine (2) onda je i $y_3= y_1 + y_2$ takođe partikularno rešenje jednačine (2) jer je

$$L(y_1+y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0 \quad \text{(identički za } \forall x) \quad \Rightarrow \quad L(y_3) =0.$$

Slično, neka su $y_1, y_2, ..., y_n$ partikularana rešenja diferencijalne jednačine (2) onda je prema posledici (3) i $C_1 y_1 + C_2 y_2 + ...+ C_n y_n$ partikularno rešenje diferencijalne jednačine (2) tj.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ...+ C_n y_n$$

je opšte rešenje pod ulovom da su $y_1, y_2, ..., y_n$ linerno nezavisni; a gde su C_1 , C_2 , ..., C_n proizvoljne konstante.

Sažeto rečeno – **Teorema**: Skup rešenja jednačine (2) obrazuje linearni vektorski prostor nad poljem realih (kompleksnih) brijeva. (Komentar: Baza tog vektorskog prostora je fundamentalni skup rešenja $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_n(x)$). Da bi pomenuto bilo razumljivije moramo uvesti i pojam linearne zavisnosti i linearne nezavisnosti skupa funkcija.

Napomena: Funkcije $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_n(x)$, su linearno zavisne na nekom intervalu I ako postoje konstante C_1 , C_2 , ..., C_n od kojih je bar jedna različita od nule tako da važi za svako x iz tog intervala

$$(4) \quad C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)+...+ C_n \varphi_n(x) = 0$$

Ako pak (4) važi, za svako x iz tog intervala, samo kad je $C_1 = C_2 = ...= C_n = 0$ tada ćemo kazati da su funkcije $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_n(x)$, linearno nezavisne na tom intervalu.

Primer (5): pokazati da su funkcije $y_1=1$, $y_2=\sin^2x$, $y_3=\cos 2x$ linearno zavisne.

Primer (6): pokazati da su funkcije $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$, $y_3=\cos 2x$ linearno nezavisne.

Navedimo sada, jednan veoma praktičan, kriterijum za ispitivanje linearne zavisnosti funkcija (tj. rešenja). Radi kratkoće pisanja uzećemo slučaj tri funkcije, y_1, y_2, y_3 i postavimo uslov da između njih postoji linearna veza

$$(a) \qquad C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = 0$$

sa koeficijentima C_1, C_2, C_3 koji nisu svi jednaki nuli. Pošto jednakost (a) treba da bude identitet u odnosu na svaku vrednost x, biće identiteti i rezultati diferenciranja te jednakosti x. Prema tome za određivanje koeficijenata C_1, C_2, C_3 možemo se poslužiti sistemom od tri jednačine

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = 0$$

$$C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C_3 y'_3 = 0$$

$$C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C_3 y''_3 = 0$$

sa determinantom

$$\begin{matrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ y'_1, & y'_2, & y'_3 \\ y''_1, & y''_2, & y''_3 \end{matrix} \quad = \; W$$

koja se zove determinanta Vronskog u datom slučaju, trećeg reda. Svaka vrsta sem prve, sastavljena je od izvoda članova predhodne vrste. Prva vrsta sadrži funkcije koje se ispituju. Pošto su stupci te determinante linearno zavisni, determinanta je jednaka nuli. Prema tome smo dobili stav: Ako su funkcije y_1, y_2, y_3 linearno zavisne, determinanta Vronskog jednaka je nuli. Za rešenja homogene linearne diferencijalne jednačIne važi i obrnuta teorema: Ako su funkcije f_1, f_2, f_3 linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine, determinanta Vronskog ne može biti jednaka nuli ni u jednoj tački date oblasti.

Pomoću Liuvilovih teorema[4] može se dokazati veza između partikularnih integrala i koeficijenata C_1, C_2,...,C_n tako da se onda može doći do najvažnije osobine leinarnih diferenciijalnih jednačina, ona glasi: ako n funkcija y_1, y_2, ..., y_n predstavljaju – linearno nezavisna partikularna rešenja – homogene linearne diferencijalne jednačine (2) n-og reda, opšti integral takve jednačine ima oblik: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ...+ C_n y_n$, gde su C_1, C_2,...,C_n proizvoljne konstante.

