

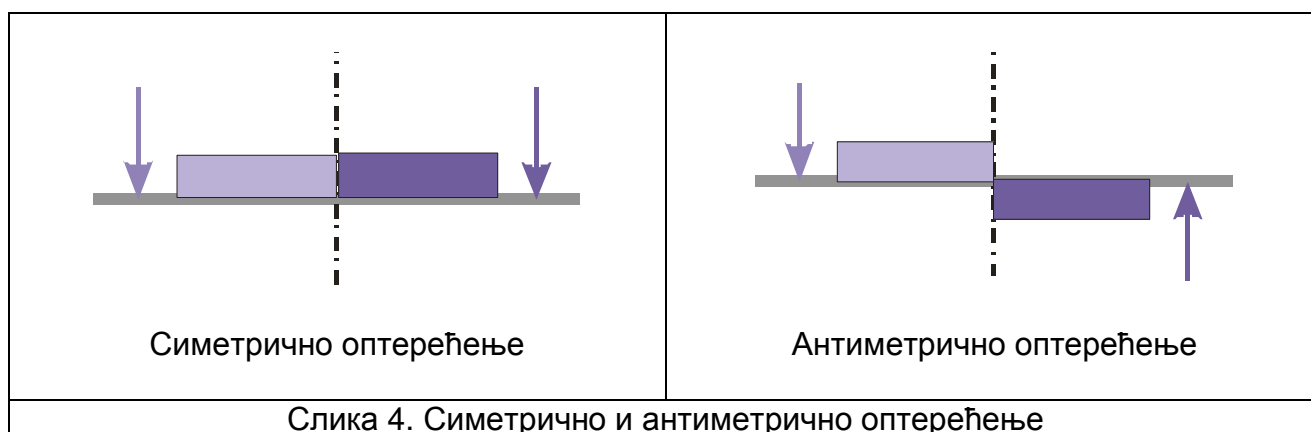
Симетричне конструкције

Појам симетрије и асиметрије (антисиметрије)

ОПТЕРЕЋЕЊЕ

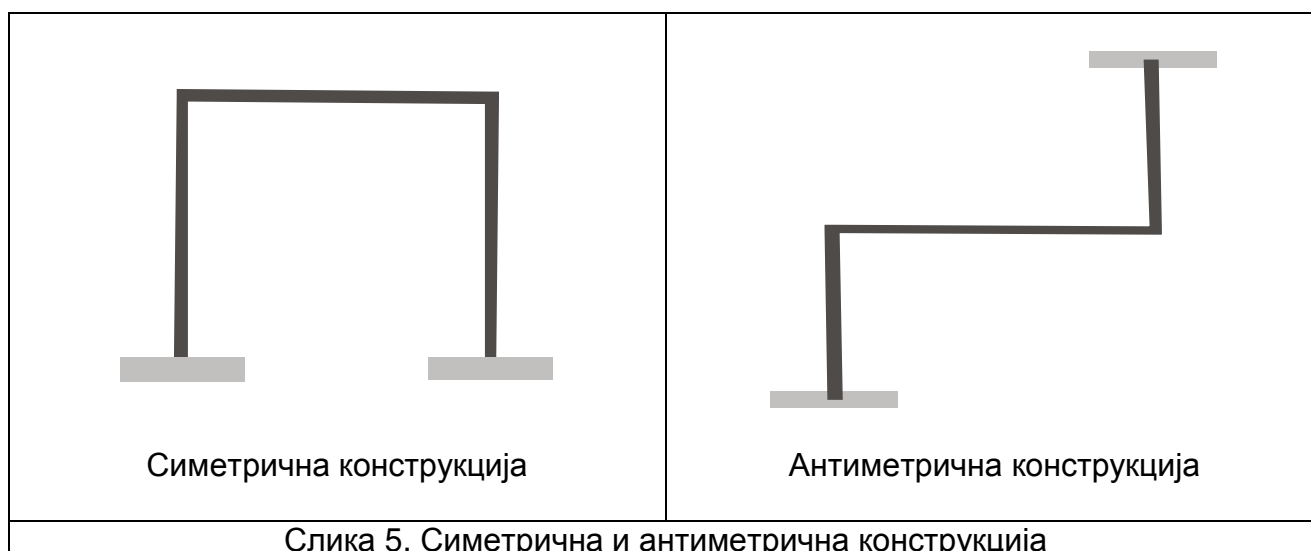
Појмове симетрично и асиметрично (може да се користи и термин антисиметрично) оптерећење најлакше ћемо да схватимо ако погледамо следећу слику:

- симетрично → на истом растојању од осе, истог интензитета, истог правца, истог смера,
- антисиметрично → на истом растојању од осе, истог интензитета, истог правца, различитог смера.



