

Деформацијски рад (потенцијална енергија деформације)

Ако се произвољна деформабилна конструкција налази под дејством спољашњих сила, нападне тачке сила се померају, тако да силе врше рад. Рад спољашњих сила изазива промену енергије (потенцијалне, кинетичке, топлотне...) у телу, односно конструкцији.

На основу закона о одржању енергије, рад спољашњих сила једнак је промени енергије.

Ако су спољашње силе статичке (постепено расту од нуле до неке вредности) могу се занемарити убрзања њихових нападних тачака (инерцијалне силе) као и промена кинетичке енергије. Ако се занемари и расипање енергије (топлотни губици) може се занемарити и промена топлотне енергије. Тада, за конзервативни систем важи да је:

РАД СПОЉАШЊИХ СИЛА (R) једнак ПРОМЕНИ ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЕНЕРГИЈЕ (A_d)

$$R = A_d. \quad (1)$$

Потенцијална енергија еластичне деформације у техници се зове и **ДЕФОРМАЦИЈСКИ РАД** и означава са A_d .

На тај начин можемо да дефинишемо **Клапејронову теорему** која је математички приказана изразом (1):

Рад извршен од спољашњих сила на еластичном телу током његовог деформисања једнак је деформацијској енергији накупљеној у том телу.

**Деформацијски рад A_d и допунски деформацијски рад A_d^*
изражен преко спољашњих сила**

Зависност између силе и померања је у општем случају нелинеарна. Нелинеарност може да буде условљена особинама материјала (физичка), или обликом конструкције (геометријска, конструктивна).

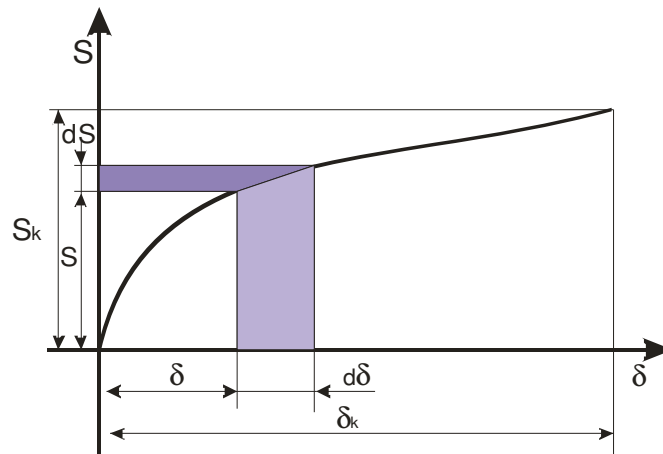
Зависност између спољашњих сила и одговарајућих померања може се представити дијаграмом са слике 1.

Претпоставимо да се конструкција и материјал понашају еластично и занемаримо губитке енергије. Ако зависност силе (S) и померања (δ) изразимо као $S = S(\delta)$, елементарни деформацијски рад можемо да представимо следећим изразом

$$dA_d = dR = S(\delta)d\delta, \quad (2a)$$

а укупан деформацијски рад интегралом

$$A_d = R = \int_0^{\delta_K} S(\delta) d\delta. \quad (26)$$



Слика 1. Зависност између спољашњих сила и одговарајућих померања

Укупан деформацијски рад једнак је површини испод криве $S = S(\delta)$.

Ако се зависност силе и померања изрази као $\delta = \delta(S)$ може се дефинисати и следећи интеграл

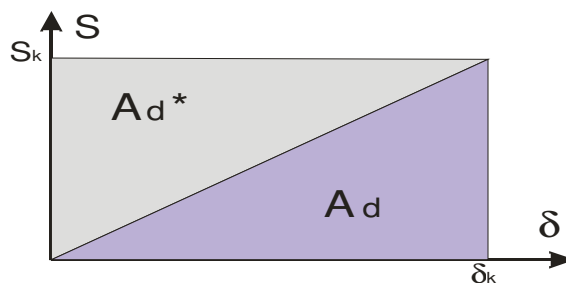
$$dA_d^* = dR^* = \delta(S) dS, \quad (3a)$$

$$A_d^* = R^* = \int_0^{S_K} \delta(S) dS. \quad (3b)$$

Величина A_d^* назива се **ДОПУНСКИ РАД** и за разлику од деформацијског рада нема очигледан физички смисао. Уочимо да је

$$A_d + A_d^* = R + R^* = S_K \delta_K. \quad (4)$$

Ако је конструкција направљена од линеарно еластичног материјала и ако су оптерећења која на њу делују статичка, зависност силе и померања је линеарна и приказује се следећим дијаграмом (Слика 2).