Primer (7): pokazati da ako je y_1 jedno partikularno rešenje, diferencijalne jednačine, na primer, drugog reda $y''+a_1y'+a_2y=0$, da je onda drugo partikularno rešenje, linearno nezavisno, dato relacijom $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2} dx$.

(d.3.) Nehomogene diferencijalne jednačine

Napišimo osnovnu diferencijalnu jednačinu (1) u obliku (2') $L(y) = f(x)$

gde su a_i i $f(x)$ proizvoljne realne neprekidne funkcije od x na nekom intervalu realnih brojeva.

Teorema: Neka je $y_h(x)$ opšte rešenje homogene jednačine (smatramo da je $f(x)=0$ pa sledi homogena jednačina $L(x)=0$) i neka je $y_{nd}(x)$ bilo koje netrivijalno rešenje nehomogene jednačine (2'). Tada je opšte rešenje jednačine (2') funkcija

$$y= y_h(x) + y_{nd}(x).$$

Ako je $\eta_1(x)\equiv y_{nd}(x)$ jedno partikularno rešenje jednačine (2') tj. ako je $L(\eta_1) \equiv f(x)$ onda smenom $y = \eta_1 + z$ gde je z nova nepoznata funkcija jednačina (2') postaje $L(\eta_1 + z) = f(x)$ tj. $L(\eta_1)+ L(z) = f(x)$; kako je $L(\eta_1)= f(x)$ identitet jer je η_1 partikularni integral jednačine (2') potrebno je još da bude i $L(z)=0$.

Ako su n funkcija y_1, y_2, ..., y_n partikularni integrali – homogene linearne diferencijalne jednačine $L(y)=0$ i ako je onda shodno tome njeno opšte rešenje funkcija $y_h(x)= C_1 y_1 + C_2 y_2 + ...+ C_n y_n$ i ako je $\eta\equiv y_{nd}(x)$ partikularni integral diferencijalne jednačine (2') tada je opšti integral tj. opšte rešenje nehomogene jednačine (2') dato relacijom tj. funkciijom

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ...+ C_n y_n + \eta \equiv y_h(x) + y_{nd}(x).$$

Slično, ako je desna strana nehomogene jednačine (2') data u vidu zbira funkcija tj. $f(x)=f_1(x)+ f_2(x)+...+ f_p(x)$ tada se traženje partikularnih rešenja nehomogenog dela raspada na traženje partikularnih rešenja za jednačine:

$L(y) = f_1(x)$, $L(y) = f_2(x)$, ..., $L(y) = f_p(x)$ a opšte rešenje jednačine (2') je onda dato u vidu zbira partikularnih rešenja homogenog i nehomogenog dela:

$$y =(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ...+ C_n y_n) + (\eta_1 + \eta_2+ ... + \eta_p).$$

[4]Jedna od njih, na primer, kaže da polazeći od: $L(y)=0$, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ...+ C_n y_n$, da je $W(y_1, y_2, ..., y_n) = C e^{-\int_{x_o}^{x} a_1 dx}$, odnosno $W(x) = W(x_o)\, e^{-\int_{x_o}^{x} a_1 dx}$ jer je $a_1 = -\frac{\frac{dw}{dx}}{w}$.

(e) Integracija linearnih homogenih diferencijalnih jedančina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Neka je data homogena diferencijalna jednačina drugog reda

$$(1) \qquad y''+a_1y'+a_2y=0,$$

gde su a_1, a_2 poznate konstante. Pokazaćemo da je ovu jednačinu uvek moguće prointegraliti, tj. doći do opšteg rešenja, samo pomoću elementarnih funkcija. Iz prethodno pokazanih teorema sledi da je opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima moguće dobiti tako što ćemo prvo odrediti dva partikularna integrala, posmatrane jendačine, koji su linearno nezavisna, i što ćemo onda zbir tih partikularnih rešenja pomnoži sa konstantama C_1 i C_2 ; tj. opšte rešenje je $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Potražimo sada partikularne integrale jednačine (1). U tu svrhu potražimo partikularna rešenje date jednačine, sledeći Ojlera, u obliku funkcija

$$(2) \qquad y=e^{rx},$$

gde je r neki konstantan broj (realan ili kompleksan), koji treba tako odrediti, pa da funkcije (2) identički zadovolje jednačinu (1). Zamenom funkcije (2) u jednačinu (1), sledi

$$(3) \qquad L(e^{rx})=P(r)e^{rx},$$

gde je $$(4) \qquad P(r) = r^2+a_1r+a_2$$

Funkcija $y=e^{rt}$ biće rešenje jednačine (1), tj. $L(e^{rx}) = 0$[5], ako r bude koren jednačine koja je nastala od polinoma (4)

$$(5) \qquad P(r) = r^2+a_1r+a_2 = 0.$$

Jednačina (5) obično se naziva karakterističnom jednačinom, a njeni koreni – karakterističnim brojevima jednačine (1).

