

АНАЛИЗА СТАЊА НАПОНА И ДЕФОРМАЦИЈА

У оквиру курса из Отпорности материјала бавили смо се анализом стања напона и деформација при напрезању у једном правцу (једноосно напрезање, линеарно стање напона), као и анализом стања деформација при равном стању напона. Овде ће се приказати укратко анализа стања напона за сложеније случајеве напрезања конструкција.

Подсетимо се да је стање напона у произвољној тачки конструкције скуп свих вредности напона за све равни у посматраној тачки.

Зависност деформације и напона описује Хуков закон. Посматрајмо изразе за деформације и напоне, који укључују и утицаје температуре:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T, \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \\ \sigma &= E(\varepsilon - \alpha \Delta T), \quad \tau = G\gamma\end{aligned}\tag{7.1}$$

Подсетимо се :

- Веза модула клизања и модула еластичности је: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.
- Поасонов коефицијент (ν) представља однос попречне и уздужне деформације: $\nu = -\varepsilon_p / \varepsilon_u$.
- Промена температуре мало утиче на промену Поасоновог коефицијента ν , а знатно утиче на промену модула еластичности E и температурског коефицијента α_t .

НАПРЕЗАЊЕ У ЈЕДНОМ ПРАВЦУ (једноосно напрезање - линеарно стање напона)

Ако би разматрали напрезање по x правцу, имали бисмо:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T,$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x + \alpha \Delta T = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T, \tag{7.2a}$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

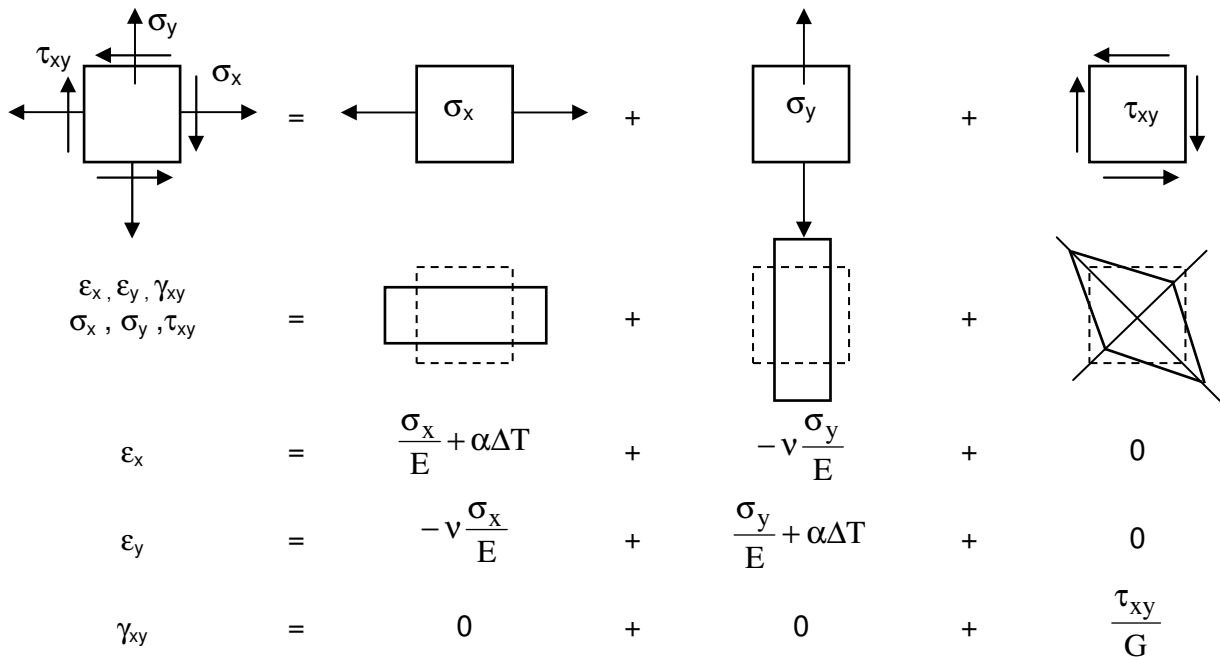
На основу израза за напоне у произвољном косом пресеку линијског носећег елемента, већ су изведени изрази за нормални напон и максимални напон смицања под углом од 45° :

$$\tau_{\max} = \tau(\varphi = 45^\circ) = \frac{\sigma_x}{2}, \quad \sigma(\varphi = 45^\circ) = \frac{\sigma_x}{2}. \tag{7.2b}$$