Слика 2. Линеарна зависност силе и померања

У том случају важи Клапејронов став:

Рад спољашњих сила при статичком оптерећењу конструкције од линеарно еластичног материјала, једнак је половини производа вредности силе и померања

њене нападне тачке, односно, половини оне вредности коју би имао када би сила од почетка деловала пуним интензитетом

$$A_d = A_d^* = \frac{1}{2} S \delta. \quad (5)$$

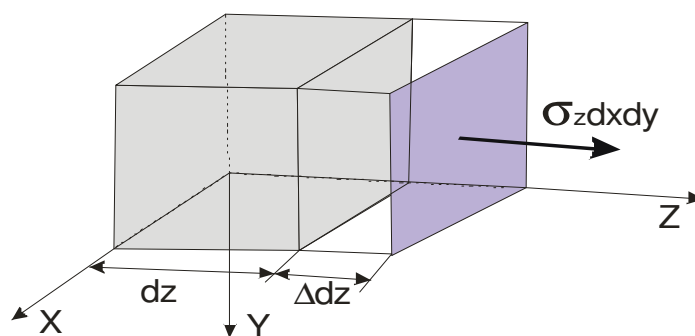
Уведимо и појам **специфичног деформацијског рада** A'_d , који се дефинише као деформацијски рад по јединици запремине посматраног тела, односно

$$A'_d = \frac{dA_d}{dV}. \quad (6)$$

Деформацијски рад изражен преко унутрашњих сила (преко напона)

Посматрајмо елементарну запремину, замишљено издвојену из тела конструкције, облика паралелопипеда, са димензијама: $dV = dxdydz$. Размотримо прво два једноставна случаја.

- **Утицај нормалних напона:** нека у овом случају у правцу осе z на странама површине $dxdy$ делује **само** нормални напон σ_z , образујући силу интензитета $\sigma_z dxdy$. Почетна димензија паралелопипеда dz променила се за износ $\Delta dz = \varepsilon_z dz$, где је ε_z одговарајућа линеарна деформација у правцу осе z (Слика 3).



Слика 3. Деформација под дејством нормалног напона

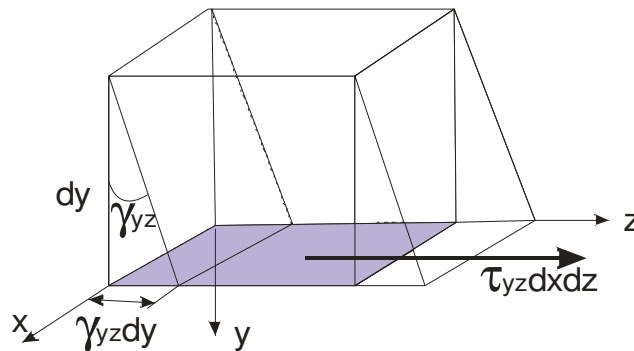
Елементарни деформацијски рад једнак је

$$dA_{d\sigma} = \frac{1}{2} S d\delta = \frac{1}{2} (\sigma_z dxdy) (\varepsilon_z dz) = \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2} dV. \quad (7a)$$

Можемо закључити да је специфични деформацијски рад при дејству нормалног напона у једном правцу једнак половини производа интензитета напона и одговарајуће линеарне деформације

$$A'_{d\sigma} = \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2}. \quad (76)$$

- Сада размотримо **утицај напона смицања**. Посматрајмо исту елементарну запремину $dV = dxdydz$. Нека на страни површине $dxdz$ делује напон смицања τ_{yz} образујући силу интензитета $\tau_{yz} dxdz$. Под дејством смичућег напона промениће се облик првобитне запремине (Слика 4), а одговарајућа деформација математички се дефинише као угаона деформација, односно клизање γ_{yz} . Сила $\tau_{yz} dxdz$ прећи ће пут $\delta = tg \gamma_{yz} dy \approx \gamma_{yz} dy$.