Neposrednom zamenom se može utvrditi da svakom korenu r karakteristične jednačine odgovara partikularni integral $y=e^{rt}$. Ali budući da je

$$r_{1,2}= \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

očito je onda da će fundamentalno rešenje zavisiti od oblika korena karakteristične jednačine. Možemo razlikovati tri osnovna slučaja:

a) ako je $a_1^2 – 4a_2 > 0$ koreni karakterističog polinoma su rarličiti realni brojevi.

b) ako je $a_1^2 – 4a_2 < 0$ koreni karakterističog polinoma su kompleksni brojevi.

c) ako je $a_1^2 – 4a_2 = 0$ koreni karakterističog polinoma su jednaki realni brojevi.

U slučaju (a) opšte rešenje jednačine (1) je

$$(a) \qquad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

Primer (8): Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $2y'' + y' - y = 0$

Datu homogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima pogodnije je prikazati u obliku, $y'' +(1/2)\, y' - (1/2)\, y = 0$. Budući da je $y=e^{rx}$, $y'=r\, e^{rx}$, $y''=r^2e^{rx}$ sledi da je karakteristični polinom date jednačine

$$r^2 +(1/2)\, r - (1/2) = 0.$$

[5]Naime, kako je $y'= r\, e^{rt}$, $y''=r^2\, e^{rt}$, nije teško videti da se jednačina (1) svodi na relaciju $e^{rt}(r^2+a_1r+a_2)=0$. Ali kako je $e^{rt}\neq 0$ za $\forall x$ sledi jednačina (5).

Kako je $a_1^2 – 4a_2 > 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in \Re$, $r_1 \neq r_2$, tj. $r_1 = 1/2$, $r_2 = -1$, samim tim opšte rešenje date diferencijalne jednačine je $y = C_1 e^{(1/2)x} + C_2 e^{-x}$.

U slučaju (b) opšte rešenje jednačine (1) je

$$\text{(b)} \qquad y = C_1 e^{(a+ib)x} + C_2 e^{(a-ib)x}.$$

Zapis (b) možemo transformisati i u sledeće oblike. Naime kako je

$y = C_1 e^{ax} e^{+ibx} + C_2 e^{ax} e^{-ibx}$, i kako je $e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx$, sledi relacija

$$\text{(b')} \qquad y = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx),$$

gde su nove konstante A i B povezane sa predhodnim konstantama C_1 i C_2 na sledeći način $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$. Ako bi pak uveli nove konstante C i D tako da je $A = C\sin D$, $B = C\cos D$ opšte rešenje za slučaj (b)moguće je prikazati i u obliku

$$\text{(b'')} \qquad y = C\, e^{ax} \sin(bx + D).$$

Primer (9): Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Kako je karakteristični polinom $r^2 + 4r + 13 = 0 \Rightarrow a_1^2 – 4a_2 < 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in C$, $r_1 \neq r_2$, tj. $r_1 = -2 + 3i$ $r_2 = -2 - 3i$, samim tim opšte rešenje date diferencijalne jednačine je, na primer, $y = e^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$.

U slučaju (c) opšte rešenje jednačine (1) je

$$\text{(c)} \qquad y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}.$$

Naime kako je u tom slučaju $a_1^2 – 4a_2 = 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in \Re$, $r_1 = r_2$, sledi da su partikularna rešenja linearno zavisna. Zato se drugo partikularno rešenje traži u obliku $y_2 = uy_1$, gde je u funkcija od promenljive x čiji je drugi izvod jednak nuli. Iz fanilije funkcija $u = u(x)$ korisimo najednostavniju funkciju koja zadovoljava tražene uslove a to je funkcija $u = x$ ($u'' = 0$).

