4. недеља наставе

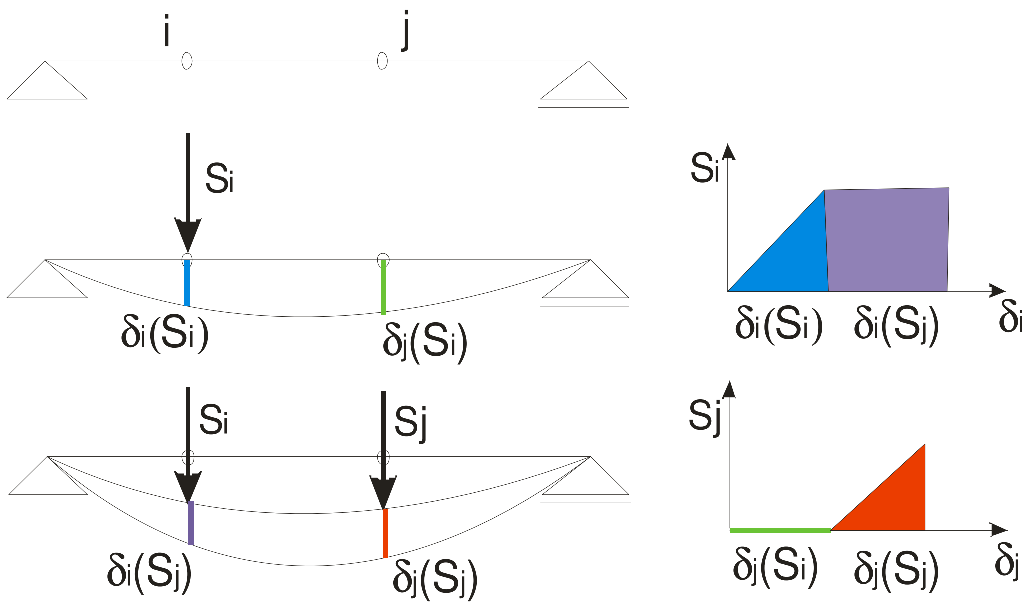
# ТЕОРЕМЕ О УЗАЈАМНОСТИ

Извешћемо и размотрити две теореме о узајамности које имају важну примену у Отпорности материјала и Теорији еластичности :

- Теорему о узајамности радова (Betti-Rayleigh-јева) и
- Теорему о узајамности померања (Maxwell-ова).

## ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ РАДОВА

Да би извели ову теорему уочимо две произвољне тачке $i$ и $j$ на гредном носачу приказаном на Слици 1.




Слика 1. Теорема о узајамности радова

Поставимо прво силу $S_i$ у тачки $i$. Под дејством те силе носач ће се деформисати, тако да ће тачка $i$ прећи пут $\delta_i(S_i)$, а тачка $j$ пут $\delta_j(S_i)$. Индекс уз померање $\delta$ означава место (тачку), а у загради се пише оптерећење које је то померање изазвало. Како је сила $S_i$ статичка, док прелази пут $\delta_i(S_i)$ вршиће рад на померању своје нападне тачке једнак $\frac{1}{2}S_i\delta_i(S_i)$. Тачка $j$ прелази неки пут, али како у њој још не делује сила одговарајући деформацијски рад је једнак нули.

Сада на тако деформисаном носачу поставимо и другу силу $S_j$ у тачки $j$. Под њеним дејством сила $S_i$, која је већ достигла пуну вредност, прелази пут $\delta_i(S_j)$ и врши рад на померању своје нападне тачке $S_i \delta_i (S_j)$. Тачка $j$ се помера за $\delta_j (S_j)$ и пошто је и сила $S_j$ статичка, њен рад износи $\frac{1}{2} S_j \delta_j (S_j)$.

