

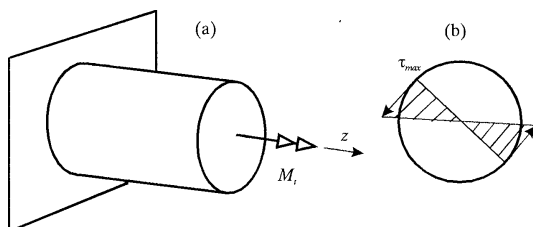
УВИЈАЊЕ ШТАПОВА (ГРЕДА) ПРОИЗВОЉНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА

У оквиру предмета Отпорност материјала детаљно је било обрађено поглавље о увијању штапова кружног попречног пресека (Сл. 10.1).

Том приликом је једна од основних претпоставки била везана за **кружне попречне пресеке** који при увијању остају равни и само се заокрећу око подужне осе. То значи да су, при увијању, помераји тачака кружних попречних пресека у подужном правцу једнаки нули.

У поглављу које следи ова разматрања ћемо проширити на попречне пресеке произвољних облика.

Увијање штапа (греде) кружног попречног пресека



Слика 10.1. Увијање штапа кружног попречног пресека

Овом приликом ћемо се само подсетити основних образаца који дефинишу величину и положај највећих напона смицања, као и величина релативних и апсолутних углова увијања кружног попречног пресека, који настају при увијању штапа (греде) моментом $M_t(z)$:

- Претпоставка о напонима:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} \neq 0, \tau_{zy} \neq 0, \sigma_z = 0, \\ \tau_{max}(z) = \frac{M_t(z)}{I_o(z)} \rho_{max} = \frac{M_t(z)}{W_o(z)} \quad (10.1) \\ M_t(z) = G I_o \theta'(z) \end{aligned}$$

- Угао заокретања:

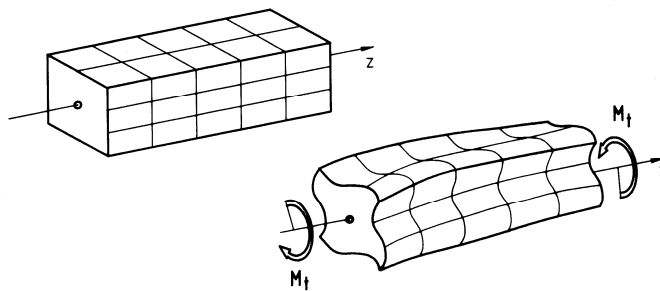
$$\begin{aligned} \theta'(z) = \frac{d\theta(z)}{dz} = \frac{M_t(z)}{G I_o(z)} \quad (10.2) \\ \theta(z) = \int_0^z \theta'(z) dz \end{aligned}$$

Где су: τ - напон смицања, θ' - релативни, а θ - апсолутни угао заокретања попречног пресека, G - модул клизања, I_o - поларни момент инерције, W_o - поларни отпорни момент попречног пресека.

Напони смицања и угао увијања произвољног попречног пресека

Напоменимо да ниједан попречни пресек који није кружни неће при увијању остати раван, већ ће доћи до његовог витоперења – кривљења, што значи да ће се тачке на попречним пресецима померити у подужном правцу. Другим речима речено, помераји тачака на попречним пресецима у подужном правцу неће бити једнаки нули, односно, подужни помераји тачака ничим неће бити ометани нигде дуж штапа, па ни на његовим крајевима.

Да бисмо мало појаснили појаву витоперења попречног пресека, посматрајмо штап правоугаоног попречног пресека који је оптерећен моментима увијања M_t (Сл. 10.2). Нанесимо по странама штапа правоугаону мрежу. У овом случају ће деформисани облик мреже указати на појаву кривљења (витоперења) попречних пресека у правцу осе штапа. То значи да ће се тачке попречног пресека штапа које су се пре деформације налазиле у једној равни различито померати у правцу осе штапа, чинећи једну криву (извитоперену) површину.