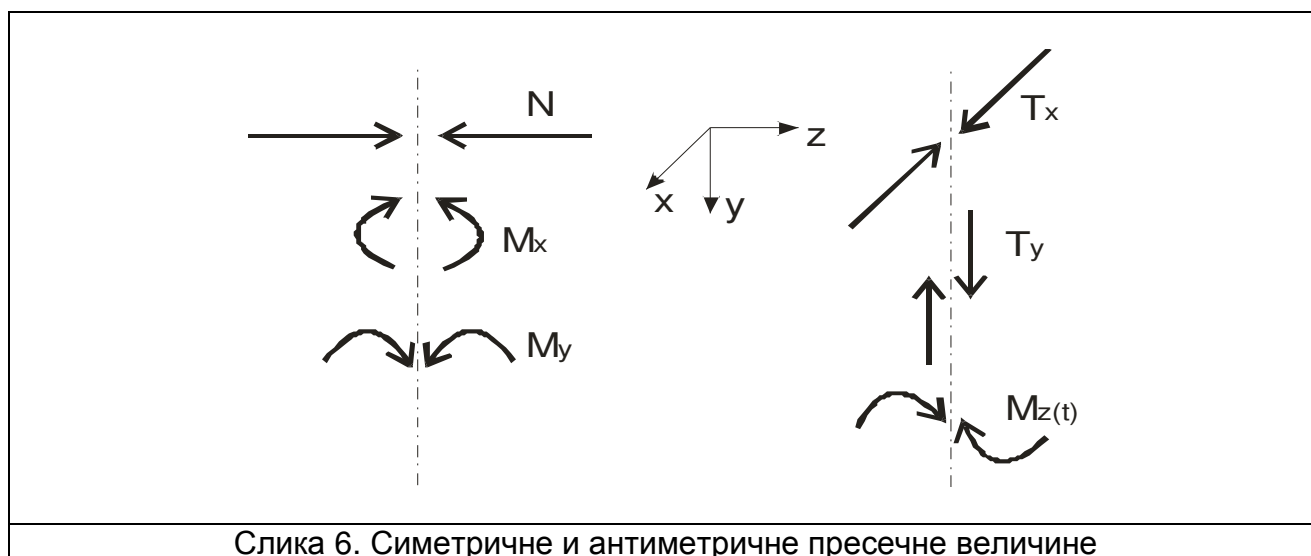
КОНСТРУКЦИЈА

При одређивању да ли је нека конструкција симетрична морамо бити јако пажљиви и добро размотрити постављене ослонаце. То се нарочито односи на непокретан ослонац, који у зависности од задатог оптерећења може да има исту функцију као и покретан ослонац (али не мора!).



Асиметричне конструкције у оквиру овог курса нећемо специјално разматрати.