Укупан деформацијски рад од обе силе износи

$$A_d = \frac{1}{2} S_i \delta_i (S_i) + S_i \delta_i (S_j) + \frac{1}{2} S_j \delta_j (S_j). \tag{1}$$

Поновимо овај поступак, али обрнутим редом, прво поставимо силу $S_j$, а затим силу $S_i$. Добићемо израз аналоган изразу (1) који гласи

$$A_d = \frac{1}{2} S_j \delta_j (S_j) + S_j \delta_j (S_i) + \frac{1}{2} S_i \delta_i (S_i). \tag{2}$$

Како деформацијски рад не зависи од редоследа уношења оптерећења, изједначавањем израза (1) и (2) добијамо да је

$$S_i \delta_i (S_j) = S_j \delta_j (S_i). \tag{3}$$

Једнакост (3) представља **Теорему о узајамности радова** коју можемо да прочитамо на следећи начин:

**Рад силе $S_i$ на померању $\delta_i$ њене нападне тачке $i$ изазваном силом $S_j$ која делује у тачки $j$, једнак је раду силе $S_j$ на померању $\delta_j$ њене нападне тачке $j$ изазваном силом $S_i$ која делује у тачки $i$.**

- $S_i$ и $S_j$ -

- $\delta_i$ и $\delta_j$ -

## ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ ПОМЕРАЊА

Пре извођења ове теореме уведимо једну нову величину коју ћемо назвати **утицајни коефицијент**.

Померање тачке $i$ изазвано јединичном силом $S_j = 1$ обележимо са $\alpha_{ij}$

$$\alpha_{ij} = \delta_i (S_j = 1). \tag{4}$$

Коефицијент $\alpha_{ij}$ назива се **Максвелов утицајни коефицијент.**

Пођимо од претходне теореме и искористимо особину линеарно еластичне конструкције да је померање тачке услед дејства силе једнако њеном померању услед јединичне силе помноженом интензитетом те силе, односно

$$\delta_i(S_j) = \delta_i(S_j = 1)S_j = \alpha_{ij} S_j . \tag{5}$$

Једнакост (3) можемо да трансформишемо на следећи начин

$$S_i\delta_i(S_j) = S_j\delta_j(S_i) \Rightarrow S_i\delta_i(S_j = 1)S_j = S_j\delta_j(S_i = 1)S_i \Rightarrow S_i\alpha_{ij}S_j = S_j\alpha_{ji}S_i , \tag{6}$$

што нас доводи до **Теореме о узајамности померања**

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} , \tag{7}$$

коју можемо да прочитамо на следећи начин:

**У линеарно еластичној конструкцији померање тачке $i$ у правцу силе $S_i$ која у њој делује, а које је изазвано јединичном силом $\overline{S}_j = 1$, једнако је померању тачке $j$ у правцу силе $S_j$ која у њој делује, а које је изазвано јединичном силом $\overline{S}_i = 1$.**

Ако на конструкцију делује $n$ различитих оптерећења, сила или момената, коришћењем принципа суперпозиције, померање произвољне тачке $i$ може се приказати као сума померања од сваког оптерећења појединачно

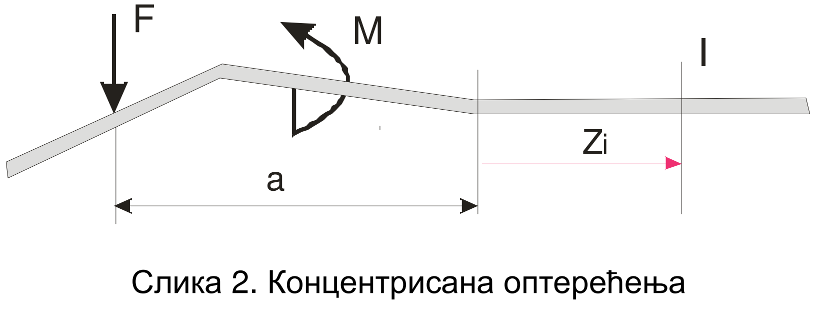
$$\delta_i = \delta_i(S_1) + \delta_i(S_2) + \delta_i(S_3) + \cdots + \delta_i(S_n) = \sum_{j=1}^{n} \delta_i(S_j),$$

или преко утицајних коефицијената

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} S_j . \tag{8}$$

## МЕТОДА ЈЕДИНИЧНИХ ОПТЕРЕЋЕЊА
## Максвел-Морова метода

Посматрајмо део неке конструкције и од оптерећења уочимо само концентрисане силе и концентрисане моменте (Слика 2).