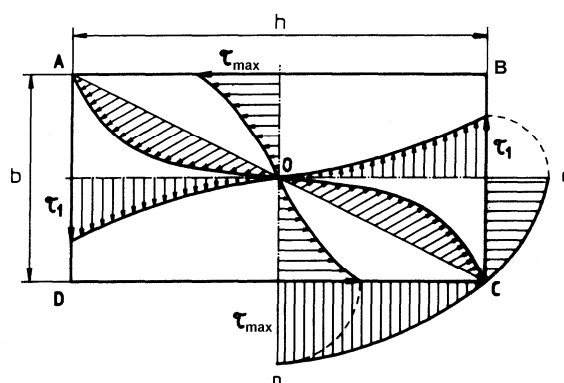
Слика 10.2 Увијање призматичних штапова

Одговор на питање: "Како доћи до података за напон и деформацију било које тачке овако напрегнутог штапа?", због своје сложености не може дати Отпорност материјала, већ се решења добијају помоћу знатно компликованијег математичког апарата Теорије еластичности.

Распоред напона смицања за правоугаоник приказан је детаљније на Сл. 10.2а.

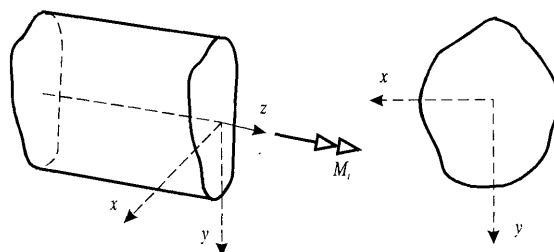
Користећи став о коњугованости напона смицања могу се извести веома корисни закључци о распореду напона смицања на контури попречног пресека.

За разлику од штапова кружног попречног пресека, код којих су напони смицања имали правац тангенте на контуру, код призматичних штапова то у општем случају не мора бити тачно.



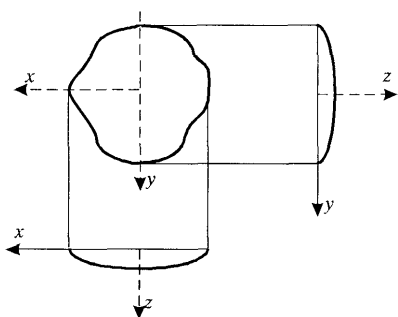
Слика 10.2 а Распоред напона смицања код правоугаоног попречног пресека

Уочимо сада штап произвољног попречног пресека (Сл. 10.3) који је оптерећен моментом увијања M_t .

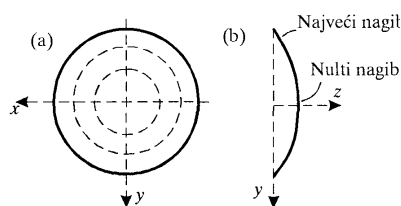


Слика 10.3 Увијање штапа произвољног попречног пресека

Велику помоћ при одређивању области високих вредности напона смицања при увијању штапа произвољног попречног пресека пружа такозвана **мембранска аналогија**, на коју је указао Прантл и на коју ћемо се у даљем излагању ослонити без детаљног разматрања (Сл. 10.4).



Слика 10.4 Мембранска аналогија



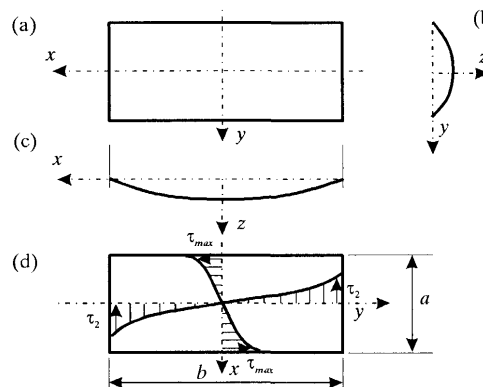
Слика 10.5 Примена мембранске аналогије на кружни попречни пресек

Претпоставимо да је танка мембрана (Сл. 10.4) ослоњена дуж произвољне контуре и оптерећена равномерно расподељеним попречним оптерећењем $q = \text{const.}$ Применимо мембранску аналогију на кружни попречни пресек (Сл. 10.5) и замислимо одговарајућу мембрану. На слици 10.5а приказане су изохипсе, а на слици 10.5б видимо да су код круга пројекције мембране у свим равнинама исте за разлику од произвољног попречног пресека. Највећи нагиби су једнаки по целој контури, док су у центру једнаки нули, што се у потпуности поклапа са распоредом напона смицања (Сл. 10.16).