РАВНО СТАЊЕ НАПОНА

Посматрани елемент је сведен на случај елемента оптерећеног у својој равни на затезање или притисак, а дуж својих ивица на смицање. У случају да се може увести претпоставка о равномерној расподели напона по дебљини овако дефинисаног елемента, одговарајуће напонско стање називамо **равно стање напона**.

Дакле, равно стање напона може да се разложи на два напрезања у по једном правцу и на једно напрезање услед чистог смицања (слика 7.1).



Слика 7.1

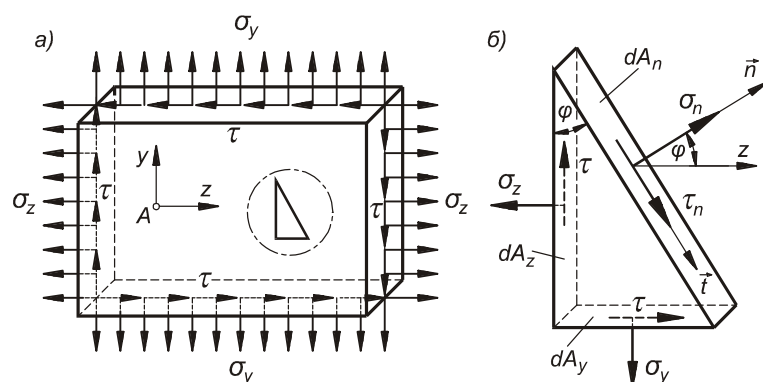
За деформације по одређеним правцима се добија:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \alpha \Delta T = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \alpha \Delta T, \\
 \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \alpha \Delta T, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}.
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Ако се из једначина (7.3) потраже **решења по напонима**, добија се:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) - \frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu}, \\
 \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) - \frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu}, \\
 \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}.
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

На основу даље анализе напона при равном стању напона, аналогне анализи напона у косом пресеку подужно напрегнутног елемента са којом смо се већ срели, налажење напона $\sigma_n(\varphi)$ и $\tau_n(\varphi)$ у неком косом пресеку елемента приказаног на слици 7.2,



Слика 7.2 Равно стање напона у плочастом елементу мале дебљине

обавља се применом услова равнотеже по правцима нормале и тангенте на површину овог косог пресека. Одатле се добијају изрази за напоне у косом пресеку при равном стању напона:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \\ \tau_n &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi.\end{aligned}\quad (7.5 \text{ a})$$

Анализом израза (7.5 a), а корацима који су потпуно аналогни анализи момената инерције попречног пресека при ротацији координатног система (извођење главних момената инерције I_1 и I_2), лако се долази до израза за **величине главних напона и њихове правце**:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad \tau_{12} = 0 \quad (7.5)$$

Равни у којима ови напони делују називају се **главне равни**.

Највећа вредност напона смицања појављује се у равнима заокренутим за угао 45° у односу на равни главних напона и износи

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (7.6)$$

За **случај напрезања у само два правца** (и то правца главних напона, при чему је $\gamma_{xy}=0$) наведени изрази 7.3 и 7.4 постају:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) + \alpha\Delta T, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) + \alpha\Delta T, \quad \gamma_{12} = 0, \\ \sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) - \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}, \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) - \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}, \quad \tau_{12} = 0\end{aligned}\quad (7.7)$$

Један пример ове врсте напрезања представља цилиндрична посуда танких зидова оптерећена унутрашњим притиском. При томе, главни напони у попречном пресеку у циркуларном правцу и у подужном правцу износе:

$$\sigma_1 = pR/t \quad \text{и} \quad \sigma_2 = pR/2t ,$$

где су: p - унутрашњи притисак, R - радиус цилиндра посуде и t - дебљина танког зида посуде.