Слика 2. Концентрисана оптерећења

У произвољном пресеку поља $i$, који дефинишемо координатом $z_i$, момент савијања од силе $F$ износи $F(a+z_i)$, а од концентрисаног момента само $M$. Увек су у изразу за момент у произвољном пресеку, концентрисане силе и концентрисани моменти функције првог степена. Зато, да би добили парцијални извод по некој сили (моменту) довољно је да у изразу за момент од те силе (момента) ставимо да је она једнака јединици, или уопштено

$$\frac{\partial M(z)}{\partial S_i} = M(z)\Big|_{S_i=1} \equiv \overline{M}_i(z) \tag{9}$$

Уобичајено је да момент од јединичног оптерећења обележавамо са $\overline{M}$, а у индексу означавамо то оптерећење.

Размотримо сада Кастиљанову теорему

$$\delta_i = \frac{\partial A_d}{\partial S_i} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{E_m I_m} \int_{a_m}^{b_m} M_m(z) \frac{\partial M_m(z)}{\partial S_i} dz\,. \tag{10}$$

Ако на њу применимо израз (9) добићемо да је

$$\delta_i = \frac{\partial A_d}{\partial S_i} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{E_m I_m} \int_{a_m}^{b_m} M^q{}_m(z) \overline{M}_{mi}(z) dz\,, \tag{11}$$

при чему $M^q{}_m(z)$ представља момент у пољу $m$ од задатих оптерећења, а $\overline{M}_{mi}(z)$ момент у пресеку $m$ од јединичног концентрисаног оптерећења $\overline{S}_i = 1$ које делује у тачки $i$.

Ово важи не само за момент савијања, већ за било које оптерећење (подужна сила, момент увијања...), па напишимо и уопштени израз

$$\delta_i = \frac{\partial A_d}{\partial S_i} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_m J_m} \int_{a_m}^{b_m} F^q{}_m(s) \overline{F}_{mi}(s) ds\,. \tag{12}$$

Овај приступ решавању проблема, где се парцијални изводи орећују као моменти од јединичних оптерећења, назива се **Метода јединичних оптерећења**, или **Максвел - Морова метода**.

Напишимо и поступак за примену ове методе:

1. У тачки у којој се тражи померање (угиб или нагиб) поставити јединично концентрисано оптерећење (силу или момент) без обзира да ли ту већ постоји неко друго концентрисано оптерећење,

2. Одредити број поља у којима се мењају момент или савојна крутост,

3. Да би се исписали изрази за моменте, треба одредити отпоре ослонаца. Отпоре ослонаца треба изразити преко задатих оптерећења и јединичне силе; најбоље је нацртати два носача и на једном уцртати задата оптерећења, а на другом жељено јединично оптерећење, а затим помоћу статичких једначина одредити отпоре ослонаца у оба случаја,

4. Формирати табелу у којој се по колонама исписују:

| Број поља | Момент од задатих оптерећења $M^q{}_m(z)$ | Момент од јединичног оптерећења $\overline{M}_{mi}(z)$ | Крутост поља | Границе интеграције |
|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |
| ... | | | | |

5. Израчунати интеграле и сабрати их.

