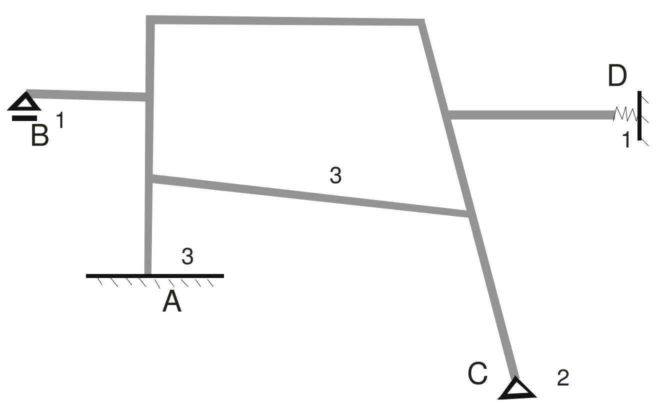
5. недеља наставе

Примена енергетских метода на решавање статички неодређених проблема

До сада смо углавном разматрали носаче који су статички одређени, што значи да помоћу статичких једначина можемо да одредимо све реакције у ослонцима и да након тога нацртамо статичке дијаграме на свим распонима.

Размотримо сада статички неодређене конструкције (размотримо сложеније носаче). За почетак погледајмо равански носач на Слици 1.



Слика 1. Статички неодређен носач

Овај носач се састоји из више правих делова који могу да буду различите крутости, а од ослонаца има једно уклештење A, један покретан ослонац B, један непокретан ослонац C, а на десном крају је постављен и један еластичан ослонац D.

Прво морамо да пребројимо све непознате реакције у тим ослонцима:

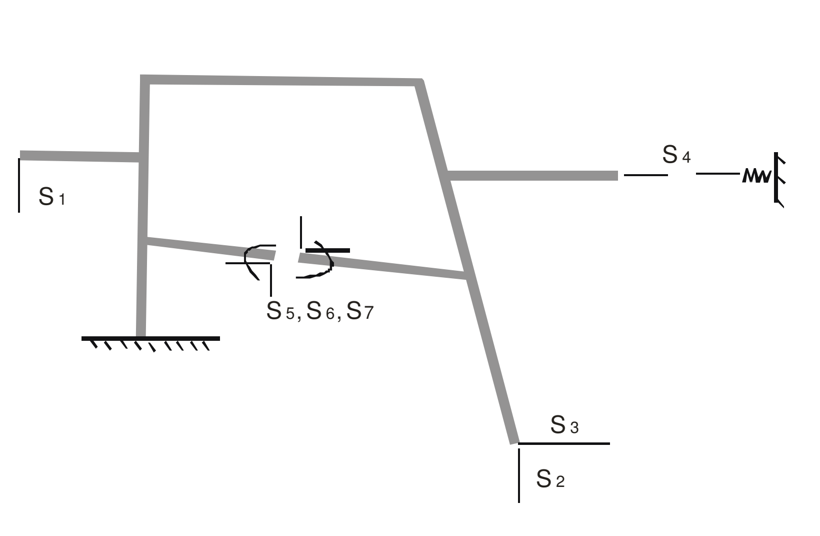
- у уклештењу имамо три непознате величине (две силе и момент), померање пресека A је једнако нули, а такође и одговарајући почетни нагиб;
- у покретном ослонцу B имамо једну непознату силу и померање само у правцу те силе је једнако нули;
- у непокретном ослонцу постоје две непознате силе, померање пресека C једнако је нули;
- код еластичног ослонца треба одредити једну непознату силу у правцу ослонца, при чему је преко опруге задато померање δ_D које је различито од нуле.

Разматрањем ослонаца, избројали смо (3+1+2+1) укупно 7 непознатих величина. За проблем у равни можемо да напишемо само 3 статичке једначине, тако да код овог носача постоје 4 непознате величине које морамо да одредимо на неки други начин.

Број непознатих величина које представљају реакције у ослонцима најчешће се обележава са n_{sp}, а број статичких једначина које можемо да применимо на проблем обележава се са s_{sp}. Њихова разлика нам даје <u>број спољашње статичке неодређености</u> носача $k_{sp} = n_{sp} - s_{sp}$ и у нашем случају износи $7 - 3 = 4$.