Слика 4. Деформација под дејством смичућег напона

Сада можемо да дефинишемо и одговарајући елементарни деформацијски рад

$$dA_{d\tau} = \frac{1}{2} S \delta = \frac{1}{2} (\tau_{yz} dxdz) (\gamma_{yz} dy) = \frac{\tau_{yz} \gamma_{yz}}{2} dV, \quad (8a)$$

односно специфични деформацијски рад

$$A'_{d\tau} = \frac{\tau_{yz} \gamma_{yz}}{2}. \quad (8b)$$

И у овом, као и у претходном случају, закључујемо да је специфични деформацијски рад при дејству тангенцијалног напона једнак половини производа интензитета напона и одговарајуће угаоне деформације.

Да би дефинисали ове величине при сложенем напрезању искористимо принцип суперпозиције. При дејству свих нормалних напона $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ и свих тангенцијалних напона $(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ специфични деформацијски рад једнак је

$$A'_d = \frac{dA_d}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}). \quad (9)$$

Пошто смо претпоставили да за линеарно еластичне материјале важи Хуков закон

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (10a)$$

односно Хуков закон проширен на тангенцијалне напоне

$$\tau = G\gamma, \quad (106)$$

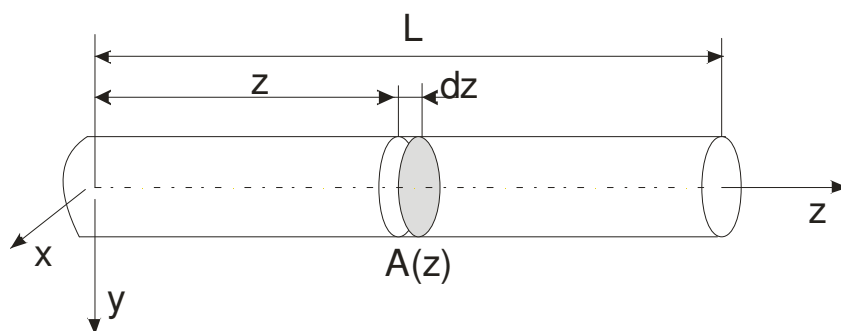
запамтимо два симболично написана израза за специфични деформацијски рад

$$A'_{d\sigma} = \frac{\sigma\epsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\epsilon^2}{2}, \quad (11a)$$

$$A'_{d\tau} = \frac{\tau\gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\gamma^2}{2}. \quad (116)$$

Деформацијски рад изражен преко пресечних сила (прочитај)

Пошто ћемо у оквиру овог курса разматрати само конструкционе елементе облика штапа и греде, прикажимо прво одговарајући начин решавања запреминских интеграла (Слика 5).

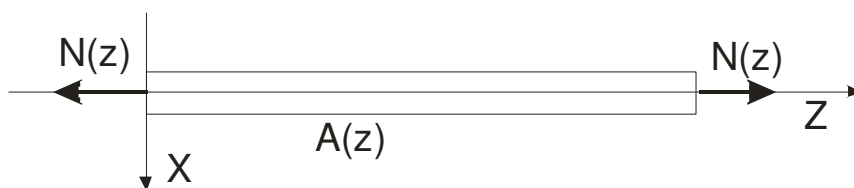


Слика 5. Конструкциони елемент облика штапа или греде

Посматрајмо део греде дужине l у правцу подужне осе z . На произвољном растојању z од почетка елемента издвојимо попречни пресек површине A . Сваки интеграл по запремини елемента урадићемо прво као двоструки интеграл по површини произвољног пресека, а затим ћемо добијени резултат интегралити по дужини, односно

$$\int_V f(x, y, z) dV = \int_0^l \left[\int_A f(x, y, z) dA \right] dz. \quad (12)$$