Primer (10): Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 2y' + y = 0$.

Kako je karakteristični polinom date jednačine $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow a_1^2 – 4a_2 = 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in \Re$, $r_1 = r_2 = -1$, pa su samim tim partikularna linearno nezavisna rešenja funkcije: $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$. Opšte rešenje date diferencijalne jednačine je funkcija $y = C_1 e^{-x} + C_2 xe^{-x}$.

(f) Integracija linearnih nehomogenih diferencijalnih jedančina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Neka je data nehomogena diferencijalne jednačine drugog reda

$$\text{(1)} \qquad y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),$$

gde su a_1, a_2 poznate konstante. Pokazaćemo da je ovu jednačinu uvek moguće prointegraliti, tj. doći do opšteg rešenja, samo pomoću integrala *elementarnih funkcija*. Iz predhodo pokazanih teorema sledi da je opšte rešenje nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima moguće dobiti tako što ćemo prvo odrediti – opšte rešenje (y_h) "odgovarajuće" homogene jednačine[6], i jednan partikularni integral ($y_{nd} = \eta$) koji odgovara datoj postavljenoj jednačini (tj. $L(y) = f(x)$) i što ćemo zatim – formirati zbir tih rešenja; tj. opšte rešenje nehomogena diferencijalne jednačine drugog reda sa konstatnim koeficijetima je moguće odrediti kao zbir funkcija

$$y = y_h + y_{nd} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \eta.$$

Za određivanje partikularnog rešenja η korisno je razlikovati sledećia tri najednostavnija karakretističa slučaja, funkcija f(x) je:

(a) polinom

[6]Jednačina koja se dobije iz zapisa (1) kada smatramo da je $f(x) = 0$

(b) sinusna ili kosinusna fukcija

(c) eksponencijalna funkcija

Slučaj (a): Desna strana jednačine (1) je polinom n-og reda. Opšte rešenje η je onda takođe polinom reda qn, gde je n – stepen polinoma, a q – red najnižeg izvoda L(y).

Primer (11): Odrediti: 1) partikularno rešenje nehomogenog dela, diferencijalne jednačine, $y'' + 2y = x^2+1$, a zatim odrediti 2) opšte rešenje date jednačine.

1) za datu nehomogenu jednačinu n=2 a q=0 pa samim tim funkciju $\eta=\eta(x)$ treba tražiti u obliku polinoma drugog reda tj. u obliku $\eta= a_2x^2+a_1x+a_o$, gde su a_2, a_1, a_o konstante koje treba odrediti iz uslova $L(\eta)=f(\eta)$. U tom cilju potražimo prvi i drugi izvod funkcije η, sledi $\eta' = 2a_2x+a_1$, $\eta'' =2a_2$, a zatim formirajmo relaciju $L(\eta)=f(\eta) \Rightarrow 2a_2+ 2(a_2x^2+a_1x+a_o) = x^2+1$. polinomi su identički jednaki kad su im jednaki koeficijenti istih potencija, tj. u našem primeru $(2a_2)x^2+(2a_1)x+(2a_2 + 2a_o) = (1)x^2+(0)x +1$. Tako iz tri nastale algebarske jednačine određujemo tražene koeficijente polinoma: $2a_2=1$, $2a_1=0$, $2a_2 + 2a_o=1 \Rightarrow a_2=1/2$, $a_1=0$, $a_o=0$. Traženo partikularno rešenje, nehomogenog dela, je funkcija oblika $\eta= y_{nd} = (1/2)x^2$.

2) homogena jednačina koja sledi iz date nehomogene jednačini je $y'' + 2y = 0$, pa je karakteristični polinom $r^2 + 2 = 0 \Rightarrow r_1=\sqrt{2}i$, $r_2= -\sqrt{2}i$. Tako da je opšte rešenje homogene jednačine $y'' + 2y=0$, $y_h = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x)$. Opšte rešenje pak tražene nehomogene jednačine je funkcija $y = y_h + y_{nd}$, tj.

$$y = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x) + (1/2)x^2.$$

Primer (12): Odrediti: 1) partikularno rešenje nehomogenog dela, diferencijalne jednačine, $y'' - y' = 1+ 2x - 3x^2$, a zatim odrediti 2) opšte rešenje date jednačine.