Да би одредили момент у неком пресеку морамо <u>на том месту да пресечемо насач и да се он при томе раздвоји на два независна дела</u>. Тада за израчунавање момента узимамо сва оптерећења, заједно са реакцијама у ослонцима, са једног или са другог дела. Ако погледамо наш носач са Слике 1 приметићемо да он има једну затворену контуру; ако сечемо носач било где унутар те контуре он и даље остаје једна целина и не раздваја се на два дела. Према томе, унутар затворене контуре не можемо да нацртамо моментни дијаграм све док је не отворимо и не израчунамо величине у пресеку на месту отварања. Број тих величина обележавамо са $n_{и}$. <u>Број унутрашње статичке неодређености</u> $k_{и}$ добићемо кад од $n_{и}$ одузмемо одговарајући број статичких једначина; на пример, ако у оквиру контуре постоји Герберов зглоб можемо за њега да напишемо једначину да је момент у њему једнак нули. У нашем случају раванског носача $k_{и} = 3$.

На крају закључујемо да наш носач има укупно ($n = n_{sp} + n_{и}$) десет непознатих величина и да је ($k = k_{sp} + k_{и}$) седам пута статички неодређен, четири пута спољашње и три пута унутрашње.

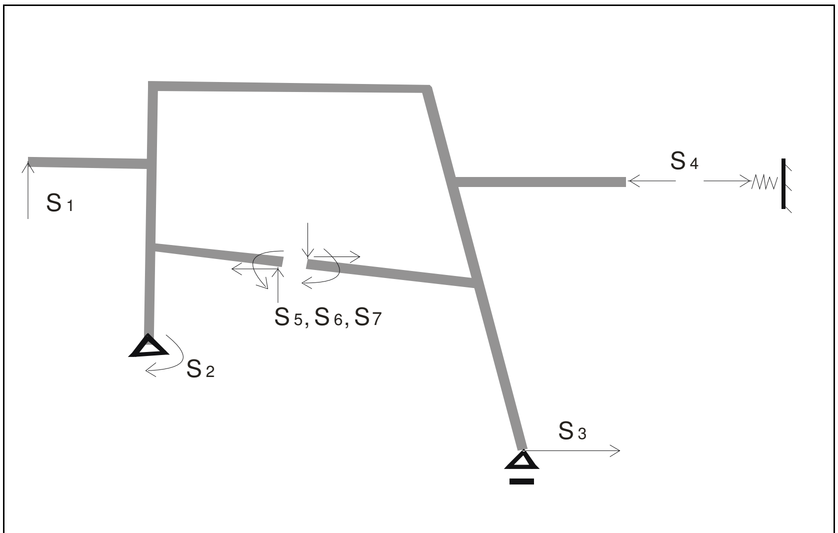


Слика 2а. Трансформација носача

*

Овакви проблеми се решавају применом МЕТОДЕ СИЛА са којом смо се већ раније упознали.

Да би применили методу сила морамо да трансформишемо задати носач тако да се ослободимо свих статички прекобројних веза, уместо њих да уцртамо одговарајуће реакције и на крају да напишемо једначине које описују задата померања на местима уклоњених веза.



Слика 2б. Трансформација носача

То увек можемо да урадимо на више начина, и на Сликама 2а и 2б приказане су две варијанте трансформације ослонаца. У првој варијанти носач смо претворили у изломљену конзолу, а у другој у изломљену греду.

Уз сваку варијанту морамо да напишемо и седам додатних једначина (допунских услова) везаних за померања.

Допунски услови описују шта се дешава са померањима на местима трансформације основног носача и у нашем примеру, у обе варијанте, гласе

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & za \quad i = 1,2,3,5,6,7 \\ \delta_{0i}, & za \quad i = 4 \end{cases} . \tag{1}$$

У општем случају, ако пишемо укупно k допунских једначина и ако су померања у p једначина једнака нули, применом Кастиљанове теореме можемо да формирамо тражени систем као

$$\delta_i = \frac{\partial A_d}{\partial S_i} = \begin{cases} 0, & za \quad i = 1,2,3,...,p \\ \delta_{0i}, & za \quad i = p+1, p+2,...,k \end{cases} . \tag{2}$$

Овде споменимо и **ПРИНЦИП МИНИМУМА ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЕНЕРГИЈЕ**. Нека су све сувишне непознате величине (укупно k) компоненте отпора непокретних ослонаца. Онда је

$$\delta_i = \frac{\partial A_d}{\partial S_i} = 0 \text{, за све } i = 1,2,...,k . \tag{3}$$

Подсетимо се из математике како се траже екстремне вредности функција; функција има екстремну вредност на месту где је њен први извод једнак нули. И зато можемо да закључимо следеће:

- ако су у конструкцији са линеарним понашањем померања која одговарају сувишним непознатим величинама једнака нули, онда сувишне непознате имају вредности за које је потенцијална енергија деформације минимална.