• ПОДУЖНО НАПРЕЗАЊЕ



Слика 6. Подужно оптерећен носач

Нека је штап укупне дужине l оптерећен само подужном силом у правцу осе z . Површина попречног пресека и интензитет силе зависе само од координате z ($A(z), N(z)$). Одговарајући напон у произвољном попречном пресеку штапа је у оквиру тог пресека константан и износи

$$\sigma_z(z) = \frac{N(z)}{A(z)}. \quad (13)$$

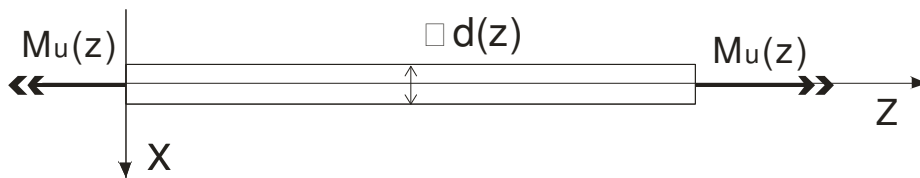
На основу претходно изведених израза за деформацијски рад можемо израчунати

$$A_{dN} = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^2(z)}{E} dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{N^2(z)}{EA^2(z)} dV = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{N^2(z)}{A^2(z)} \left(\int_A dA \right) dz = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{N^2(z)}{A(z)} dz. \quad (14)$$

Ако на штап дужине l , константног попречног пресека A делује константна подужна сила N , последњи израз постаје

$$A_{dN} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} l. \quad (15)$$

• НАПРЕЗАЊЕ НА УВИЈАЊЕ



Слика 7. Напрезање на увијање

Посматрајмо вратило кружног попречног пресека променљивог пречника $d(z)$ које је оптерећено моментом увијања $M(z)$.

Под дејством овог оптерећења у вратилу ће се појавити напон смицања

$$\tau_z(\rho, z) = \frac{M_u(z)}{I_0(z)} \rho. \quad (16)$$

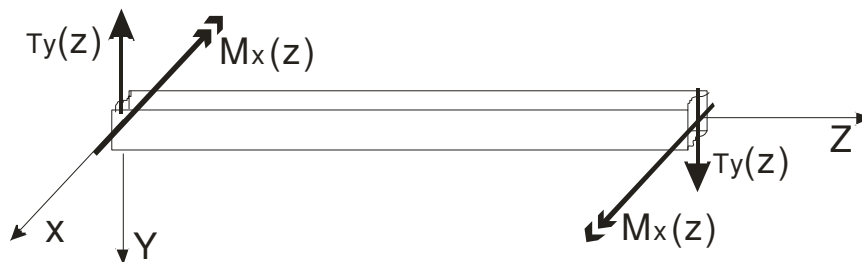
Деформацијски рад за овај случај оптерећења износи

$$A_{du} = \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau^2(z)}{G} dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{M_u^2(z)}{GI_0^2(z)} \rho^2 dV = \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{M_u^2(z)}{I_0^2(z)} \left(\int_A \rho^2 dA \right) dz = \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{M_u^2(z)}{I_0(z)} dz. \quad (17)$$

При дејству константног момента увијања на вратило константног попречног пресека, деформацијски рад износи

$$A_{du} = \frac{1}{2G} \frac{M_u^2}{I_0} l. \quad (18)$$

- САВИЈАЊЕ СИЛАМА



Слика 8. Напрезање на савијање

Деформацијски рад услед нормалних напона

Нека је греда дужине l оптерећена попречном силом $T_y = T_y(z)$ и одговарајућим моментом савијања M_x (x и y су главне тежишне осе) који је функција подужне координате z , $M_x = M_x(z)$. Попречни пресек греде је променљив, односно $A = A(z)$.

Нормални напон услед дејства момента савијања износи

$$\sigma_z(y, z) = \frac{M_x(z)}{I_x(z)} y. \quad (19)$$

Деформацијски рад за овај случај оптерећења приказан је следећим изразом

$$A_{dx} = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^2(z)}{E} dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{M_x^2(z)}{EI_x^2(z)} y^2 dV = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_x^2(z)}{I_x^2(z)} \left(\int_A y^2 dA \right) dz = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_x^2(z)}{I_x(z)} dz. \quad (20)$$

При дејству константног момента савијања на греду константног попречног пресека, деформацијски рад услед нормалних напона износи

$$A_{dx} = \frac{1}{2E} \frac{M_x^2}{I_x} l. \quad (21)$$

Деформацијски рад услед смичућих напона

Попречна сила $T_y = T_y(z)$ изазива појаву смичућих напона

$$\tau_z(y, z) = \frac{T_y(z)}{I_x(z)} \left(\frac{\tilde{S}_x(z, y)}{\xi(z, y)} \right), \quad (22)$$

где су (да се потсетимо) I_x аксијални момент инерције, $\tilde{S}_x$ статички момент од места израчунавања напона до краја пресека и ξ ширина пуног пресека на месту израчунавања напона.

