Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

Ispitivanje funkcija, Tejlorov i Maklorenov polinom - vežbanje

Zadatak 1. Detaljno ispitati funkciju

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2}$$

i skicirati grafik.

Rešenje: Domen date funkcije je skup svih realnih brojeva za koje važi $x^2 - 2 \geq 0$, odnosno $|x| \geq \sqrt{2}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \bigcup [\sqrt{2}, +\infty)$. Eventulne nule tražimo iz uslova $\sqrt{x^2-2} + x = 0$, $\sqrt{x^2-2} = -x$, $x^2 = x^2 - 2$, što očito nema rešenja. Vrednost $\sqrt{x^2-2} + x$ je pozitivna svakako kad god je $x \geq 0$ (jer ono što je pod korenom ne može biti negativno), dok u slučaju $x \leq 0$ imamo

$$\sqrt{x^2-2} + x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2} \geq -x \Leftrightarrow x^2 - 2 \geq x^2,$$

što očito nije tačno. Dakle, $f(x) > 0$ za $x \in [\sqrt{2}, +\infty)$ i $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$.

U "$+\infty$"važi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-2} + \lim_{x \to +\infty} x = +\infty + \infty = +\infty,$$

tako da u ovom slučaju nema horizonatalne asimptote (zato treba da ispitamo i postojanje kose asimptote). Dalje,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim_{x \to +\infty} = 1 + \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}} = 1 + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}^2 - x^2}{\sqrt{x^2-2} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2-2} + x} = 0,$$

što znači da data funkcija u "$+\infty$"ima kosu asimptotu $y = 2x$.

U "$-\infty$"važi

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-2} + x\right) = \lim_{t \to +\infty} \left(\sqrt{t^2-2} - t\right) = 0$$

(uvedena je smena $t = -x$) na osnovu malopre dobijenog rezultata, što znači da u "$-\infty$"ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ (x-*osa*). Zato egzistenciju kose asimptote nema potrebe ispitivati.

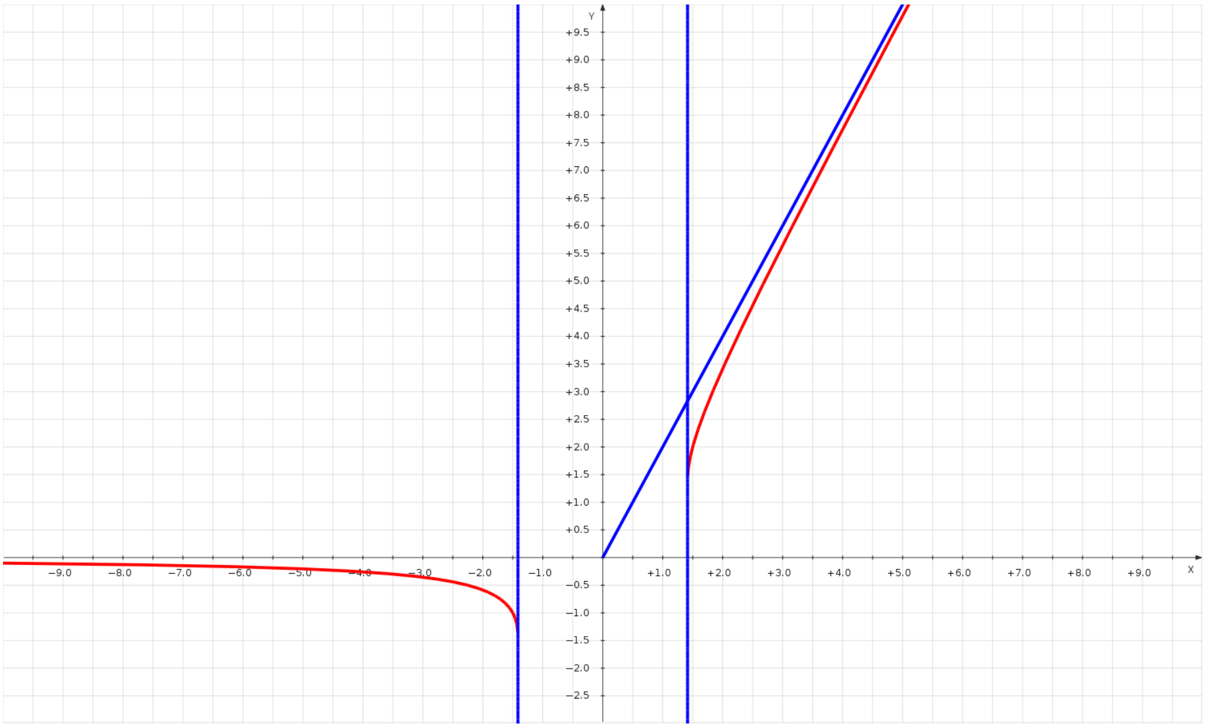
Vertikalnih asimptota je jasno da ne može biti.