ПРЕСЕЧНЕ ВЕЛИЧИНЕ

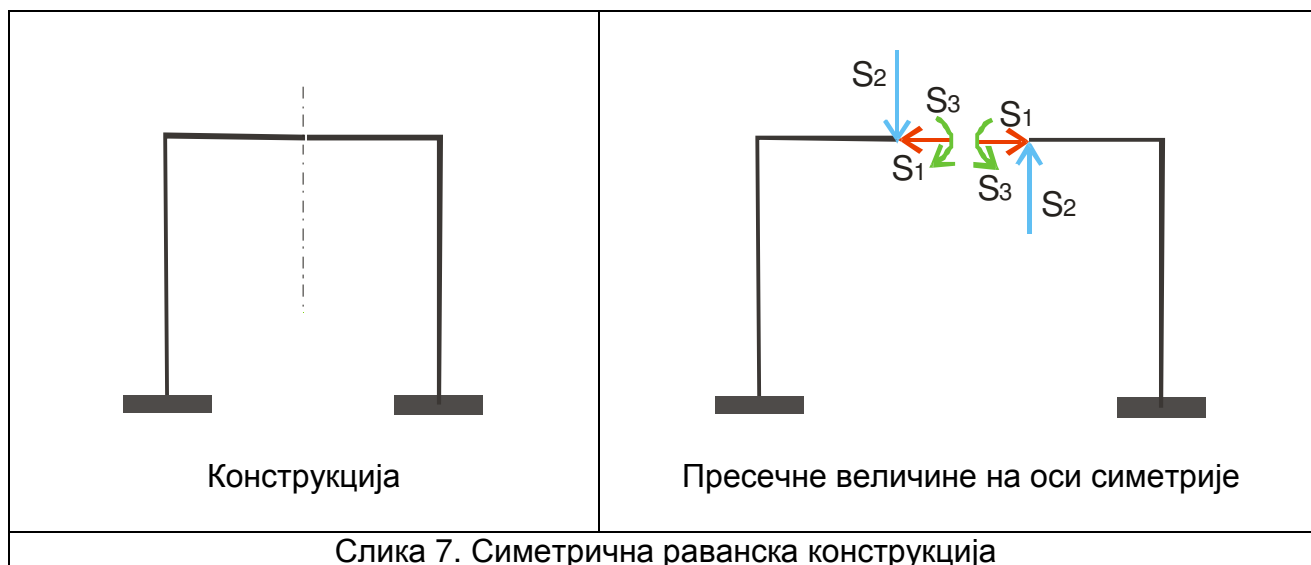


Од шест пресечних величина три су симетричне и три антиметричне:

- симетричне → подужна сила N , моменти савијања око главних оса M_x и M_y ;
- антиметричне → попречне силе T_x и T_y , момент увијања око подужне осе M_t .

Раванска симетрична конструкција

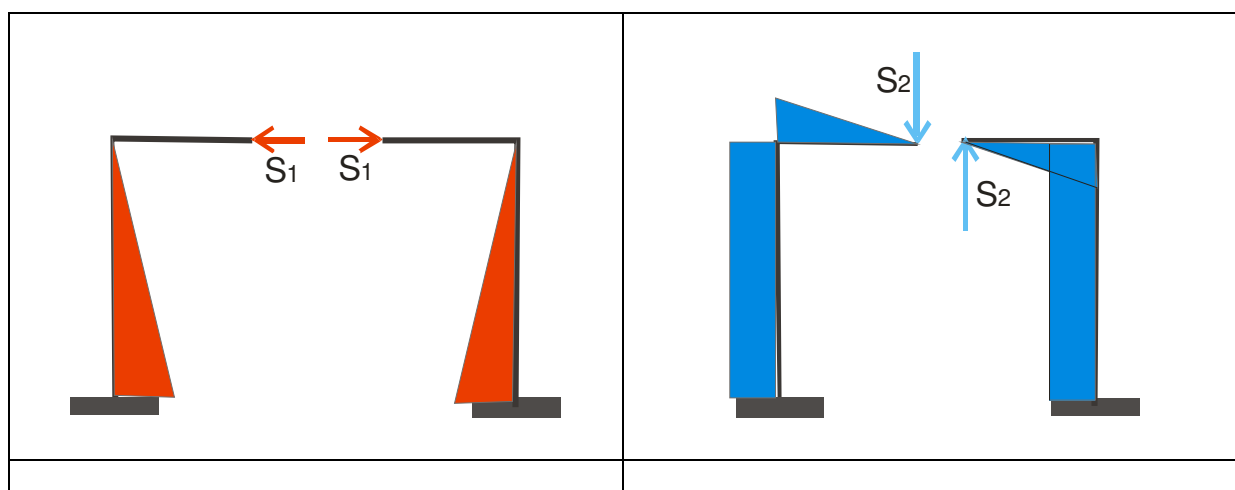
- Оптерећење делује само у равни конструкције



Размотримо симетричну конструкцију са слике 7 која од ослонаца има два уклештења. Конструкција је зато три пута статички неодређена и, на пример, може да се реши уклањањем једног ослонца. Али, ако је пресечемо по оси симетрије раставићемо је на два статички одређена дела, при чему се као непознате величине појављују пресечне величине: подужна сила S_1 , попречна сила S_2 и момент савијања S_3 . Канонске једначине тада гласе

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11}S_1 + \alpha_{12}S_2 + \alpha_{13}S_3 + \Delta_1 &= 0, \\
 \alpha_{21}S_1 + \alpha_{22}S_2 + \alpha_{23}S_3 + \Delta_2 &= 0, \\
 \alpha_{31}S_1 + \alpha_{32}S_2 + \alpha_{33}S_3 + \Delta_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Пошто су величине S_1 , S_2 и S_3 непознате, нацртајмо моментне дијаграме од одговарајућих јединичних оптерећења (Слика 8).