Деформацијски рад је тада једнак

$$\begin{aligned} A_{dTy} &= \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau_z^2(y, z)}{G} dV = \frac{1}{2G} \int_V \frac{T_y^2(z)}{I_x^2(z)} \left(\frac{\tilde{S}_x(z, y)}{\xi(z, y)} \right)^2 dV = \\ &= \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{T_y^2(z)}{A(z)} \left(\int_A \frac{A(z)}{I_x^2(z)} \left(\frac{\tilde{S}_x(z, y)}{\xi(z, y)} \right)^2 dA \right) dz. \end{aligned} \quad (23)$$

Површински интеграл у изразу (23) обележава се са κ_x и назива коефицијентом облика попречног пресека

$$\kappa_x(z) = \int_{A(z)} \frac{A(z)}{I_x^2(z)} \left(\frac{\tilde{S}_x(z, y)}{\xi(z, y)} \right)^2 dA = \frac{A(z)}{I_x^2(z)} \int_{A(z)} \left(\frac{\tilde{S}_x(z, y)}{\xi(z, y)} \right)^2 dA, \quad (24)$$

на основу кога се дефинише редукована површина пресека A_x

$$A_x(z) = \frac{A(z)}{\kappa_x(z)}. \quad (25)$$

Сада можемо да напишемо израз за деформацијски рад услед дејства попречне силе T_y

$$A_{dTy} = \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{T_y^2(z)}{A(z)} \kappa_x(z) dz = \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{T_y^2(z)}{A_x(z)} dz. \quad (26)$$

Уколико је попречна сила константна $T_x(z) = const.$ и у случају константног попречног пресека $A(z) = const.$, претходни израз постаје

$$A_{dTy} = \frac{1}{2G} \frac{T_y^2}{A_x} l. \quad (27)$$

Изрази за деформацијски рад услед момента савијања M_y и попречне силе T_x су аналогни изразима (20) и (26):

$$A_{dy} = \frac{1}{2} \int_V \frac{M_y^2(z)}{EI_y^2(z)} x^2 dV = \frac{1}{2E_0} \int_0^l \frac{M_y^2(z)}{I_y^2(z)} \left(\int_A x^2 dA \right) dz = \frac{1}{2E_0} \int_0^l \frac{M_y^2(z)}{I_y(z)} dz, \quad (28)$$

$$A_{dT_x} = \frac{1}{2G_0} \int_0^l \frac{T_x^2(z)}{A(z)} \kappa_y(z) dz = \frac{1}{2G_0} \int_0^l \frac{T_x^2(z)}{A_y(z)} dz. \quad (29)$$

Коефицијенти облика попречног пресека κ_x и κ_y израчунавају се помоћу израза (24) и за правоугаони пресек износе 1.20, за пресек у облику једнокраког троугла такође 1.20, а за кружни попречни пресек 1.11.

Општи израз за деформацијски рад

Ако упоредимо изразе (14), (17), (20), (26), (28) и (29) приметићемо да сви имају исти облик интеграла који јединствено можемо да запишемо на следећи начин

$$A_d = \frac{1}{2} \int_s \frac{F^2(s)}{\varepsilon J(s)} ds. \quad (30)$$

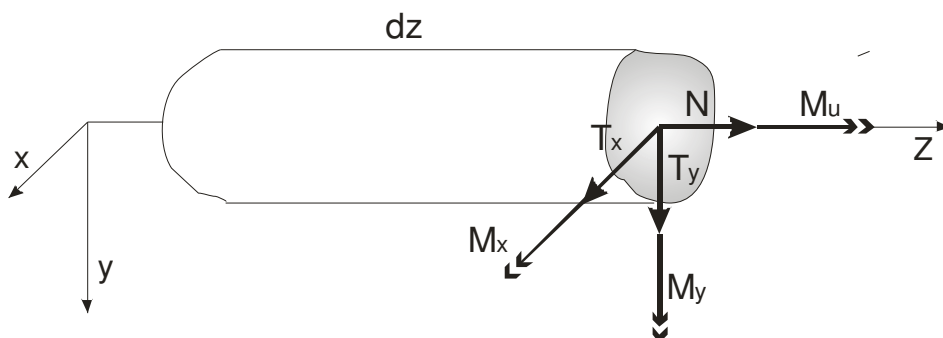
Величина $F(s)$ представља оптерећење, односно, то је било која од шест пресечних сила, ε је одговарајућа физичка карактеристика материјала, $J(s)$ одговарајућа геометријска карактеристика попречног пресека, а s представља координату у правцу подужне осе елемента.