ПРОСТОРНО СТАЊЕ НАПОНА

Просторно стање напона има за компоненте деформације и напона следеће величине:

$$\begin{aligned} \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \\ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Аналогно претходној анализи, изрази за **деформације** се јављају у облику:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z) + \alpha \Delta T , \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x - \nu \sigma_z) + \alpha \Delta T , \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \alpha \Delta T = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y) + \alpha \Delta T , \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} , \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} , \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} , \end{aligned} \quad (7.9)$$

а **решења** ових једначина **по напонима** су:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z) \right] - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} , \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_x + \epsilon_z) \right] - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} , \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y) \right] - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} , \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} , \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} , \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} . \end{aligned} \quad (7.10)$$

Детаљнија анализа просторног стања напона овде се неће вршити. Корацима који су нам познати из претходних разматрања и овде се добијају изрази за **главне деформације** и **главне напоне** при **просторном стању напона**, тачније, **при напрезању у три правца** главних напона (троосно напрезање):

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2 - \nu \sigma_3) , \quad \epsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_3) , \quad \epsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_2) , \quad \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 \\ \sigma_1 &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(1-\nu)\epsilon_1 + \nu(\epsilon_2 + \epsilon_3) \right] , \quad \sigma_2 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(1-\nu)\epsilon_2 + \nu(\epsilon_1 + \epsilon_3) \right] , \\ \sigma_3 &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(1-\nu)\epsilon_3 + \nu(\epsilon_1 + \epsilon_2) \right] , \quad \tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0 . \end{aligned} \quad (7.11)$$

ЗАПРЕМИНСКА ДИЛАТАЦИЈА

Подсетимо се израза за запреминску (кубну) дилатацију:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\nu) \cdot \varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad (7.12)$$

који ће сада, у случају праваца главних дилатација, за **запреминску (кубну) дилатацију** дати:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (7.13)$$

СПЕЦИФИЧНИ ДЕФОРМАЦИЈСКИ РАД ПРОМЕНЕ ЗАПРЕМИНЕ И ОБЛИКА

Специфични деформацијски рад просторног стања напона гласи:

$$A_d' = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}).$$

За правце главних напона (на којима су напони смицања једнаки нули) имамо:

$$A_d' = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)] = A_d'^V + A_d'^O. \quad (7.14)$$

Односно, укупни специфични деформацијски рад се може приказати као збир два његова дела: једног који изазива промену запремине и другог који изазива промену облика. Ако се уведе такозвани **средњи напон**, који је у овом случају једнак

$$\sigma_s = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (7.14a)$$

специфични деформацијски рад промене запремине се може приказати (на основу средњег напона и запреминске (кубне) деформације као:

$$A_d'^V = \frac{1}{2} \sigma_s \varepsilon_v = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{E}{6(1 - 2\nu)} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2. \quad (7.15)$$

Специфични деформацијски рад промене облика сада можемо изразити као

$$\begin{aligned} A_d'^O &= A_d' - A_d'^V = \frac{1 + \nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3) = \\ &= \frac{1 + \nu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Код равног стања напона имамо $\sigma_z = 0$ и $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, а код једноосног стања напона имамо $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = \tau$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, па би се имајући то у виду, горњи изрази у наведеним случајевима могли значајно поједноставити.

У следећим корацима бавићемо се разматрањем хипотеза о сломену материјала, а у једном од тих разматрања ће нам бити од значаја и управо приказани изрази.

ХИПОТЕЗЕ О СЛОМУ

У оквиру досадашњих разматрања основних напрезања са којима смо се бавили у Отпорности материјала, у напонској анализи било је једноставно извести кораке везане за проверу чврстоће неког конструктивног елемента. Разлог је био једноставан: увек бисмо разматрали само појединачни утицај неког од основних напрезања (нпр. само подужно напрезање, само увијање или само савијање), а потом бисмо максималну вредност прорачунатог напона лако упоређивали са вредностима дозвољеног напона за материјал од којег је конструктивни елемент направљен.