Како је *производ* симетричног и антисиметричног дијаграма једнак нули, Канонске једначине (10) добијају нешто простији облик

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11}S_1 + \alpha_{13}S_3 + \Delta_1 &= 0, \\
 \alpha_{22}S_2 + \Delta_2 &= 0, \\
 \alpha_{31}S_1 + \alpha_{33}S_3 + \Delta_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Уколико је на оваквом носачу задато **симетрично оптерећење**, моментни дијаграм само од тог оптерећења је такође симетричан, па је и коефицијент Δ_2 једнак нули, из чега закључујемо да је пресечна сила S_2 нула, и систем једначина (11) своди се на две једначине

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11}S_1 + \alpha_{13}S_3 + \Delta_1 &= 0, \\
 \alpha_{31}S_1 + \alpha_{33}S_3 + \Delta_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Ако је задато **спољашње оптерећење антисиметрично**, моментни дијаграм само од тог оптерећења је такође антисиметричан, па су коефицијенти Δ_1, Δ_3 једнаки нули. Зато на оси симетрије нема пресечних величина S_1 и S_3 и систем једначина (11) своди се само на једну једначину

$$\alpha_{22}S_2 + \Delta_2 = 0. \tag{13}$$

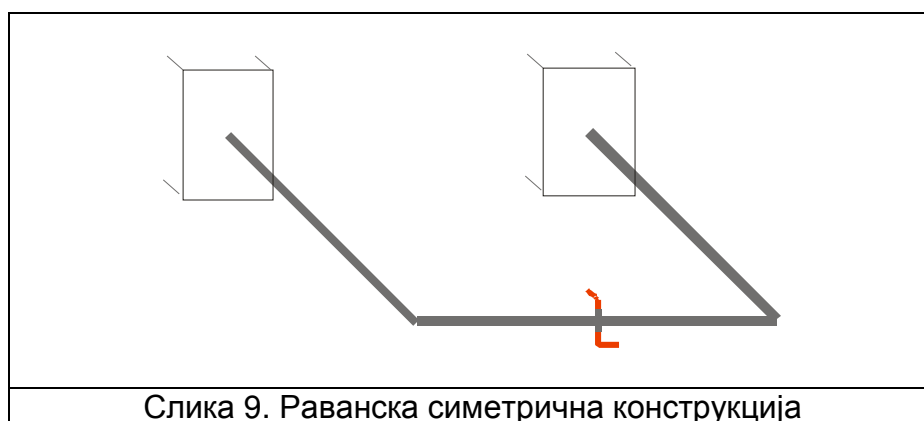
- Ако је симетрична конструкција симетрично оптерећена, на оси симетрије постоје само симетричне пресечне величине (подужна сила и момент савијања);
- Ако је симетрична конструкција антисиметрично оптерећена, на оси симетрије постоји само једна асиметрична пресечна величина (попречна сила).

- **Оптерећење конструкције је произвољно**

Сада размотримо раванску симетричну конструкцију са произвољним оптерећењем. На слици 9 приказана је конструкција из претходног поглавља, али је нацртана у изометрији да би могла да се прикажу и оптерећења која не делују у њеној равни.

Оптерећење увек можемо да поделимо на оно које делује у равни конструкције и на оно које делује управно на раван конструкције.

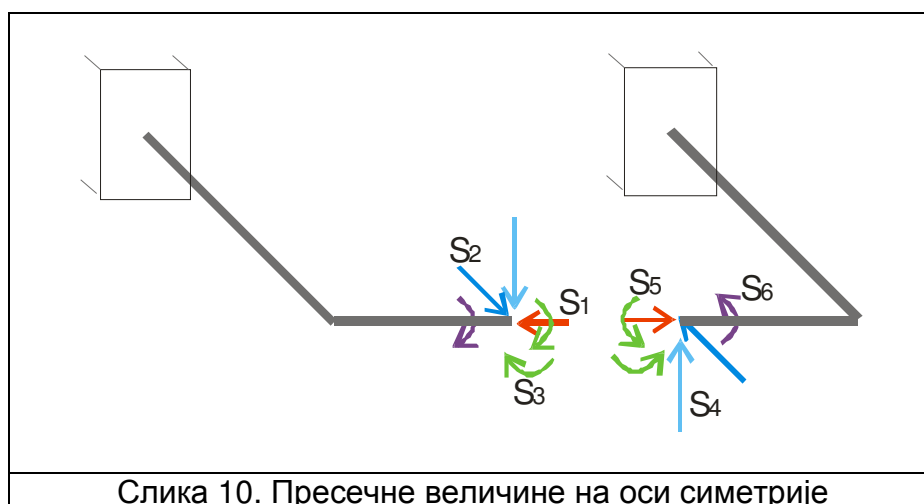
Приказани носач је 6 пута спољашње статички неодређен (12 непознатих реакција и 6 статичких једначина).