Следећа табела приказује вредности $F(s)$, ε , и $J(s)$ за појединачне случајеве оптерећења (напрезања).

Табела 1.

Оптерећење	$F(s)$	ε	$J(s)$
Подужна сила	N	Модул еластичности E	површина пресека A
Момент увијања	M_u	Модул клизања G	торзиони момент I_0
Момент савијања око осе x	M_x	Модул еластичности E	момент инерције I_x
Попречна сила у правцу осе y	T_y	Модул клизања G	редукована површина A_x
Момент савијања око осе y	M_y	Модул еластичности E	момент инерције I_y
Попречна сила у правцу осе x	T_x	Модул клизања G	редукована површина A_y

Деформацијски рад при општем случају напрезања изражен преко пресечних сила



Слика 9. Општи случај напрезања

Посмартajмо прво део носача елементарне дужине dz (Слика 9.) који је оптерећен подужном силом N , моментом увијања M_u , моментима савијања у правцима главних оса M_x, M_y и попречним силама у правцима главних оса T_y, T_x . Усвојимо претпоставку да свако оптерећење врши рад само на свом померању. Користећи принцип суперпозиције можемо написати да је укупан елементарни деформацијски рад једнак збиру елементарних деформацијских радова од свих оптерећења, односно

$$dA_d = dA_{dN} + dA_{dMu} + dA_{dMx} + dA_{dMy} + dA_{dT_y} + dA_{dT_x}. \quad (31)$$

Коришћењем претходно изведених израза имамо

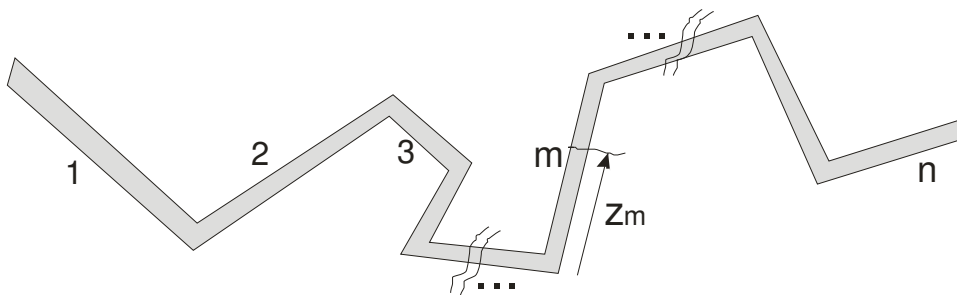
$$dA_d = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dz + \frac{1}{2} \frac{M_u^2}{GI_0} dz + \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI_x} dz + \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_y} dz + \frac{1}{2} \frac{T_y^2}{GA_x} dz + \frac{1}{2} \frac{T_x^2}{GA_y} dz. \quad (32)$$

Деформацијски рад целог носача дужине l једнак је интегралу по дужини елементарног деформацијског рада представљеног изразом (32)

$$A_d = \int_0^l dA_d. \quad (33)$$

Ако посматрамо конструкцију састављену од n правих или благо закривљених делова-поља, да би математички представили израз за деформацијски рад уведимо бројач $m = 1, n$ (Слика 10). Вредност укупног деформацијског рада израчунаћемо тако што ћемо прво одредити деформацијски рад од сваког појединачног оптерећења за свако поље посебно, а затим извршити просто сабирање по пољима

$$A_d = \sum_{m=1}^n \int_{am}^{bm} (dA_{dN} + dA_{dMu} + dA_{dMx} + dA_{dMy} + dA_{dT_y} + dA_{dT_x})_m. \quad (34)$$



Слика 10. Конструкција од n правих делова

Величине a_m и b_m су границе интеграције поља m (најчешће интегралимо од 0 до l_m).