Prvi izvod, $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$, je pozitivan ako i samo ako važi $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}} > -1$, što očito uvek važi za $x > 0$, dok za $x < 0$ ovo, odnosno $\dfrac{x^2}{x^2-2} < 1$ (prilikom kvadriranja nejednačine u kojoj su obe strane negativne - menja se znak!), nikad ne važi u domenu $x^2-2 \geq 0$ date funkcije. Dakle, $f'(x) > 0$ i $f(x)$ raste za $x \in [\sqrt{2}, +\infty)$, a $f'(x) < 0$ i $f(x)$ opada za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$ ($f'(x)$ nikad nije jednako 0).

Drugi izvod,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[x\left(x^2-2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]' = x\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x + \left(x^2-2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x^2}{(x^2-2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2-2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-x^2+x^2-2}{(x^2-2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2}{(x^2-2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

je očito uvek strogo manji od 0, odnosno funkcija $f(x)$ je konkavna na celom svom domenu.



Zadatak 2. Detaljno ispitati funkciju

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3+2}{x}}$$

i skicirati grafik.

Rešenje: Vrednost date funkcije je uvek veća od ili jednaka 0 (koren je uvek nenegativan). Kako vrednost koja je pod korenom mora uvek biti nenegativna, mora da važi $\frac{x^3+2}{x} \geq 0$, što je ekvivalentno sa $x^3+2 \geq 0, x > 0$ ili $x^3+2 \leq 0, x < 0$, odakle dobijamo

$$D_f = \left(-\infty, -\sqrt[3]{2}\right] \cup (0, +\infty)$$

Jedini kandidat za vertikalnu asimptotu je tačka $x_0 = 0$ (i to samo s desne strane s obzirom na domen). Kako je

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \sqrt{\frac{x^3+2}{x}} \sim \frac{2}{0+} \sim +\infty,$$

zaključujemo da u nuli data funkcija ima vertikalnu asimptotu (zapravo, $y-$osa). Kako je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, horizontalnih asimptota nema, a za koeficijente eventualnlih kosih asimptota mora da važi

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|\, x \,| \cdot \sqrt{1+\frac{2}{x^3}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} = \pm 1$$

Da bi u "$+\infty$"postojala kosa asimptota, limes

$$l_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(\operatorname{sgn} x \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} - 1 \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

mora biti konačan. Izraz je oblika $\frac{\infty}{\infty}$ i može se primeniti pravilo Lopitala:

$$l_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\operatorname{sgn} x \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} - 1 \right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{2}{x^3}}} \cdot \frac{-6}{x^4}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sgn} x \frac{3}{x^2 \sqrt{1+\frac{2}{x^3}}} = 0$$

Dakle, u ovom slučaju dobijamo kosu asimptotu $y = x$. Da bi u "$-\infty$"postojala kosa asimptota, limes

$$l_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \left(\operatorname{sgn} x \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} + 1 \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} + 1}{\frac{1}{x}}$$

mora biti konačan. Izraz je opet oblika $\frac{\infty}{\infty}$ i može se primeniti pravilo Lopitala:

$$l_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\operatorname{sgn} x \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} + 1 \right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{2}{x^3}}} \cdot \frac{-6}{x^4}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sgn} x \frac{3}{x^2 \sqrt{1+\frac{2}{x^3}}} = 0$$

Dakle, u ovom slučaju dobijamo kosu asimptotu $y = -x$. Prvi izvod je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3+2}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^3+2}{x} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^3+2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(x^3+2)' \cdot x - (x^3+2) \cdot (x)'}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^3+2}} \cdot \frac{3x^3 - x^3 - 2}{x^2} = \frac{x^3-1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{x^3+2}} \end{aligned}$$

odakle vidimo da je znak prvog izvoda date funkcije isti kao znak izraza x^3-1, odnosno $f'(x) < 0$

za $x < 1$, odnosno $f'(x) = 0$ za $x = 1$, odnosno $f''(x) > 0$ za $x > 1$, odakle zaključujemo da data funkcija u tački $x = 1$ ima lokalni minimum.

