1. Rešenja zadataka pošaljite na email adresu:

   numericke.metode.metode@gmail.com

   do 23:59 časova 31.12.2016. godine. Rešenja zadataka pristigla sa zakašnjenjem neće biti uzimana u razmatranje, bez obzira na izgovor.

2. Prilikom slanja email-a u polju subject navedite sledeću nisku znakova:

   KMA.NM.999/GG

   gde je:

   - KMA-oznaka Katedre za Matematiku
   - NM-oznaka za Numeričke metode
   - 999/GG-broj indeksa studenta gde se unosi vodeća nula

   Na primer, ako Vam je broj indeksa 23 i neka ste upisani 2011 godine, tada u subject-u treba da stoji:

   KMA.NM.023/11

   Slično, ako Vam je broj indeksa 124 i neka ste upisani 2011 godine, tada u subject-u treba da stoji:

   KMA.NM.124/11

3. Rešenje zadataka: program u Matlabu, slike kao ilustracije u JPEG formatu, tekst otkucan u Wordu, pa eksportovan u pdf, ili skenirana rešenja pisana na papiru, pošaljite kao attachment Vašeg email-a, tako što sve fileove vezane za jedan zadatak zapakujete u zip arhive sa imenima

   zadatak01.zip, zadatak02.zip, zadatak03.zip, zadatak04.zip

4. Poslednji pristigli Vaš email je važeći i on će biti pregledan, dakle, mora sadržati rešenja svih zadataka koja želite da pošaljete.

5. Svako prepisivanje biće sankcionisano, pored toga, morate usmeno odbraniti rad koji ste poslali.

6. Rešenje svakog zadatka donosi 25%.

Univerzitet u Beogradu 30.12.2016.

Mašinski fakultet

II Kolokvijum iz Numeričkih metoda

1. Odredjujemo broj značajnih cifara kojim je odredjena vrednost funkcije $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ nad oblašću $[-10,10] \times [-10,10]$ pod pretpostavkom da su veličine x i y zadate sa 3 i 6 značajnih cifara, redom.

   a) Odrediti teorijski broj značajnih cifara vrednosti funkcije `f` u funkciji broja značajnih cifara argumenata funkcije.

   b) Napisati `script` u `Matlabu` i prikazati grafičku zavisnost broja značajnih cifara funkcije `f` u funkciji vrednosti argumenata na intervalu $[-10,10] \times [-10,10]$, sa barem 101 tačkom u gridu po svakoj promenljivoj. Potrebno je nacrtati dve slike jednu koja se dobija eksperimentom i drugu koja je dobijena na osnovu teorijske ocene u delu zadatka pod a).

   c) Objasniti zašto je u pojedinim delovima skupa $[-10,10] \times [-10,10]$ vrednost funkcije f odredjena sa 6 značajnih cifara a u pojedinim sa 3 značajne cifre.

   Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite teorijko razmatranje a), `script` file i slike pod b), komentar pod c).

2. Posmatramo niz matrica A_k, $k = 10, 20, \ldots, 200$, formiran na sledeći način

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

   Matrice A_k, $k = 10, 20, \ldots, 200$ su regularne.

   a) Napisati `script` file u `Matlabu` koji crta zavisnost faktora uslovljenosti matrice A_k, $k = 10, 20, \ldots, 200$ u funkciji reda matrice k. Za odredjivanja faktora uslovljenosti matrice A_k može se, recimo, koristiti funkcija `cond`.

   b) Na osnovu rešenja dela pod (a odrediti broj značajnih cifara koje ima rešenje sistema jednačina

$$A_k x = b_k, \quad k = 10, 20, \ldots, 200,$$

   u funkciji reda matrice k.

c) Nacrtati zavisnost broja značajnih cifara u rešenju prethodnog sistema jednačina u funkciji reda matrice k, tako što za svako $k = 10, 20, \ldots, 200$ odredite rešenje x (može biti vektor kolona ispunjen slučajnim brojevima), konstruišete slobodan vektor $b_k = A_k x$, zatim rešite sistem jednačina koristeći funkciju `linsolve`. Uporediti dobijenu sliku sa razmatranjem pod b).

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite `script` file i nacrtate sliku pod a), na osnovu slike dobijene pod a) nadjete teroijski broj značajnih cifara u funkciji k pod b), nacrtate sliku pod i uporedite rezultate dobijene eksperimentom sa terijskom razmatanjem pod c).

3. a) Neka je dat niz brojeva x_k, $k = 1, \ldots, n$, koji predstavljaju aproksimaciju broja x. Pod pretpostavkom da broj značajnih cifara u nizu x_k, prvo raste sa k, aa zatim počinje da opada, odrediti vrednost k za koju je broj značajnih cifara najveći. Zadatak rešiti programom u `script` fileu. Proveriti `script` koristeći recimo niz

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_k	1	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.415	1.42	1.5	1

b) Koristeći formulu za numeričko diferenciranje

$$f'(x) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \Delta^k f(x) + R_n(f),$$

napisati `script` koji konstruiše aproksimacije izvoda funkcije $f(x) = \sin x$ u tački $x = \pi/4$ sa korakom $h = .1$, za vrednosti $n = 1, \ldots, 50$. Nacrtati zavisnost broja značajnih cifara u funkciji n. Objasniti dobijenu zavisnost.

c) Koristeći `script` pod (a i (b naći vrednost n za koju se dobija najveća količina značajnih cifara u aproksimaciji izvoda funkcije $f(x) = \sin x$ u tački $\pi/4$ za $h = .1$.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite `skcript` file pod a), napišete `script` file i nacrate sliku pod b), koristeći oba `script` filea nadjete najbolju vrednost za n pod c).

4. Pretpostavimo da rešavamo Cauchyev problem

$$y' = -5y, \quad y(0) = 1.$$

a) Rešiti egzaktno Cauchyev problem.

b) Napisati funkciju u `Matlabu` koja rešava Cauchyev problem koristeći metodu diferenciranja unazad

$$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2h}{3} f_{n+2}.$$

Potrebnu startnu vrednost y_1 izračunati koristeći egzaktno rešenje dobijeno u delu pod a). Rešiti Cauchyev problem, sa $h = .001$ i nacrtati broj značajnih cifara u funkciji argumenta funkcije y na intervalu $[0, 2]$. Objasniti oblik krive.

c) Za $h_i = 2^{-i}$, $i = 2, \ldots, 7$, nacrati broj značajnih cifara u funkciji argumenta funkcije y. Na osnovu slike odrediti koje vrednosti koraka h_i imaju veliki gubitak značajnih cifara sa porastom x, a za koje vrednosti koraka h_i je taj gubitak znatno manji. Objasniti pojavu pojmom stabilnosti metoda.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite rešenje Cauchyevog problema pod a), napisanu funkciju i nacrtanu sliku pod b) uz objašnjenje slike, sliku i objašnjenje ponašanja metoda za različite vrednosti koraka pod c).

prof. dr Aleksandar Cvetković