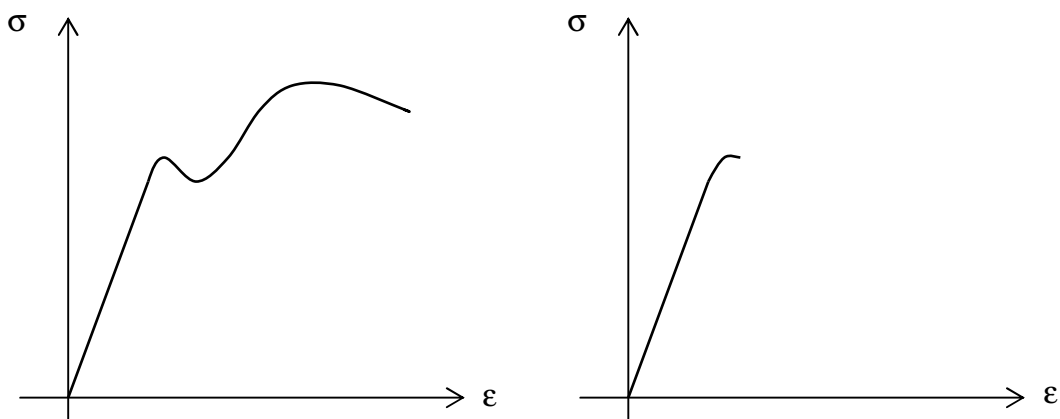
У пракси, конструкције и њихови елементи су сложено оптерећени, па у напонској анализи није једноставно извршити проверу чврстоће. Наиме, постављало се питање: који напон од свих постојећих нормалних и смичућих компоненти треба узети у обзир као меродавну величину за упоређивање са вредношћу дозвољеног напона. У овом светлу треба разумети и хипотезе о којима ће у наставку бити речи.

Термини који се користе у литератури су: Хипотезе о сломи, Теорија слома, Теорија чврстоће, Критеријуми чврстоће, Критеријуми пластичности и лома.

Основни задаци које решавамо при анализи отпорности конструктивних елемената су провере (процене, докази) напона (провере чврстоће), деформација (провере крутости) и стабилности.

Најједноставнији проблем је прорачун подужно напрегнутих конструктивних елемената. Довољно је упоредити напон у елементу у подужном правцу са граничном вредношћу напона у узорку (стандардна епрувета) који је на истоветни начин оптерећен као и оригинални елемент.

Материјал од кога је направљен неки конструктивни елемент можемо класификовати и у следеће две групе и то: жилав и крт материјал (слика 8.1).



Слика 8.1 Жилав и крт материјала

Може да се закључи да је овде **генерални проблем дефинисање појма и вредности граничних величина напона и деформација, које се не смеју прекорачити.**

Уколико је гранична вредност затезна чврстоћа, граница течења, или дозвољени напон, вредност која се не сме прекорачити, поставићемо следеће критеријуме (критеријум лома, пластичности или дозвољеног напона):

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_M(R_m), \quad \sigma_{\max} \leq \sigma_T(R_{eH}), \quad \sigma_{\max} \leq \sigma_d = \frac{\sigma_T}{n_T} \quad . \quad (8.1)$$

Уколико материјал нема исте граничне вредности на затезање и притисак, критеријум дозвољеног напона гласи:

$$-\sigma_{dp} \leq \sigma_{max} \leq \sigma_{dz} \quad .$$

Граничну вредност дозвољене деформације за подручје испод границе пропорционалности, можемо израчунати применом Хуковог закона и дозвољеног напона:

$$\varepsilon_d = \sigma_d / E \quad .$$

Граничну вредности напона смицања (израз 7.2 б) можемо одредити као

$$\tau_d = \sigma_d / 2$$

и она се користи када у елементу постоје само смичући напони.