Слика 9. Раванска симетрична конструкција

Ако је конструкција симетрична најлакши начин решавања је пресецање по оси симетрије. На месту пресецања постоји шест непознатих пресечних величина које можемо да поделимо у две групе (Слика 10):

- Прву групу чине три величине које изазивају само моменте савијања у равни конструкције и то су две силе и један момент које смо као и у претходном поглављу обележили са S_1 , S_2 и S_3 ;
- Другу групу чине: сила која делује управно на раван носача и остала два момента који изазивају комбинацију савијања управно на раван носача и увијања; њих смо обележили са S_4 , S_5 и S_6 .



Слика 10. Пресечне величине на оси симетрије

Пошто је овај проблем просторног оптерећења шест пута статички неодређен, канонске једначине имају облик

$$\sum_{j=1}^6 \alpha_{ij} S_j + \Delta_i = 0, \quad \text{za } i = 1, 2, 3, \dots, 6. \quad (14)$$

Али, како су две наведене групе оптерећења независне, и систем једначина (14) дели се на два независна система и зато има много простији облик

$$\begin{aligned} \alpha_{11} S_1 + \alpha_{12} S_2 + \alpha_{13} S_3 + \Delta_1 &= 0 \\ \alpha_{21} S_1 + \alpha_{22} S_2 + \alpha_{23} S_3 + \Delta_2 &= 0 \\ \alpha_{31} S_1 + \alpha_{32} S_2 + \alpha_{33} S_3 + \Delta_3 &= 0 \end{aligned} \quad \otimes$$

$$\begin{aligned} \alpha_{44} S_4 + \alpha_{45} S_5 + \alpha_{46} S_6 + \Delta_4 &= 0 \\ \alpha_{54} S_4 + \alpha_{55} S_5 + \alpha_{56} S_6 + \Delta_5 &= 0 \\ \alpha_{64} S_4 + \alpha_{65} S_5 + \alpha_{66} S_6 + \Delta_6 &= 0 \end{aligned} \quad \cdot \quad (15)$$

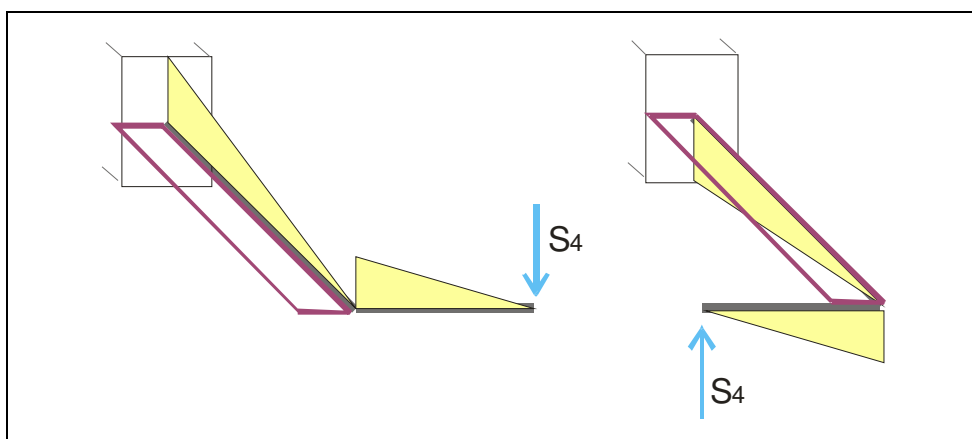
Први систем смо већ детаљно размотрили, па сада погледајмо само други систем једначина.