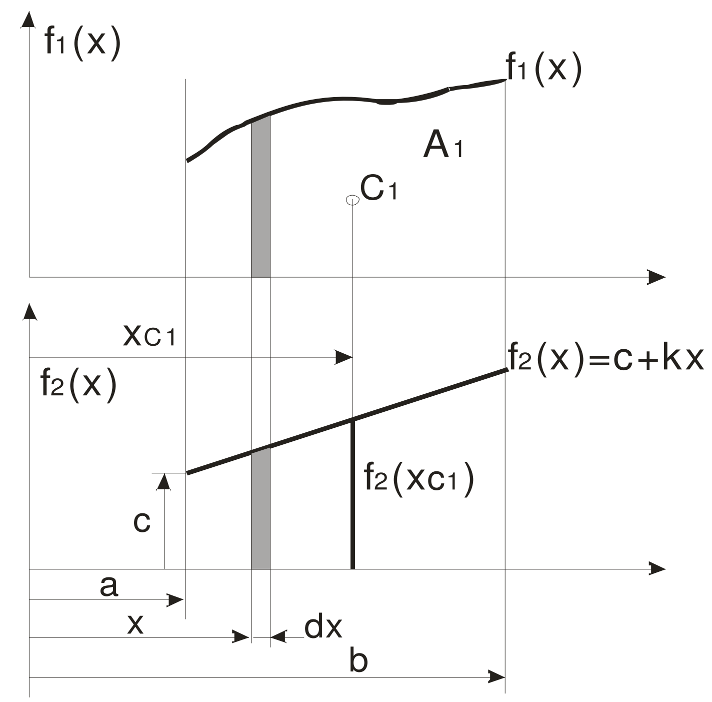
## ВЕРЕШЋАГИНОВ ПОСТУПАК

Сада ћемо приказати један графичко-аналитички поступак који знатно олакшава решавање претходно приказаних интеграла. Поступак се назива **Верешћагинов поступак** и заснива се на <u>тачно и прецизно нацртаним статичким дијаграмима</u>.

Погледајмо поново израз (12)

$$\delta_i = \frac{\partial A_d}{\partial S_i} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_m J_m} \int_{a_m}^{b_m} F^q{}_m(s) \overline{F}_{mi}(s) ds \,.$$

Већ смо закључили да је, за конструкције састављене од $n$ правих делова, функција $\overline{F}_{mi}(s)$ увек линеарна. Значи да је под интегралом који морамо да решимо производ једне произвољне и једне линеарне функције.




Слика 3. Произвољна и линеарна функција

Да би нам било лакше означимо произвољну функцију са $f_1(x)$, а линеарну са $f_2(x)$ и напишимо упрошћено одговарајући интеграл

$$J = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx. \tag{13}$$

Функције су графички представљене на Слици 3. Линеарну функцију представимо као

$$f_2(x) = c + kx \tag{14}$$

и заменимо је у интегралу (13). Добићемо

$$J = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x)(c + kx) dx = c \int_a^b f_1(x) dx + k \int_a^b x f_1(x) dx. \tag{15}$$

Први интеграл у изразу (15) представља површину оспод криве $f_1$ у задатим границама

$$\int_a^b f_1(x) dx = A_1, \tag{16}$$

а други интеграл је, по дефиницији, статички момент површине $A_1$ за вертикалну осу коју можено да означимо са $y$

$$\int_a^b x f_1(x) dx = S_{y1}. \tag{17}$$

Статички момент можемо да прикажемо и преко површине и одговарајуће координате тежишта као

$$S_{y1} = A_1 x_{c1}. \tag{18}$$

Трансформишимо интеграл (15) помоћу три последње релације на следећи начин

$$J=\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx=cA_1+kA_1x_{C1}=A_1(c+kx_{C1})=A_1f_2(x_{C1}). \tag{19}$$

- **Одређени интеграл који представља производ две функције, од којих је прва произвољна а друга линеарна, израчунава се тако што се величина површине испод прве функције (произвољне) помножи са вредношћу (ординатом) друге функције (линеарне) на месту тежишта прве функције.**

Статички дијаграми од концентрисане силе или момента су увек линеарни, и зато је најлакше при множењу два дијаграма израчунати површину на дијаграму од задатог спољашњег оптерећења $A^q$, и помножити је са ординатом на дијаграму од јединичног концентрисаног оптерећења $\overline{\eta}_i$. Израз (12) који нам дефинише померање, тада можемо да напишемо као

$$\delta_i=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon_m J_m}\int_{a_m}^{b_m}F^q{}_m(s)\overline{F}_{mi}(s)ds=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon_m J_m}A_m^q\overline{\eta}_{im}\,. \tag{20}$$

Израчунавање померања применом Верешћагиновог поступка врши се према следећим корацима:

1. Нацртати дијаграме момената савијања од задатих спољашњих оптерећења Ради лакшег множења, свако оптерећење се разматра појединачно; значи, уместо једног сложеног дијаграма црта се онолико "простих" дијаграма колико има различитих оптерећења на носачу (обавезно израчунати отпоре ослонаца и узети их у обзир). Дијаграми се цртају на контури рама као нултој линији;
2. Нацртати дијаграм момента савијања од јединичног оптерећења постављеног на месту на коме се тражи померање (опет се пази на реакције у ослонцима);
3. Померање тачке (у којој делује јединично оптерећење) добија се тако што се величине површина свих појединачних дијаграма од спољашњих оптерећења "помноже" ординатом на дијаграму од јединичног оптерећења на месту тежишта сваке посматране површине, а затим се ти производи саберу. Множење се обавља по принципу "поље по поље" водећи рачуна о задатој крутости носача.