Може се рећи да нагиб мембране у произвољној тачки у неком правцу представља меру напона смицања у попречном пресеку штапа у истој тачки, при чему је напон смицања управан на правац нагиба нормале. То значи да ће највећи напон смицања бити на месту највећег нагиба мембране, а тамо где је нагиб мембране једнак нули, и одговарајући напон смицања је једнак нули.

Увијање штапа правоугаоног попречног пресека

За штап (греду) правоугаоног попречног пресека произвољних димензија, за који је $b / a \geq 1$, мембрана ће, на основу претходно реченог имати изглед приказан на слици 10.6.



Слика 10.6 Увијање штапа правоугаоног попречног пресека

Може се уочити да су највећи нагиби на крајевима краће стране (Сл. 10.6б). На крајевима дуге стране нагиби су нешто мањи (Сл. 10.6в), док су у тежишту и у x и у y правцу једнаки нули. На основу тога произилази да је највећи напон смицања на месту највећег нагиба за $x = \pm a/2$, $y = 0$.

$$\tau_{max} = \tau_{zy} \left(x = \pm \frac{a}{2}, y = 0 \right) \quad (10.3)$$

Аналогно изразима који важе за кружни попречни пресек, написаћемо изразе за највећи напон, момент увијања, релативни и апсолутни угао увијања за произвољни попречни пресек у облику

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (10.4)$$

$$M_t = G I_t \theta' \quad (10.5)$$

$$\theta' = \frac{M_t}{G I_t} \quad (10.6)$$

$$\theta = \int \theta' dz \quad (10.7)$$

Овде су уведене ознаке аналогне ознакама које смо користили при анализи кружних попречних пресека:

- I_t - **увојни** (торзиони) **момент инерције** (Сен Венанова увојна константа),
- W_t - **увојни** (торзиони) **отпорни момент**, а
- τ_{max} - највећа вредност напона смицања у пресеку (увек на крају краће стране). Распоред напона смицања по пресеку приказан је на слици 10.6д.

Величине W_t и I_t се могу написати у облику

$$W_t = \alpha b a^2, \quad (10.8)$$

$$I_t = \beta b a^3, \quad (10.9)$$

а највећи напон на крају дуге стране у облику

$$\tau_2 = \gamma \tau_{max}. \quad (10.10)$$

Коефицијенти α , β и γ зависе од односа страница правоугаоног попречног пресека и дати су у Табели 10.1.

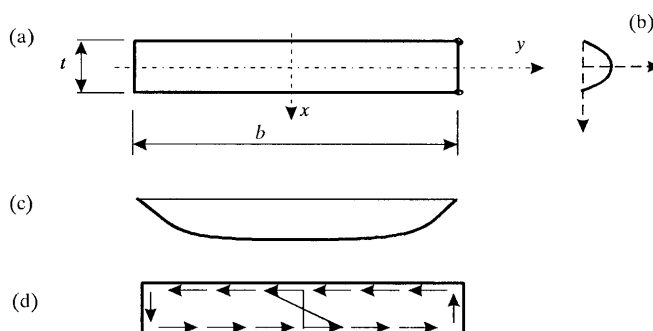
Табела 10.1 Увијање правоугаоног попречног пресека

b/a	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3
α	0,208	0,221	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267
β	0,141	0,172	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263
γ	1,0	0,910	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753
b/a	4	5	6	8	10	> 10	
α	0,282	0,291	0,299	0,307	0,313	0,333	
β	0,281	0,291	0,299	0,307	0,313	0,333	
γ	0,745	0,744	0,743	0,742	0,742	0,742	