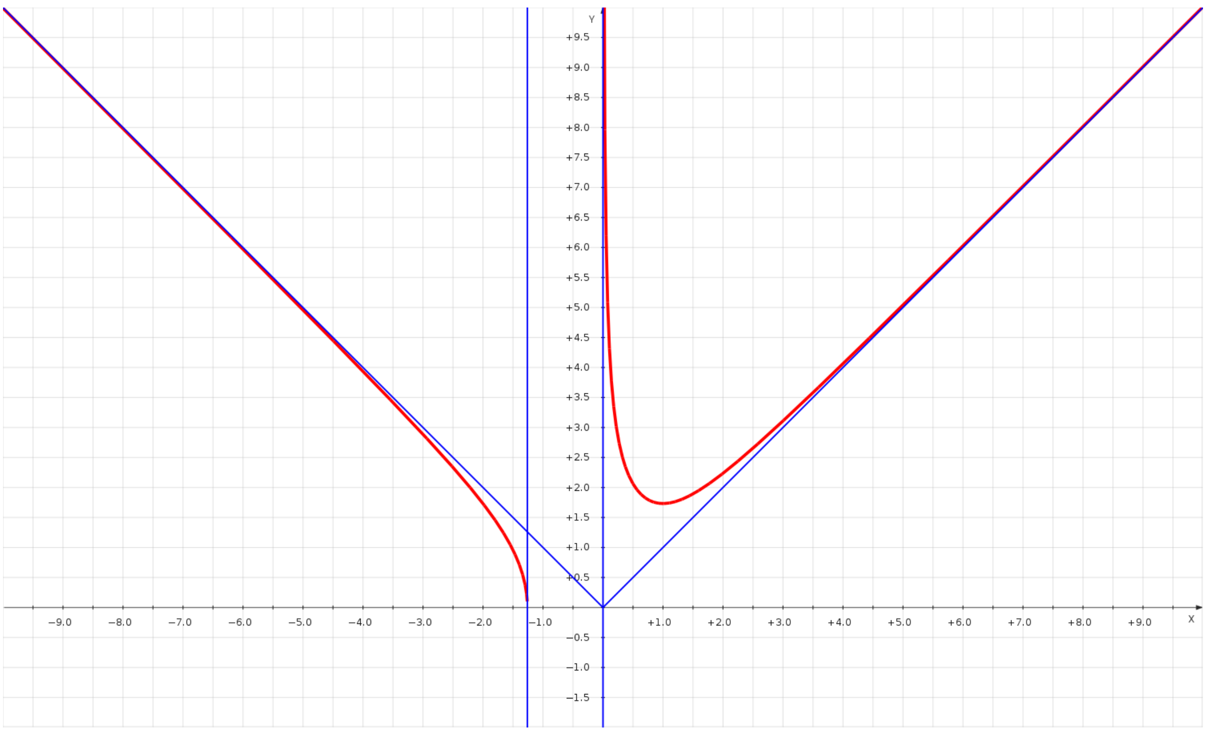
Da bismo lakše izračunali 2. izvod, najbolje je da 1. izvod zapišemo u obliku

$$f'(x) = \left(x^3 - 1\right)\sqrt{\frac{1}{x^3\left(x^3+2\right)}} = \frac{x^3-1}{\sqrt{x^3\left(x^3+2\right)}},$$