1) za datu nehomogenu jednačinu n=2 a q=1 pa samim tim funkciju $\eta=\eta(x)$ treba tražiti u obliku polinoma trećeg reda tj. u obliku $\eta= a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_o$, gde su a_3, a_2, a_1, a_o konstante koje treba odrediti iz uslova $L(\eta)=f(\eta)$. U tom cilju potražimo prvi i drugi izvod funkcije η, sledi $\eta' = 3a_3x^2+2a_2x+a_1$, $\eta''=6a_3x+2a_2$, a zatim formirajmo relaciju $L(\eta)=f(\eta) \Rightarrow$

$6a_3x+2a_2 - (3a_3x^2+2a_2x+a_1) = 1+ 2x - 3x^2$. Polinomi su identički jednaki kad su im jednaki koeficijenti istih potencija, tj. u našem primeru

$(- 3a_3)x^2+(6a_3x-2a_2)x + (2a_2 - a_1) = (- 3)x^2+(2)x +1$. Tako iz tri nastale algebarske jednačine određujemo tražene koeficijente polinoma: $a_3=1$, $a_2=2$, $a_1=3$. Traženo partikularno rešenje, nehomogenog dela, je funkcija oblika

$$\eta = y_{nd} = x^3+2x^2+3x$$

2) homogena jednačina koja sledi iz date nehomogene jednačini je $y'' - y' = 0$, pa je karakteristični polinom $r^2 -r = 0 \Rightarrow r_1=0$, $r_2=1$. Tako da je opšte rešenje homogene jednačine $y'' - y' = 0$, $y_h = C_1e^o + C_2 e^x$. Opšte rešenje pak tražene nehomogene jednačine je funkcija

$$y = y_h + y_{nd} = C_1+ C_2 e^x + x^3+2x^2+3x.$$

Slučaj (b): Desna strana diferencijalne nehomogene jednačine (1) je trigonometriska funkcija $f(x)=k\cos(bx)$ ili funkcija $f(x)= k\sin(bx)$, gde su k i b poznate konstante. Partikularno rešenje η je onda takođe trigonometriska funkcija do koje je najlakše doći tako što ćemo je pretpostaviti u obliku funkcije $\eta(x)=A\cos(bx) + B\sin(bx)$, gde su A i B konstante koje ćemo odrediti iz uslova da je $L(\eta)=f(\eta)$.

Primer (13): Odrediti: 1) partikularno rešenje nehomogenog dela, diferencijalne jednačine, $y'' - 3y' - 4y = \sin x$, a zatim odrediti 2) opšte rešenje date jednačine.

1) Potražimo partikularno rešenje u obliku $\eta(x)=A\cos(x) + B\sin(x)$ iz uslova da je $L(\eta) = f(\eta)$. Potrebne izvodne funkcije su $\eta' = -A\sin(x) + B\cos(x)$,

$\eta'' = -A\cos(x) - B\sin(x)$ pa je traženi identitet oblika

$$(-5A-3A)\cos(x) + (3A-5B)\sin(x) = (0)\cos x + (1)\sin(x).$$

Pošto predhodna relacija mora biti identički zadovoljena za svako x sledi da će to biti samo ako je $(-5A-3A)=0$, $(3A-5B)=1$; tj. ako koeficijenti A i B zadovoljavaju ove dve algebarske jednačine. Lako je pokazati da je $A=3/34$, $B=-5/34$ pa je traženo partikularno rešenje nehomogenog dela date diferencijalne jednačine funkcija $\eta(x) = y_{nd} = 3/34\cos(x) - 5/34\sin(x)$.

2) Kako je karakteristični polinom date diferencijalne jednačine $r^2 - 3r - 4 = 0 \Rightarrow r_1=4,\ r_2=-1$ pa je rešenje homogenog dela date nehomogene diferencijalne jednačine $y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$ a opšte rešenje date nehomogene diferencijalne jednačine je $y=y_h+y_{nd} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} + 3/34\cos(x) - 5/34\sin(x)$.