Увијање штапа попречног пресека облика танког правоугаоника

Из Табеле 10.1 се види да за однос $b / a > 10$ величине W_t и I_t постају константне. На основу тога се може дефинисати појам **танког правоугаоника** чију дебљину обележавамо са t . Правоугаоник ћемо сматрати танким (Сл. 10.7а) ако је задовољен однос његових страница

$$t / b < 1 / 10 \text{ односно } b / t > 10$$



Слика 10.7 Танки правоугаоник

Применом мембранске аналогије (аналитичким поступком који се овом приликом прескаче), за танки правоугаоник се добијају изрази за

- **увојни момент инерције** $I_t = \frac{1}{3} b t^3$, (10.11)

- **увојни отпорни момент** попречног пресека $W_t = \frac{1}{3} b t^2 = \frac{I_t}{t}$. (10.12)

Добијене вредности "1/3" у изразима (10.11) и (10.12) одговарају вредностима коефицијената α и β у изразима (10.8) и (10.9) за правоугаонике чији је однос страна $b / a > 10$ (Табела 10.1).

Применом израза (10.6) добија се вредност угла увијања

$$\theta' = 3 \frac{M_t}{G b t^3} = \frac{M_t}{G I_t} , \quad (10.13)$$

а највећи напон смицања је тада

$$\tau_{zy \max} = \tau_{zy} \left(x = \pm \frac{t}{2} \right) = \pm 3 \frac{M_t}{b t^2} = \frac{M_t}{W_t} . \quad (10.14)$$

Увијање штапа сложеног попречног пресека

Ако је штап произвољног сложеног отвореног попречног пресека, који је састављен из више делова, изложен увијању моментом M_t , онда се може рећи да сваки од тих делова носи одређени део укупног момента увијања,

$$M_t = M_{t1} + M_{t2} + \dots + M_{ti} + \dots + M_{tn} = \sum M_{ti} . \quad (10.15)$$

Слика пресека

Ако претпоставимо да попречни пресек недеформабилан у својој равни, т.ј. да не мења облик при увијању, то значи да се сви делови тог пресека морају заокренути за исти угао као и цео пресек па се, на основу израза (10.2), може написати

$$M_{ti} = G I_{ti} \theta_i' = G I_{ti} \theta' \quad (10.16)$$

односно, израз (10.15) постаје

$$M_t = G (I_{t1} + I_{t2} + \dots + I_{ti} + \dots + I_{tn}) \theta' = G \sum I_{ti} \theta' = G I_t \theta' . \quad (10.17)$$

На основу израза (10.15) и (10.5) може се закључити да је увојни момент инерције целог пресека једнак збиру увојних момената појединих његових делова

$$I_t = I_{t1} + I_{t2} + \dots + I_{ti} + \dots + I_{tn} = \sum I_{ti} . \quad (10.18)$$

Дакле, због недеформабилности попречног пресека може се написати

$$\theta' = \frac{M_{ti}}{G I_{ti}} = \frac{M_t}{G I_t} .$$

односно, уношењем израза (10.6) у (10.16) добиће се величина момента увијања коју носи сваки од делова попречног пресека

$$M_{ti} = M_t \frac{I_{ti}}{I_t}. \quad (10.19)$$

Напон смицања у сваком делу пресека биће, на основу (10.4) и (10.19),

$$\tau_{max\,i} = \frac{M_{ti}}{W_{ti}} = \frac{M_t}{W_{ti}} \cdot \frac{I_{ti}}{I_t} = \frac{M_t}{I_t} \cdot \frac{I_{ti}}{W_{ti}}, \quad (10.20)$$

а највећи напон смицања ће бити у оном делу пресека у којем однос I_{ti} / W_{ti} има највећу вредност и износиће

$$\tau_{max} = \frac{M_{ti}}{W_{ti}} = \frac{M_t}{I_t} \left(\frac{I_{ti}}{W_{ti}} \right)_{max} = \frac{M_t}{W_t}. \quad (10.21)$$

