Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za matematiku

Rešenja zadataka sa pismenog ispita iz Matematike 3
Septembar 2014.

1. (Grupa 1) Data jednačina je nehomogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda. Odgovarajuća homogena jednačina glasi

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Karakteristična jednačina

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

ima dvostruko rešenje $r = 1$, pa fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine čine funkcije $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, odakle dobijamo opšte rešenje homogene jednačine

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Partikularno rešenje polazne nehomogene jednačine tražimo metodom neodredjenih koeficijenata. Prvo tražimo partikularno rešenje jednačine

$$y'' - 2y' + y = e^{-x}. \tag{1}$$

Kako se desna strana jednačine (1) može napisati u obliku

$$e^{-x} = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$$

za $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $P_m(x) = 1$, $Q_l(x) = 0$, i kako $\alpha + \beta i = -1$ nije koren karakteristične jednačine, to partikularno rešenje jednačine (1) tražimo u obliku

$$y_{p_1} = e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x),$$

gde je $k = \max\{m, l\} = 0$. Na osnovu prethodnog sledi

$$y_{p_1} = Ae^{-x},$$

gde je A nepoznata vrednost koju treba odrediti. Lako dobijamo

$$y'_{p_1} = -Ae^{-x}, \qquad y''_{p_1} = Ae^{-x},$$

a nakon uvrštavanja y_{p_1}, y'_{p_1} i y''_{p_1} u (1) imamo $A = \dfrac{1}{4}$, pa je

$$y_{p_1} = \frac{1}{4}e^{-x}.$$

Potpuno analogno tražimo partikularno rešenje jednačine

$$y'' - 2y' + y = \cos x$$

i dobijamo

$$y_{p_2} = -\frac{1}{2}\sin x.$$

Opšte rešenje polazne jednačine je

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2},$$

odnosno

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

(Grupa 2) Analognim postupkom kao za grupu 1 dobijamo

$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x.$$

2. (Grupa 1) Vektorske linije datog vektorskog polja odredjujemo iz odgovarajućeg sistema diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku:

$$\frac{dx}{x + y^2z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}.$$

Iz drugog i trećeg razlomka dobijamo jedan od prvih integrala

$$C_1 = \frac{y^2}{z}.$$

Odavde je $z = \dfrac{y^2}{C_1}$, pa kad to uvrstimo u

$$\frac{dx}{x + y^2 z} = \frac{dy}{y},$$

sledi

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \frac{y^3}{C_1},$$

odnosno

$$x' - \frac{1}{y}x = \frac{y^3}{C_1},$$

što predstavlja linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda nepoznate funkcije $x = x(y)$. Njeno opšte rešenje (nakon što zamenimo $C_1 = \dfrac{y^2}{z}$) je

$$x = y\left(C_2 + \frac{yz}{3}\right),$$

odakle dobijamo drugi prvi integral polaznog sistema

$$C_2 = \frac{x}{y} - \frac{yz}{3}.$$

Prvi integrali C_1 i C_2 su nezavisni i oni odredjuju opšte rešenje datog sistema. Time smo odredili vektorske linije datog vektorskog polja.

(Grupa 2) Analognim postupkom kao za grupu 1, s tim što y i z zamene uloge, dobijamo

$$C_1 = \frac{z^2}{y}, \qquad C_2 = \frac{x}{z} - \frac{yz}{3}.$$

3. (Grupa 1) Rad datog vektorskog polja računamo preko krivolinijskog integrala druge vrste:

$$L_C(\vec{A}) = \int -y\,dx + x\,dy.$$

Parametrizacija date krive (asteroide) glasi

$$x = 3\sqrt{3}\cos^3 t, \qquad y = 3\sqrt{3}\sin^3 t,$$

odakle je

$$dx = -9\sqrt{3}\sin t\cos^2 t dt, \qquad dy = 9\sqrt{3}\sin^2 t\cos t dt.$$

Ako u parametrizaciju uvrstimo tačku $A(3\sqrt{3}, 0)$ dobijamo $t = 0$, a ako uvrstimo tačku $B(0, 3\sqrt{3})$ dobijamo $t = \frac{\pi}{2}$, pa je

$$\begin{aligned}
L_C(\vec{A}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(-3\sqrt{3}\sin^3 t \cdot (-9\sqrt{3}\sin t\cos^2 t) + 3\sqrt{3}\cos^3 t \cdot 9\sqrt{3}\sin^2 t\cos t\Big)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (81\sin^4 t\cos^2 t + 81\sin^2 t\cos^4 t)dt = 81\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)dt \\
&= 81\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(2\sin t\cos t)^2 dt = \frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t)dt = \frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}dt \\
&= \frac{81}{8}\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81\pi}{16}.
\end{aligned}$$

(Grupa 2) Analognim postupkom kao za grupu 1 dobijamo

$$L_C(\vec{A}) = -\frac{3\pi}{2}.$$

4. (Grupa 1) Traženu zapreminu računamo preko trostrukog integrala

$$V = \iiint\limits_T dxdydz,$$

gde je T telo ograničeno "odozgo"elipsoidom $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, a "odozdo" ravni $x = \sqrt{2}$, pa je

$$V = \iint_G dydz\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}}} dx = \iint_G \left(2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}} - \sqrt{2}\right)dydz,$$

gde je G oblast koja predstavlja unutrašnjost (uključujući i granicu) projekcije preseka datog elipsoida i date ravni na O_{yz}-ravan, pa važi

$$G:\ \frac{\sqrt{2}^2}{8}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}\le 1,$$

odnosno

$$G:\ \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}\le \frac{3}{4}.$$

Prelaskom na uopštene polarne koordinate

$$y=3\rho\cos\varphi, \qquad z=2\rho\sin\varphi,$$

oblast G transformišemo u oblast

$$D:\ \rho^2\le\frac{3}{4},$$

odakle dobijamo granice $\rho\ |_0^{\sqrt{3}/2}$, $\varphi\ |_0^{2\pi}$, a jakobijan je $J=6\rho$.
Dalje važi

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D \left(2\sqrt{2}\sqrt{1-\rho^2}-\sqrt{2}\right)\cdot 6\rho\ d\rho d\varphi\\
&= 6\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(2\sqrt{1-\rho^2}-1\right)\rho\ d\rho\\
&= 6\sqrt{2}\ [\varphi]|_0^{2\pi}\left(2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rho\sqrt{1-\rho^2}\ d\rho-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\rho\ d\rho\right)=\cdots=\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

(Grupa 2) Analognim postupkom kao za grupu 1, s tim što x i y zamene uloge, dobijamo

$$V=5\pi\sqrt{3}.$$