Проблем дефинисања појма и вредности граничних величина које се не смеју прекорачити, постаје већи у случају сложеног напонског стања (равно и просторно напонско стање) којем је конструктивни елемент изложен.

При дводимензионом стању напона гранично стање мора бити дефинисано граничном кривом, док код просторног стања напона оно мора бити дефинисано просторном површи. При томе, основну потешкоћу представља примена материјала који нема исте граничне вредности за затезање и притисак, јер се тада морају проверити оба напрезања. За челик на пример, можемо усвојити да су граничне вредности за затезање и притисак исте, па се тада проверава само максимална апсолутна вредност напона.

Поједностављење поступка провере напона (генерално видљиво у свим хипотезама) **везано је за одређивање неког еквивалентног напона (упоредног, ефективног напона) - σ_e , којим би било потребно и довољно једноосно напрегнути посматрани елемент, а да то у потпуности замени постојеће сложено напонско стање. Тако добијени еквивалентни напон се потом пореди са граничном вредношћу напона подужно (једноосно) напрегнуте стандардне епрувете.**

То значи, да је потребно поставити неку хипотезу која би на задовољавајући начин могла да објасни попуштање материјала конструкције при њеном сложену напрезању.

Хипотеза о сломену материјала има више, неке дају добре резултате за жилаве, а неке за крте материјале.

Две основне категорије хипотеза су:

- **класичне хипотезе**
- **модерне хипотезе.**

ХИПОТЕЗА НАЈВЕЋЕГ НОРМАЛНОГ НАПОНА (1. хипотеза)

Сматра се да су аутори ове хипотезе Галилеј и Лајбниц. Она гласи:

До попуштања конструкције долази онда када највећи нормални (главни) напон достигне граничну вредност напона σ_d у једноосно напрегнутом узорку.

При равном стању напона (постоје нормални и смичући напони) и при линеарном стању напона, одговарајући изрази (на онову 7.5) за **еквивалентне напоне** су:

$$\sigma_e = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq \sigma_d \quad , \quad \sigma_e = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_d \quad (8.2)$$

Ова хипотеза даје задовољавајуће резултате за **веома крте материјале** (челик за инструменте, сиви лив, керамика, стакло, камен и др.)

ХИПОТЕЗА НАЈВЕЋЕ ЛИНИЈСКЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ (2. хипотеза)

Основе ове хипотезе приписују се Мариоту, а касније су је разрадили Сен-Венан, Понсле и Грасхоф.

Критеријум хипотезе је стање деформације и он гласи:

до попуштања конструкције долази онда када највећа линијска деформација достигне граничну вредност $\epsilon_d = \sigma_d / E$ у једноосно напрегнутом узорку.

Узмимо у разматрање једну главну деформацију (по основу релација 7.11). Поредећи је са граничном вредношћу имаћемо:

$$-\frac{\sigma_d}{E} \leq \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3) \leq \frac{\sigma_d}{E},$$

Односно, сређивањем ,

$$-\sigma_d \leq \sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3 \leq \sigma_d, \quad -\sigma_d \leq \sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3 \leq \sigma_d, \quad -\sigma_d \leq \sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2 \leq \sigma_d.$$

За равно стање напона имамо:

$$-\sigma_d \leq \sigma_1 - \nu\sigma_2 \leq \sigma_d, \quad -\sigma_d \leq \sigma_2 - \nu\sigma_1 \leq \sigma_d, \quad -\sigma_d \leq -\nu\sigma_1 - \nu\sigma_2 \leq \sigma_d$$

Применом релације 7.5, **еквивалентни напон равног и линијског стања напона постаје:**

$$\sigma_e = \frac{1-\nu}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1+\nu}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq \sigma_d, \quad \sigma_e = \frac{1-\nu}{2}\sigma \pm \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_d \quad (8.3)$$

Експериментална провера ове хипотезе даје задовољавајуће резултате **за крпе материјале** (легирани сиви лив, челик велике затезне чврстоће и др.). Хипотеза се не корисити у случајевима када не важи Хуков закон.