Одатле се може закључити да је увојни отпорни момент целог пресека

$$W_t = \frac{I_t}{\left(I_{ti} / W_{ti} \right)_{max}}. \quad (10.22)$$

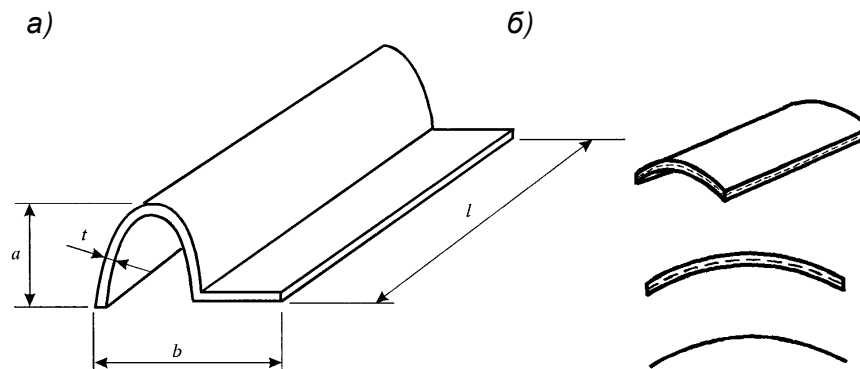
ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ ТАНКОЗИДИХ ШТАПОВА ОТВОРЕНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА

Често ћемо се сусретати са попречним пресецима произвољног облика, а танких зидова, који су изложени увијању. Због тога ћемо дефинисати неке основне појмове.

Дефиниција танкозидог штапа

У савременим конструкцијама или њиховим деловима, посебно ако се говори о конструкцијама моторних возила, бродова, железничких вагона, а и многим сличним, веома често се појављују танкозиди елементи (Сл. 10.8). Танкозида конструкција, или танкозиди елемент, је таква конструкција која је начињена од танких лимова спојених дуж њихових ивица. Заједничка особина танкозидих елемената је да имају малу тежину у поређењу са другим могућим конструктивним облицима. **Танкозиде конструкције обезбеђују велику чврстоћу и крутост при релативно малој тежини.**

Танкозиди штап или **танкозида греда** (Сл. 10.8а) је посебан прорачунски модел који је настао услед специфичности прорачуна танкозидих конструкција или њихових елемената.



Слика 10.8 Танкозиди штап (греда)

Да би конструктивни елемент могао бити назван штапом, потребно је да му однос карактеристичних попречних димензија и дужине:

$$\frac{a}{l}, \frac{b}{l} \leq \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} \right), \quad (10.23)$$

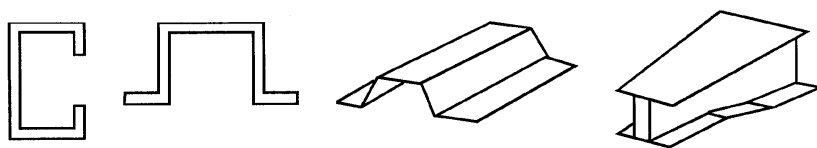
а да би тако дефинисан штап могао бити назван танкозидим, потребно је да му однос дебљине и карактеристичне димензије попречног пресека буде, зависно од аутора,

$$\frac{t}{a}, \frac{t}{b} \leq \frac{1}{10}, \quad \frac{t_{max}}{b_{min}} \leq \frac{1}{10}. \quad (10.24)$$

Тако дефинисан танкозиди штап се тада, довољно тачно, може приказати његовом средњом површи, а попречни пресек штапа његовом средњом линијом. (Сл. 10.86).

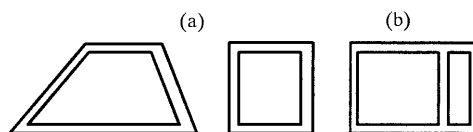
На основу облика, попречни пресеци се деле на:

- **отворене** (Сл. 10.9),



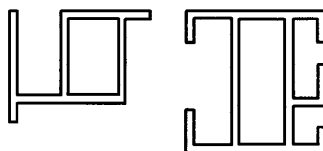
Слика 9. 9 Отворени попречни пресеци

- **затворене једноћелијске** (Сл. 10.10а), **затворене вишећелијске** (Сл. 10.10б)



Слика 10.10 Затворени попречни пресеци

- **и отворено-затворене** (Сл. 10.11) **танкозиде** попречне пресеке.