Napomena: Ako nehomogena diferencijalna jednačina (1) ima, jedan od navedenih, oblika

$$y'' + b^2y = k\sin(bx)$$

$$y'' + b^2y = k\cos(bx)$$

gore naveden oblik partikularne funkcije nas ne vodi ka rešenju u tom slučaju šešenje ćemo potražiti u obliku

$$\eta(x) = y_{nd} = Ax\mathrm{sim}(bx) \text{ ili } \eta(x) = y_{nd} = Ax\cos(bx).$$

Primer (14): Odrediti: 1) partikularno rešenje nehomogenog dela, diferencijalne jednačine, $y'' + 9y = 4\sin(3x)$, a zatim odrediti 2) opšte rešenje date jednačine.

1) Potražimo rešenje za nehomogeni deo date diferencijalne jednačine u obliku
$\eta(x) = y_{nd} = Ax\cos(3x)$, iz uslova da je $L(\eta) = f(\eta)$. Potrebne izvodne funkcije su $\eta' = A\cos(3x) - 3Ax\sin(3x)$, $\eta'' = -3A\sin(3x) - 3A\sin(3x) - 9Ax\cos(3x)$ pa je traženi identitet oblika

$$-3A\sin(3x) - 3A\sin(3x) - 9Ax\cos(3x) + 9Ax\cos(3x) = 4\sin(3x)$$

$$\text{tj. } -6A\sin(3x) = 4\sin(3x).$$

Pošto ova relacija mora važiti za svako $x \Rightarrow A = -(2/3)$, pa je

$$\eta(x) = y_{nd} = -(2/3)x\cos(3x).$$

2) Kako je karakteristični polinom date diferencijalne jednačine $r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r_1=3i,\ r_2=-3i$ pa je rešenje homogenog dela date nehomogene diferencijalne jednačine $y_h = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$ a opšte rešenje date nehomogene diferencijalne jednačine je $y=y_h+y_{nd} = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) - (2/3)x\cos(3x)$.

Slučaj (c): Desna strana jednačine (1) je eksponencijalna funkcija $f(x)=ke^{bx}$, gde su k i b poznate konstante. Partikularno rešenje η je onda takođe eksponencijalna funkcija, stim što možemo razlikovati naredna tri sučaja:

– (A) ako je $b \neq r_1 \neq r_2 \Rightarrow \eta(x) = (ke^{bx})/P(b)$,

– (B) ako je $b = r_1 \neq r_2 \Rightarrow \eta(x) = (kxe^{bx})/P'(b)$,

– (C) ako je $b = r_1 = r_2 \Rightarrow \eta(x) = (kx^2e^{bx})/P''(b)$,

gde je polinom P(b), prvi izvod polinoma P'(b),..., nastao od karekterističnog polinoma kada stavimo da je $r = b$.

Primer (15): Odrediti: 1) partikularno rešenje nehomogenog dela, diferencijalne jednačine, $y'' - 6y' + 8y = e^x$, a zatim odrediti 2) opšte rešenje date jednačine.

1) za datu nehomogenu diferencijalnu jednačinu $b=1$, a iz karakterističnog polinoma $r^2 - 6r + 8 = 0$ nalazimo da je $r_1 = 4$, $r_2 = 2$; sledi da je $b \neq r_1 \neq r_2$, tj. iz stava (A) nalazimo da je partikularno rešenje

funkcija η $(x)=y_{nd}$ = $(e^x)/P(b)$, gde je $P(b)= b^2 – 6b + 8 = 0$, pa je $P(b=1)=3$, $\Rightarrow \eta(x) = (e^x)/3$.

2) Rešenje homogenog dela date diferencijalne jednačine je $y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$, pa je opšte rešenje date nehomogene jednačine $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} + (e^x)/3$.

Primer (16): Pokazati da je partikularno rešenje nehomogenog dela, diferencijalne jednačine, $y'' – 6y' + 8y = e^{2x}$ funkcija $\eta(x) = (xe^{2x})/2$.

LITERATURA

Arnold B. I, *Obiknovennie differencijalnije uravnenija*, Moskva, 1975.

Matveev N. M, *Differencijalnije uravnenija*, Minsk, 1968.

Matveev N. M, *Sbornik zadač i upražnenija po obiknovennim differencijalnim uravnenijam*, Minsk, 1970.

Pejović T, *Diferencijalne jednačine*, Beograd 1951.

Pontrjagin L. S, *Obiknovennie differencijalnie uravnenija*, Moskva, 1970.