Код сложено напрегнуте конструкције, у циљу лакшег израчунавања, можемо да уведемо и неке апроксимације. Деформацијски радови услед сила (подужне и две попречне) су знатно мањи од одговарајућих радова услед момената (увијања и савијања око обе главне осе), па се могу и занемарити.

Примена деформацијског рада и допунског рада

Кастиљанове теореме

У оквиру овог поглавља извешћемо две изузетно важне тореми које представљају основу за одређивање померања на носачима произвољног облика.

Посматрајмо геометријски сложено конструкцију оптерећену системом концентрисаних сила S_i , $i=1,2,...,n$ (да би поједноставили писање, под појмом *сила* подразумеваћемо концентрисану силу или концентрисани момент). Нападне тачке сила трпе померања у правцима њиховог деловања, и та померања означимо са δ_i , $i=1,2,...,n$. Нека је за сваку силу задата зависност $S_i = S_i(\delta_i)$. Тако укупни деформацијски рад можемо да изразимо преко померања тачака, односно

$$\begin{aligned} A_d &= A_d[S_1(\delta_1), S_2(\delta_2), ..., S_i(\delta_i), ..., S_n(\delta_n)], \\ A_d &= A_d(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_i, ..., \delta_n). \end{aligned} \quad (35)$$

Сада претпоставимо да само померање δ_i произвољне тачке i у којој делује сила S_i претрпи елементарно малу промену $d\delta_i$ у правцу силе S_i , а да сва остала померања остану непромењена. Укупни деформацијски рад се тада мења само за вредност

$$dA_d = S_i d\delta_i. \quad (36)$$

Посматрајући деформацијски рад као сложено функцију померања можемо написати тотални диференцијал те функције као

$$dA_d = \frac{\partial A_d}{\partial \delta_1} d\delta_1 + \frac{\partial A_d}{\partial \delta_2} d\delta_2 + \dots + \frac{\partial A_d}{\partial \delta_i} d\delta_i + \dots + \frac{\partial A_d}{\partial \delta_n} d\delta_n, \quad (37)$$

при чему је за задате услове само подвучени члан у изразу (37) различит од нуле. Изједначавањем израза (36) и (37) добијамо релацију која представља ПРВУ КАСТИЉАНОВУ ТЕОРЕМУ у облику

$$S_i = \frac{\partial A_d}{\partial \delta_i}. \quad (38)$$

- Ако се деформацијски рад изрази као функција померања, онда је парцијални извод рада по произвољном померању δ_i тачке i једнак одговарајућој концентрисаној сили S_i која делује у тој тачки, а чији се смер поклапа са смером померања δ_i .

Ова теорема се често назива и Лагранжова теорема (Lagrange) и представља основу за МЕТОДУ ПОМЕРАЊА.

Сада посматрајмо исту конструкцију оптерећену системом концентрисаних сила S_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Нека је за свако померање задата зависност $\delta_i = \delta_i(S_i)$. Тако, укупни допунски рад можемо да изразимо преко концентрисаних сила, односно

$$\begin{aligned} A_d^* &= A_d^*[\delta_1(S_1), \delta_2(S_2), \dots, \delta_i(S_i), \dots, \delta_n(S_n)], \\ A_d^* &= A_d^*(S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n). \end{aligned} \quad (39)$$

Претпоставимо да само сила S_i са нападном тачком i претрпи елементарно малу промену dS_i у правцу померања δ_i , а да све остале силе остану непромењене. Укупни допунски рад се тада мења само за вредност

$$dA_d^* = \delta_i dS_i. \quad (40)$$

Како је допунски рад сложена функција сила можемо написати његов тотални диференцијал као

$$dA_d^* = \frac{\partial A_d^*}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial A_d^*}{\partial S_2} dS_2 + \dots + \frac{\partial A_d^*}{\partial S_i} dS_i + \dots + \frac{\partial A_d^*}{\partial S_n} dS_n, \quad (41)$$

при чему је за задате услове једино подвучени члан у изразу (41) различит од нуле. Изједначавањем израза (40) и (41) добијамо једнакост која представља Crotti-Engesser-ову теорему

$$\delta_i = \frac{\partial A_d^*}{\partial S_i}. \quad (42)$$

- Ако се допунски рад изрази као функција сила, онда је парцијални извод допунског рада по произвољној сили S_i са нападном тачком i , једнак одговарајућем померању δ_i тачке i у смеру дејства силе S_i .