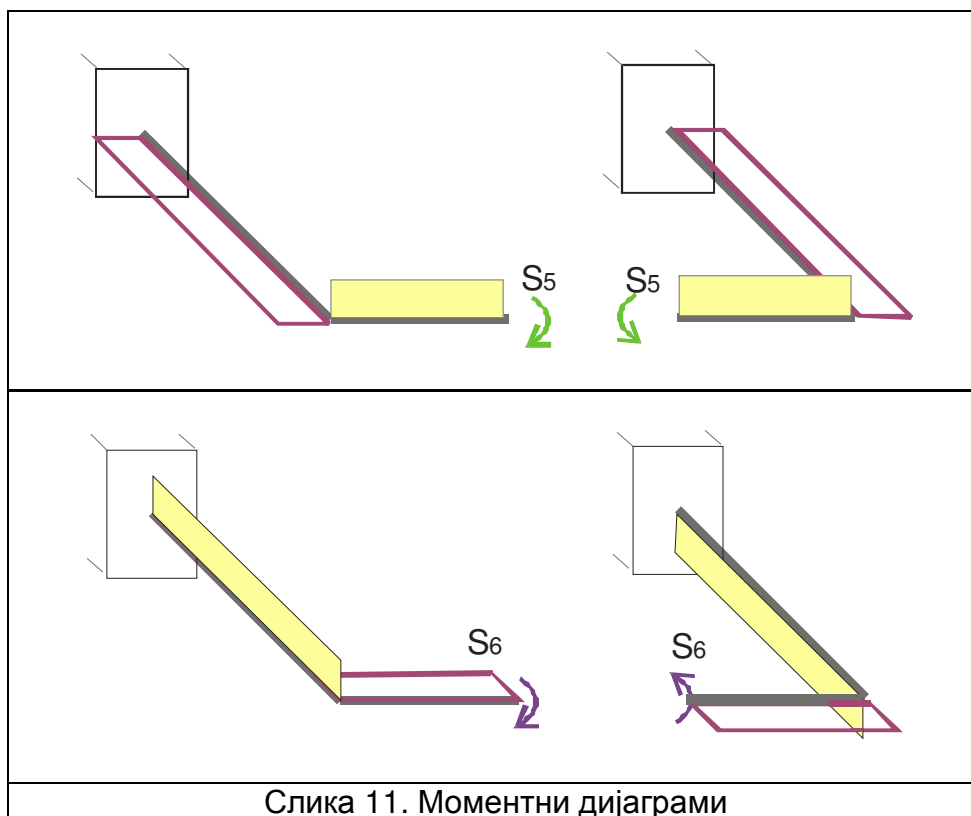
На слици 11 приказани су моментни дијаграми од силе S_4 и момената S_5 и S_6 . Момент савијања у равни управној на раван носача приказан је фигурама жуте боје, а момент увијања правоугаоницима уоквиреним љубичастом бојом.

Уочимо да су дијаграми од силе S_4 и момента S_6 антисиметрични, а дијаграм од момента S_5 је симетричан. Када урадимо анализу утицајних коефицијената (као у претходном поглављу, множење симетричних и антисиметричних дијаграма!) добићемо коначан систем једначина проблема у облику (16).

Ако је спољашње задато оптерећење:

- **симетрично** $\rightarrow \Delta_5 \neq 0, \Delta_4, \Delta_6 = 0 \Rightarrow S_5 \neq 0, S_4, S_6 = 0,$
- **антисиметрично** $\rightarrow \Delta_5 = 0, \Delta_4, \Delta_6 \neq 0 \Rightarrow S_5 = 0, S_4, S_6 \neq 0.$





Слика 11. Моментни дијаграми

Укупни систем једначина овог проблема гласи

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11}S_1 + \alpha_{13}S_3 + \Delta_1 &= 0 \\
 \alpha_{22}S_2 + \Delta_2 &= 0 & \otimes \\
 \alpha_{31}S_1 + \alpha_{33}S_3 + \Delta_3 &= 0 \\
 \alpha_{44}S_4 + \alpha_{46}S_6 + \Delta_4 &= 0 & \otimes \\
 \alpha_{55}S_5 + \Delta_5 &= 0 \\
 \alpha_{64}S_4 + \alpha_{66}S_6 + \Delta_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

ЗАПАМТИМО:

- Ако је симетрична конструкција симетрично оптерећена, на оси симетрије постоје само симетричне пресечне величине;
- Ако је симетрична конструкција асиметрично оптерећена, на оси симетрије постоје само асиметричне пресечне величине.