Морамо да водимо рачуна и о следећем:

- Ако је на једном дијаграму крива а на другом права линија, обавезно се одређује површина испод криве линије; ако су оба дијаграма праволинијска, свеједно је са ког дијаграма ћемо узети површину, а са ког ординату,
- Ако су дијаграми са исте стране носача производ је са знаком плус, а ако су са различите са знаком минус; сви дијаграми се цртају на страни истегнутих влакана носача,
- Сложени дијаграми могу да се растављају на више простих дијаграма (троуглови, правоугаоници, квадратне параболе...) за које знамо (и имамо у таблицама) површине и положаје тежишта,
- Ако се за померање добије знак плус значи да је то померање у смеру постављеног јединичног оптерећења; знак минус показује да је смер померања супротан од смера јединичног оптерећења.

У случају да на носачу делује више оптерећења различите природе, множе се само истородни дијаграми, значи, момент савијања у једној равни само са моментом савијања у тој истој равни, момент увијања само са моментом увијања, подужна сила само са подужном силом...

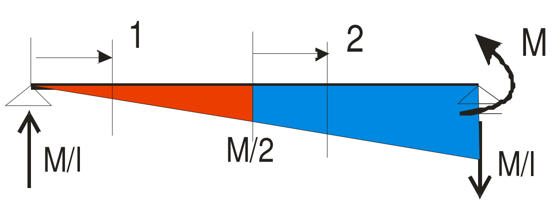
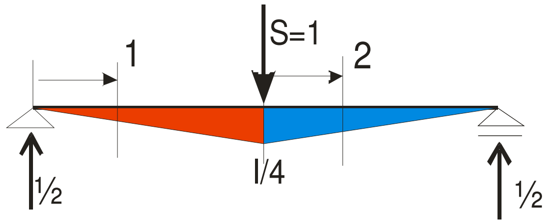
**Пример 1.**

Посматрајмо просту греду дужине $l$ која је над десним ослонцем оптерећена концентрисаним моментом савијања $M$ . Применом

1. Максвел-Морових интеграла,
2. Верешћагиновог поступка,

одредимо померање тачке на средини распона носача.

Применићемо упоредо оба поступка тако што ћемо у првој врсти табеле обележити поља на носачу за рачунање Максвел-Морових интеграла и на истим сликама нацртати и моментне дијаграме за Верешћагинов поступак. Прво цртамо дијаграм од задатог оптерећења, а затим дијаграм од јединичне силе на средини распона. Да би написали изразе за моменте у пољима и нацртали дијаграме морали смо да одредимо реарције у ослинцима које су приказане на одговарајућим сликама.

| | Задато оптерећење | Јединично оптерећење | |
|---|---|---|---|
| |   |   | Гран. Крут. |
| 1 | $\frac{M}{l}z$ | $\frac{1}{2}z$ | $0,l/2$<br>$EI$ |
| 2 | $\frac{M}{l}\left(\frac{l}{2}+z\right)$ | $\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}+z\right)-z=\frac{l}{4}-\frac{z}{2}$ | $0,l/2$<br>$EI$ |

Множењем колоне *Задато оптерећење* са колоном *Јединично оптерећење* и одговарајућом интеграцијом, применом Максвел-Морових интеграла имамо да је тражено померање

$$f=\frac{1}{EI}\int_0^{l/2}\left(\frac{M}{l}z\right)\frac{z}{2}dz+\frac{1}{EI}\int_0^{l/2}\frac{M}{l}\left(\frac{l}{2}+z\right)\left(\frac{l}{4}-\frac{z}{2}\right)dz=\frac{Ml^2}{16EI}.$$

Применом Верешћагиновог поступка *множимо* моментне дијаграме (прво два црвена троугла, а затим плави троугао са плавим трапезом)

$$f=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{M}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{l}{4}\right)+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{l}{4}\right)\left(\frac{M}{2}+\frac{1}{3}\frac{M}{2}\right)=\frac{Ml^2}{16EI}.$$

Напомена: Израчунајте сами интеграле да би видели који је поступак бржи и једноставнији.