Слика 10.11 Отворено-затворени попречни пресеци

При томе се могу разликовати:

- попречни пресеци константне и променљиве дебљине,
- прави и криви штапови,
- штапови константног и променљивог попречног пресека.

Треба напоменути да су напони смицања у танкозидим штаповима (гредама) знатно већи него у штаповима пуног попречног пресека. То доводи у питање претпоставку о равним попречним пресецима, јер код танкозидих штапова долази до депланације (кривљења) пресека.

С обзиром на разлике у понашању, одвојено ће бити разматрани отворени од затворених попречних пресека.

Основне претпоставке теорије танкозидних штапова отворених попречних пресека

1. Облик попречног пресека штапа остаје непромењен током деформације.

Са техничког гледишта ова претпоставка се може сматрати оправданом ако је попречни пресек довољно крут. У складу са тим, профили добијени ваљањем углавном задовољавају, док се заварени, заковани и вијцима спојени пресеци морају ојачати попречним укрућењима.

2. Клизање у средњој површи штапа може се занемарити.

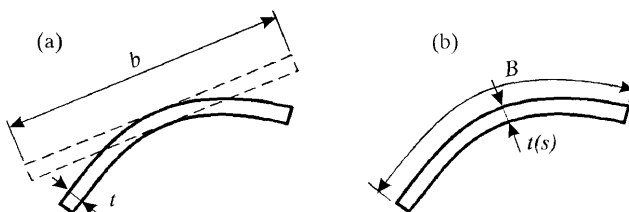
У прилог овој претпоставци може се навести чињеница да је много лакше да се танки лим савије или увије, него да му се у средњој површи изведе деформација смицања.

Увијање штапова танкозидог отвореног попречног пресека

Анализу штапова танкозидог отвореног попречног пресека почећемо разматрањем њиховог понашања при увијању, при чему ћемо раздвојити неколико типова попречних пресека.

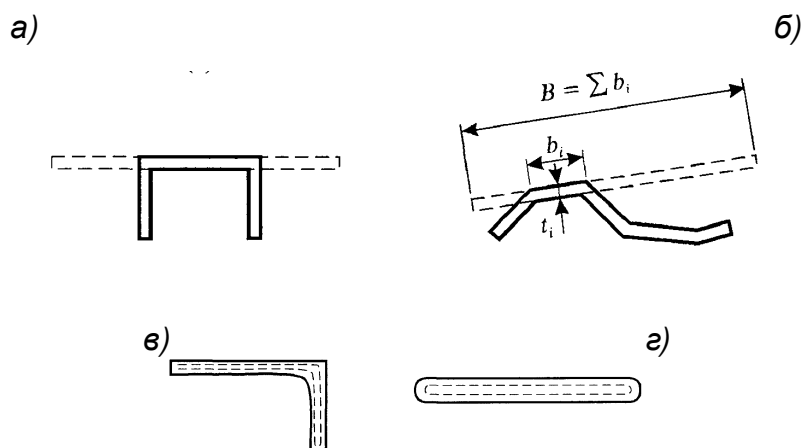
Танкозиди отворени попречни пресеци који се могу развити

Прво ћемо разматрати танкозиде пресеке (Сл. 10.12), који се са довољном тачношћу могу развити (исправити) у танки правоугаоник, односно четвороугао дужине B .



Слика 10.12 Танкозиди попречни пресек који се може развити

Уколико је попречни пресек (Сл. 10.12 а и б) састављен од више правих делова - танких правоугаоника (што се може постићи савијањем једног лима или заваривањем више лимова - при чему су поједини лимови константних дебљина),



Слика 10.13 Пресек састављен од више правих делова

увојни момент инерције сваког појединог дела је,

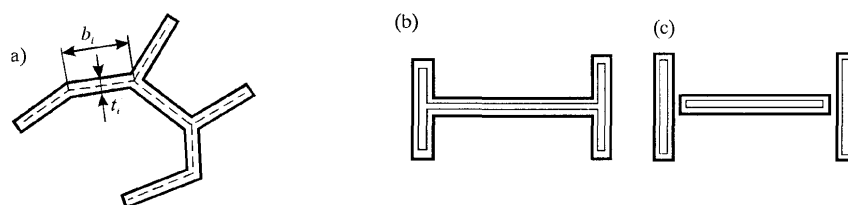
$$I_{ii} = \frac{1}{3} b_i \cdot t_i^3, \quad (10.24)$$