ХИПОТЕЗА НАЈВЕЋИХ НАПОНА СМИЦАЊА (3. хипотеза)

Хипотезу су поставили Кулон и Треска. Хипотеза највећих напона смицања гласи:

До попуштања материјала долази када највећа вредност напона смицања достигне граничну вредност напона смицања $\tau_d = \sigma_d / 2$ код једноосно напрегнутог узорка.

Узмимо у разматрање један главни напон смицања по основу релације 7.11. Поредећи га са граничном вредношћу имаћемо:

$$-\frac{\sigma_d}{2} \leq \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \leq \frac{\sigma_d}{2},$$

Односно, после сређивања, за све главне напоне смицања имаћемо:

$$-\sigma_d \leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_d, \quad -\sigma_d \leq \sigma_2 - \sigma_3 \leq \sigma_d, \quad -\sigma_d \leq \sigma_3 - \sigma_1 \leq \sigma_d.$$

Применом релације 7.5 **еквивалентни напон равног и линијског стања напона гласи:**

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq \sigma_d, \quad \sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_d \quad (8.4)$$

Хипотеза се ефикасно користи за челике (са израженом границом течења) напрегнуте на затезање, савијање или увијање, и за крпе материјале изложене притиску.

МОРОВА ХИПОТЕЗА (4. хипотеза)

Аутор хипотезе је Мор. Основа хипотезе је примена односа граничне вредности дозвољеног напона затезања и притиска: $\beta = \sigma_{dz} / \sigma_{dp}$.

Овде се само даје израз за **еквивалентни напон за случај равног и линеарног стања напона** :

$$\sigma_e = \frac{1-\beta}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1+\beta}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq \sigma_d, \quad \sigma_e = \frac{1-\beta}{2}\sigma \pm \frac{1+\beta}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_d \quad (8.5).$$

Применљива је за крте материјале који су знатно отпорнији на притисак него на затезање.

ХИПОТЕЗА НАЈВЕЋЕГ ДЕФОРМАЦИЈСКОГ РАДА (5. хипотеза)

Ова хипотеза се у овом курсу неће обрађивати.

ХИПОТЕЗА НАЈВЕЋЕГ СПЕЦИФИЧНОГ ДЕФОРМАЦИЈСКОГ РАДА ПРОМЕНЕ ОБЛИКА (6. хипотеза)

Ова хипотеза се по ауторима назива Хубер-Вон Мизес-Хенки хипотеза, а гласи:
попуштање материјала настаје онда када специфични деформацијски рад промене облика достигне граничну вредност тог рада ($A_{dd}' = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_d$) **у једноосном напругнутом узорку.**

Изједначавањем изрази 7.16 са граничном вредношћу специфичног деформацијског рада промене облика **еквивалентни напон просторног, равног и линијског стања напона гласи:**

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_d, \\ \sigma_e &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_d, \quad \sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_d \end{aligned} \quad (8.5)$$

Хипотеза се веома добро слаже са експерименталним резултатима за живе материјале (челици за ваљање и ковање, челични лив, алуминијум, бакар, бронза и др.).

ПРОШИРЕНА ХУБЕР-ВОН МИЗЕС-ХЕНКИ ХИПОТЕЗА (6 а. хипотеза)

Претходна хипотеза важи за једнаке вредности граничних напона при затезању и притиску. Проширење за неједнаке граничне вредности напона извео је Бужињски. Однос граничне вредности дозвољеног напона на затезање и притисак обележен је са $\beta = \sigma_{dz} / \sigma_{dp}$.

Завршни изрази ове хипотезе за **еквивалентни напон у случају равног и линеарног стања напона** гласе:

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \frac{1-\beta}{2\beta}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1+\beta}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_d, \\ \sigma_e &= \frac{1-\beta}{2\beta}\sigma + \frac{1+\beta}{2} \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_d. \end{aligned} \quad (8.5)$$