Ова теорема важи и за еластичне конструкције са нелинеарним понашањем, а у случају линеарно еластичних конструкција код којих је допунски рад једнак деформацијском раду, прелази у облик

$$\delta_i = \frac{\partial A_d}{\partial S_i}, \quad (43)$$

који представља **ДРУГУ КАСТИЉАНОВУ ТЕОРЕМУ** и даје основу за употребу **МЕТОДЕ СИЛА**.

ПРИМЕНА ДРУГЕ КАСТИЉАНОВЕ ТЕОРЕМЕ

Ако напишемо општи израз за деформацијски рад на сложеносачу у следећем облику

$$A_d = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \frac{F^2(s)}{\epsilon J(s)} ds, \quad (44)$$

и применимо Кастиљанову теорему (43), добићемо израз погодан за примену у облику

$$\delta_i = \frac{\partial A_d}{\partial S_i} = \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \frac{F(s)}{\epsilon J(s)} \frac{\partial F(s)}{\partial S_i} ds. \quad (45)$$

У случају да је оптерећење носача који се састоји од n праволинијских делова само момент савијања око једне главне осе, и да је попречни пресек носача по пољима константан, израз (45) прелази у

$$\delta_i = \frac{\partial A_d}{\partial S_i} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{E_m I_m} \int_{a_m}^{b_m} M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial S_i} dz. \quad (46)$$

У циљу лакше израде задатака, испишимо и поступак за примену ове теореме:

1. У тачки у којој тражимо линијско или угаоно померање мора да постоји концентрисана сила или концентрисани момент.
- Ако на том месту нема задатог спољашњег оптерећења уводимо фиктивно оптерећење које је по интензитету једнако нули и обавезно се узима у обзир при израчунавању реакција у ослонцима;
- Ако на носачу постоји више оптерећења истог интензитета, а како су концентрисане силе и моменти вектори, посебно треба обележити оно оптерећење по коме се тражи парцијални извод.

2. Реакције у ослоњцима се рачунају у функцији свих задатих и фиктивних оптерећења.
3. Затим се одређује број поља у зависности од промене крутости и момента.
4. Формира се одговарајућа табела у којој се уписују моменти по пољима, парцијални изводи, крутости и границе интеграције.
5. Израчунавају се интеграл и врши њихово сабирање.

ПРИМЕРИ

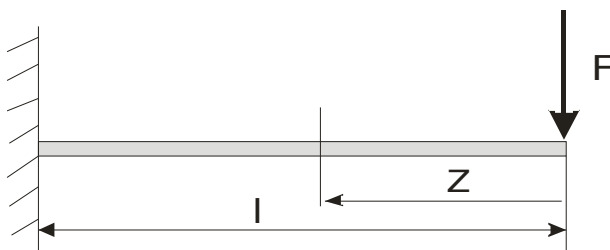
Да би одредили вредност деформацијског рада, или применили Кастиљанову теорему у некој сложеној конструкцији, прво морамо ту конструкцију да поделимо на одговарајући број поља погодних за интеграцију. Свака промена геометрије, крутости и оптерећења изискује увођење новог поља. Када се одреди број поља, за свако поље се уцрта смер мерења координате.

Сада је најбоље (најлакше за рад) формирати табелу у коју се по колонама уписује оптерећење у зависности од координате, парцијални извод, крутост поља и границе интеграције.

Погледајмо то на једноставним примерима.

Пример 1.

Одредити деформацијски рад у конзоли дужине l и константне крутости EI , оптерећеној попречном силом F на слободном крају. Одредити померање слободног краја носача.



Очигледно је да овде постоји само једно поље за интеграцију. Погледајмо како изгледа табела:

Бр. поља	Оптерећење $M(z)$	Крутост	Границе
1.	$M(z) = Fz$	EI	$0, l$

Деформацијски рад износи

$$A_d = \frac{1}{2EI} \int_0^l (Fz)^2 dz = \frac{F^2}{2EI} \int_0^l z^2 dz = \frac{F^2 l^3}{6EI}.$$

Померање слободног краја једнако је парцијалном изводу деформацијског рада по

сили и износи $f = \frac{\partial A_d}{\partial F} = \frac{Fl^3}{3EI}.$