док је за цео попречни пресек

$$I_t = \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3, \quad B = \sum b_i. \quad (10.25)$$

Танкозиди отворени попречни пресеци који се не могу развити

За танкозиде сложене пресеке (Сл. 10.14а) који се не могу развити треба узети у обзир чињеницу да је сваки од тих делова танки правоугаоник.



Слика 10.14 Танкозиди попречни пресек који се не може развити

Претпоставићемо да сваки део дужине b_i може бити различите, али константне дебљине t_i , па ће му увојни момент инерције бити дефинисан изразом (10.24), док ће увојни момент инерције целог попречног пресека бити дефинисан изразом (10.25).

Ако је цео сложени попречни пресек изложен увијању моментом M_t , сваки i -ти део пресека носиће један део тог укупног момента M_t , који, на основу израза (10.16) и (10.24), износи

$$M_{ti} = G \frac{b_i t_i^3}{3} \theta', \quad (10.26)$$

док је укупни момент једнак збиру свих тих појединачних момената

$$M_t = \sum M_{ti} = G \cdot \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 \theta', \quad (10.27)$$

одакле је

$$\theta' = \frac{M_t}{G I_t} = 3 \frac{M_t}{G \sum b_i t_i^3}. \quad (10.28)$$

Највећи напон смицања у **i-том** делу пресека биће, на основу (10.20) и (10.12),

$$\tau_{max i} = \frac{M_{ti}}{W_{ti}} = 3 \frac{M_{ti}}{b_i t_i^2}, \quad (10.29)$$

одакле је, на основу (10.26) и (10.5),

$$\tau_{max i} = G \theta' t_i = \frac{M_t}{I_t} t_i. \quad (10.30)$$

Очигледно је да ће се највећи напон смицања појавити у лиму највеће дебљине и износиће

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} t_{max} = \frac{M_t}{W_t}. \quad (10.31)$$

Увојни отпорни момент целог пресека је тада, на основу (10.31) и (10.4),

$$W_t = \frac{I_t}{t_{max}}. \quad (10.32)$$

Поправни коефицијент

На основу експеримената је установљено да у израз (10.25) за увојни момент инерције I_t сложених попречних пресека, треба увести извесни **поправни коефицијент η** који зависи од облика попречног пресека, односно да треба написати

$$I_t = \eta \cdot \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 \quad (10.33)$$

У Табели 10.2 наведене су вредности поправног коефицијента према подацима узетим од неколико различитих аутора.

Табела 10.2 Вредности поправног коефицијента η

Профил	А у т о р (*)				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5) и (6)
L	0,86 - 1,10	0,99	1	0,83	1,00
U	0,98 - 1,25	1,12	1,12	1,10	1,12
T	0,92 - 1,25	1,12	1,15	1	-
Z	1,13 - 1,45	1,12	1,17	-	-
IP	1,21 - 1,47	1,29	-	-	-
I	1,16 - 1,44	1,31	1,20	1,30	1,20
Ω	-	-	-	1,70	-
+	-	-	-	-	1,17

(1) – A.Foppl,

(2) – C.F.Kolbrunner, N.Hajdin,

(3) – N.M.Beljaev, G.S.Pisarenko,

(4) – J.Pawlowski,

(5) – M.E. i T. Niezgodinski,

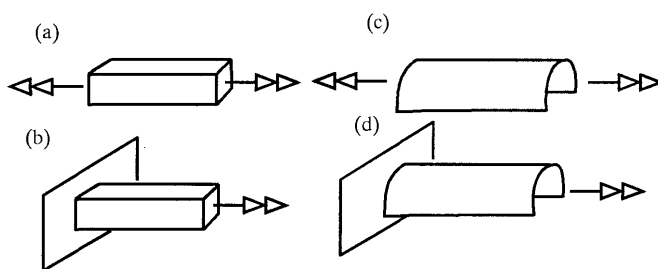
(6) – N.W.Murray.