За конструкције са произвољним понашањем за одређивање померања користимо допунски рад, односно

$$\delta_i = \frac{\partial A^{*}{}_d}{\partial S_i} = 0 \text{, за све } i = 1,2,...,k , \tag{4}$$

па можемо да проширимо претходни став:

- ако су у конструкцији са произвољним понашањем која је у стабилној равнотежи померања која одговарају сувишним непознатим величинама једнака нули, онда сувишне непознате имају вредности за које је допунски рад минималан.

КАНОНСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ МЕТОДЕ СИЛА

Користећи Максвелове коефицијенте напишимо једначине (2) у развијеном облику. Пођимо од израза за померање тачке i

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} S_j + \Delta_i \,, \tag{5}$$

где су α_{ij} утицајни коефицијенти који представљају померања тачке i од непознатих јединичних оптерећења $\overline{S}_j = 1$, а Δ_i је померање тачке i у посматраном правцу од задатих оптерећења; коефицијент Δ_i називамо тежинским коефицијентом.

Сада систем једначина (2) можемо да прикажемо као

$$\delta_i = \frac{\partial A_d}{\partial S_i} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} S_j + \Delta_i = \delta_{0i} \begin{cases} 0, & za \quad i = 1,2,3,...,p \\ \delta_{0i}, & za \quad i = p+1, p+2,...,k \end{cases}, \tag{6}$$

или у развијеном облику

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11} S_1 + \alpha_{12} S_2 + \alpha_{13} S_3 + ... + \alpha_{1k} S_k + \Delta_1 = \delta_1(0)\,, \\
&\alpha_{21} S_1 + \alpha_{22} S_2 + \alpha_{23} S_3 + ... + \alpha_{2k} S_k + \Delta_2 = \delta_2(0)\,, \\
&... \\
&... \\
&\alpha_{k1} S_1 + \alpha_{k2} S_2 + \alpha_{k3} S_3 + ... + \alpha_{kk} S_k + \Delta_k = \delta_k(0)\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

Једначине представљене изразима (6) или (7), називају се **канонске једначине методе сила**.

Утицајни и тежински коефицијенти могу да се одреде применом Максвел-Морових интеграла, или једноставније, применом Верешћагиновог поступка. Да се подсетимо одговарајућих израза:

- примена Максвел-Морових интеграла

$$\Delta_i = \delta_i^q = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_m J_m} \int_{a_m}^{b_m} F^q{}_m(s) \overline{F}_{mi}(s) ds \,, \tag{8}$$

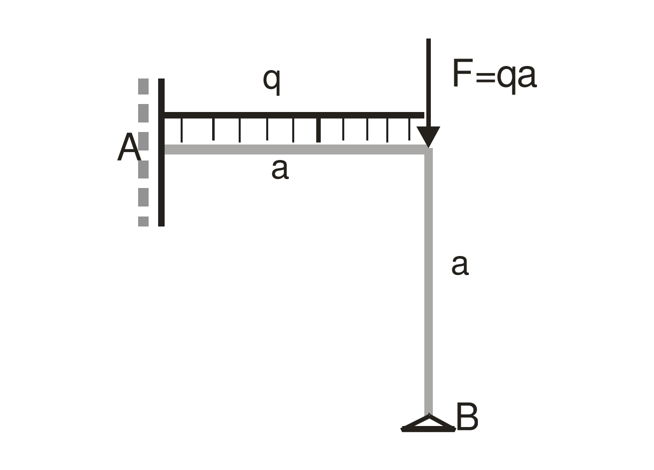
$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_m J_m} \int_{a_m}^{b_m} \overline{F}_{mj}(s) \overline{F}_{mi}(s) ds \,, \qquad i, j = 1,2,...,k \,.$$

- примена Верешћагиновог поступка

$$\Delta_i = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_m J_m} A_m^q \overline{\eta}_{im} \,, \tag{9}$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_m J_m} A_{jm} \overline{\eta}_{im} \,, \qquad i, j = 1,2,...,k \,.$$

Пример 1.



Слика 3. Статички неодређен рам

Задат је статички неодређен рам константне савојне крутости $EI = const.$, оптерећен концентрисаном силом $F = qa$ и континуалним оптерећењем q. Одредити реакције ослонаца A и B у функцији F, a.