odakle je

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{3x^2\sqrt{x^3\left(x^3+2\right)} - \left(x^3-1\right)\dfrac{\left(x^3(x^3+2)\right)'}{2\sqrt{x^3(x^3+2)}}}{x^3\left(x^3+2\right)} = \frac{\dfrac{3x^2\cdot x^3\left(x^3+2\right) - \left(x^3-1\right)\left(x^3(x^3+2)\right)'}{2\sqrt{x^3(x^3+2)}}}{x^3\left(x^3+2\right)} \\
&= \frac{6x^5\left(x^3+2\right) - \left(x^3-1\right)\left(3x^2(x^3+2) + x^3\cdot 3x^2\right)}{2x^3(x^3+2)\sqrt{x^3(x^3+2)}} = \frac{6x^5\left(x^3+2\right) - \left(x^3-1\right)\left(6x^5+6x^2\right)}{2x^3(x^3+2)\sqrt{x^3(x^3+2)}} \\
&= \frac{6x^2\left(x^3\left(x^3+2\right) - \left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)\right)}{2x^3(x^3+2)\sqrt{x^3(x^3+2)}} = \frac{3\left(2x^3+1\right)}{x(x^3+2)\sqrt{x(x^3+2)}}
\end{aligned}$$

Kako su, s obzirom na domen funkcije f, x i $x^3 + 2$ istog znaka, to je i njihov prozivod u imeniocu pozitivan, tako da je znak izraza $f''(x)$ isti kao znak izraza $2x^3 + 1$. Za $x < -\sqrt[3]{2}$ je svakako $2x^3 + 1 < 2\cdot(-2) + 1 = -3 < 0$, dok je za $x > 0$ svakako $2x^3 + 1 > 0$, tako da je funkcija f konkavna u negativnom i konveksna u pozitivnomn delu svog domena. Grafik je prikazan na slici.



Zadatak 3. Funkciju

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$$

razviti u Tejlorov polinom 3. stepena u okolini tačke $a = 1$.

Rešenje: **Prvi način:** Tejlorov polinom stepena 3 za $a = 1$ oblika je:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-1) + \frac{f''(a)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-1)^3 \tag{1}$$

Jednostavno se računaju potrebne vrednosti:

$$f(1) = \ln\left(1^2 - 2\cdot 1 + 2\right) = \ln 1 = 0 \tag{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}\cdot(2x-2) \Rightarrow f'(1) = 0 \tag{3}$$

jer je podizraz $(2x-2)$ za $x = 1$ jednak 0.

$$f''(x) = \frac{-1}{(x^2-2x+2)^2}\cdot(2x-2)^2 + \frac{1}{x^2-2x+2}\cdot 2 \Rightarrow f''(1) = 2 \tag{4}$$

Drugi izvod je računat kao izvod proizvoda. Prvi sabirak za $x = 1$ je odmah jednak 0, dok je drugi sabirak jednak 2. Slično se računa i treći izvod:

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x^2-2x+2)^3}\cdot(2x-2)^3 + \frac{-1}{(x^2-2x+2)^2}\cdot 2(2x-2) + \frac{-2}{(x^2-2x+2)^2}\cdot(2x-2)$$

Iz pretodnog sledi da je:

$$f^{(3)}(1) = 0 \tag{5}$$

Konačno kada se (2), (3), (4), (5) unese u (1) dobija se:

$$f(x) \approx \frac{2}{2!}(x-1)^2 \Rightarrow f(x) \approx (x-1)^2$$

Drugi način: Ako iskoristimo da za svaki prirodan broj n Maklorenov polinom n-tog stepena funkcije $\ln(1+t)$ glasi

$$\ln(1+t) = t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n}$$

(ovo je praktično primenljvo kad je vrednost t blizu 0) i $x^2 - 2x + 2$ zapišemo kao $(x-1)^2 + 1$, pri čemu $t = (x-1)^2$ tačno jeste blizu 0 kad je x blizu 1, dobijamo da je već odgovarajući Maklorenov polinom 2-og stepena po t oblika

$$\ln\left(1 + (x-1)^2\right) = (x-1)^2 + \frac{\left((x-1)^2\right)^2}{2} = (x-1)^2 + \frac{(x-1)^4}{2},$$

tj. da sadrži $(x-1)^4$. Kako nas interesuje Maklorenov polinom po x koji sadrži stepene ne preko $(x-1)^3$, treba nam samo deo $(x-1)^2$.

prof. dr Slobodan Radojević

docent dr Aleksandar Pejčev