Ми ћемо, у прорачуну користити вредности поправног коефицијента према ауторима **(2)**.

Слободно и ометено увијање

У теорији еластичности се показује да једино код штапова кружног попречног пресека, при увијању, **не долази** до померања тачака у подужном правцу, а самим тим ни до **депланације (витоперења) попречног пресека**, док код свих осталих призматичних попречних пресека до поменуте појаве долази.

Уколико су, при томе, на оба краја штапа допуштена подужна померања рећи ћемо да се ради о **слободном, неометеном, увијању** (Сл. 10.15а, ц), а уколико су један или оба краја штапа учвршћени (уклештени), то јест, ако су тиме спречена померања тачака попречног пресека у подужном правцу, ради се о **ометеном** или **ограниченом увијању** (Сл. 10.15б, д).

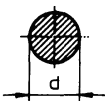
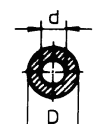
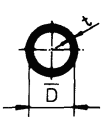
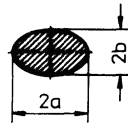
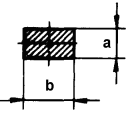
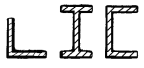
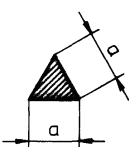
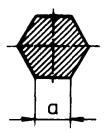


Слика 10.15 Слободно и ометено увијање

При увијању танкозидих штапова отвореног попречног пресека померања у подужном правцу су много израженија и о њима се посебно мора водити рачуна. Без посебног доказивања може се рећи **да се утицај ометеног увијања може занемарити у случају пуних призматичних попречних пресека, док се код танкозидих попречних пресека мора узети у обзир.**

Наведимо на крају овог поглавља, без посебног извођења, у облику мале табеле (Табела 10.3), изразе за израчунавање величине попречног пресека A , увојног момента инерције (торзионе константе) I_t , највећег напона смицања τ_{max} и релативног угла увијања θ' за неколико облика пуних и танкозидих попречних пресека.

Табела 10.3 Изрази за израчунавање величине попречног пресека, торзионе константе, највећег напона смицања и релативног угла увијања

Облик и димензије пресека	Величина попречног пресека A	Торзиона константа I_t	Највећи напон смицања τ_{max}	Релативни угао увијања θ'	Примедбе
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{16 M_t}{\pi d^3}$	$\frac{32 M_t}{G \pi d^4}$	$I_t = I_o$
	$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$	$\frac{16 M_t D}{\pi (D^4 - d^4)}$	$\frac{32 M_t}{G \pi (D^4 - d^4)}$	$I_t = I_o$
	$\pi \bar{D} t$	$\frac{\pi \bar{D}^3 t}{4}$	$\frac{2 M_t}{\pi \bar{D}^2 t}$	$\frac{4 M_t}{G \pi \bar{D}^3 t}$	Цев танких зидова
	$\pi a b$	$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$	$\frac{2 M_t}{\pi a b^2}$	$\frac{M_t (a^2 + b^2)}{G \pi a^3 b^3}$	τ_{max} на крају краће полуосе
	$a b$	$\beta b a^3$	$\frac{M_t}{\alpha b a^2}$	$\frac{M_t}{G \beta b a^3}$	Види Табелу 1
	$\sum b_i t_i$	$\eta \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3$	$\frac{3 M_t t_{max}}{\eta \sum b_i t_i^3}$	$\frac{3 M_t}{G \eta \sum b_i t_i^3}$	τ_{max} на средини стране правоугаоника највеће дебљине
	$0.433 a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{80} a^4$	$\frac{20 M_t}{a^3}$	$\frac{46.2 M_t}{G a^4}$	τ_{max} на средини сваке стране
	$2.598 a^2$	$1.034 a^4$	$\frac{1.09 M_t}{a^3}$	$\frac{0.967 M_t}{G a^4}$	